11599
a
El7
57



CHRISTIANUS WOLFIUS.

ELEMENTA
MATHESEOS
UNIVERSAE.

TOMUS I.

QUI
COMMENTATIONEM
DE
METHODO MATHEMATICA,
ARITHMETICAM, GEOMETRIAM,
TRIGONOMETRIAM PLANAM, ET ANALYSIN
TAM FINITORUM, QUAM INFINITORUM,
COMPLECTITUR.

AUTORE
CHRISTIANO WOLFIO,
CONSILIARIO AULICO HASSIACO, MATHEMATUM ET
PHILOSOPHIÆ IN ACADEMIA MARBURGENSI PROFESSORE
PRIMARIO, PROFESSORE PETROPOLITANO HONORARIO, SOCIETATUM
REGIARUM BRITANNICÆ, ATQUE BORUSSICÆ
SODALI.

EDITIO NOVA
PRIORI MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.

HALÆ MAGDEBURGICÆ, ANNO MDCCXXX.
PROSTAT IN OFFICINA LIBRARIA RENGERIANA.

Landesbibliothek
Coburg

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO,

DOMINO WILHELMO,

HASSIÆ LANDGRAVIO,

PRINCIPI HERSFELDIÆ, COMITI CATTIMELIBOCI, DECIÆ, ZIEGENHAINÆ, NIDDÆ ET SCHAUMBURGI,

ETC. ETC.

EXERCITUS EQVESTRIS FOEDERATI BELGII GENERALI LOCUM TENENTI,

LEGIONIS PRÆTORIANÆ DESULTORIÆ CHILIARCHÆ,

NEC NON

OPPIDI TRAJECTI MOSANI SUPREMO PRÆFECTO BELLICO

ETC. ETC.

PRINCIPI AC DOMINO CLEMENTISSIMO.

SERENISSIME PRINCEPS, DOMINE CLEMENTISSIME.

SCientiæ Mathematicæ Imperatoribus, Regibus & Principibus ab omni ævo in pretio fuere, ut non modo munificentia sua eas promoverint, sed & ipsimet animum ad eas excolendas applicaverint. Non opus est, ut de ALPHONSO X Castellæ ac Legionis Rege, & ULUGH BEIGHO, TAMERLANIS MAGNI nepote, Astronomiæ instauratoribus, de MATTHIA Hungariæ Rege inventorum mathematicorum insigni remuneratore, de FRIDERICO II Daniæ & Norwegiæ Rege atque RUDOLPHO II Imperatore TYCHONIS Mecænatibus, de FERDINANDO, magno Etruriæ duce,

GALI-

GALILÆI Protectore, de CAROLO II & LUDOVICO XIV Angliæ & Galliæ Regibus, Societatum Scientiarum conditoribus, de DUCE BURGUNDIÆ, Elementorum Geometriæ ſcriptore & de pluribus aliis, Principibus ſummis dicamus: eccur enim e longinquo petenda ſunt exempla, ubi domeſtica proſtant? Cur ad vetuſta provocandum, ubi præſentia intuemur? Nemo profecto ignorat, quæ WILHELMUS IV Haſſiæ Landgravius ſucceſſu feliciſſimo, quo TYCHONI, Phœnici illi Aſtronomorum, judice HEVELIO, palmam dubiam reddidit, Aſtronomiæ & Mechanicæ inſtaurandæ gratia Caſſellis molitus eſt. Et orbis univerſus admiratur, quæ Magnus Parens Tuus, CAROLUS, Sapientis cognomen inſtar ALPHONSI dudum meritus, in omni Matheſi ac philoſophia experimentali præſtitit atque munificentiam tanto Principe dignam deprædicat, qua artes mathematicas & Naturæ cognitionem promovet. Tu, Princeps Sereniſſime, qui omnibus virtutibus emines, quæ Heroëm in bello, Regnatorem in pace exornant, nullis Principum in Scientiis mathematicis magno æſtimandis ſecundus. Quare cum Elementa mea Matheſeos univerſæ multo auctiora novoque habitu indu-

ta, ut opus plane novum exiſtimari debeant, denuo in lucem proferam, quo via plana ad omnem theoriam & praxin ſternitur, veræque methodi leges, ad accurate & utiliter philoſophandum vitæque negotia dextre gerenda apprime neceſſariæ animo lectoris ſenſim ſenſimque inſtillantur; nullus dubitavi, PRINCEPS SERENISSIME, ad pedes Tuos ea deponere, certo perſuaſus Tibi non improbatum iri meum in Scientiis humano generi adeo utilibus propagandis ſtudium. Deus Te ſervet Principum Haſſiæ Decus! Ita vovet,

SERENISSIME PRINCEPS,

DOMINE CLEMENTISSIME,

SERENISSIMI NOMINIS TUI

Marburgi d. 8. Martii
1730.

humillimus cultor
CHRISTIANUS WOLFIUS.

PRÆFATIO.

Etsi nullo tempore, quo ſcientiis honos fuit, defuerint viri egregii, qui præclaris ingenii ac virtutum dotibus ſupra communem mortalium ſortem evecti divina illa Mathemata digna ſtatuerunt, in quibus elaborarent, nec infelici ſucceſſu ſuſpiciendis inventis eadem amplificarunt, quemadmodum veterum monumenta palam loquuntur; ante noſtram tamen ætatem ad illud faſtigium non fuerunt evecta, in quo hodie conſtituta miramur. Neque indigna ſunt, quæ in dies magis magisque excolantur & exploſa loquaci ſophiſtica in ſcholas revocentur, cum neminem, niſi aut tardiore fuerit ingenio, aut ignarus artis oſor affectu

 præ-

præpeditam habuerit mentem, fore exiſtimem, qui non eorum puritatem, evidentiam ac ſublimitatem miretur & ob utilitates innumeras inde in genus humanum redundantes de Arte noſtra præclare ſentiat. Mentem enim humanam valde perficit Matheſis, ad philoſophiam aliaque ſtudiorum genera & latius, & profundius, & utilius tractandum inſtruit, ad ſolidiorem doctrinam adminicula inexſpectata ſuppeditat, maximas ad vitam utilitates affert.

Non ignota loquor, non inexſpectata Mathematum peritis. Attamen nullus dubito fore, ut vulgus litteratorum ex ſuo ingenio alios judicans perſuadere conetur ignaris, ex præpoſtero in ſcientias mathematicas ſtudio proficiſci has laudes. Quamvis autem non ea ſit penes me garrientium (a) auto-

(a) Autor ſum his hominibus, ut præfationem legant, quam *Philippus Melanchthon*, Vir non Mathematicis, ſed elegantioribus, ſed philoſophicis, ſed theologicis ſtudiis celebris, communis Germaniæ Præceptor, *Joannis Vogelini* Elementis Geometriæ præmiſit. Ex ea notulas quasdam hinc inde adſpergemus, conſenſum Philippeorum cum noſtris manifeſtaturas. Ita ergo generatim ad rem noſtram *Melanchthon:* Scio, inquit, has adhortationes apud eos, qui ſordidis ingeniis præditi ſunt, nihil proficere, qui præſtantium diſciplinarum dignitatem non proſpiciunt, aut ſectantur quasdam vendibiliores artes, quæſtus gratia. Nam & mentes habent monſtroſas, & magno ſcelere turbant proportionem geometricam, cum non tribuunt ſuam artibus dignitatem. Sed recta ingenia, etiam medio-

autoritas, ut, quæ inſcite obſtrepunt, ſcite retundam, non tam quod plurimi inſtitutione indignos judicent, qui convitiis extorquere volunt, ut doceantur, & illos demum lumine dignos cenſeant, qui modeſte id deſiderant; quam quod in ſciolis erudiendis oleum operamque perdi pro comperto habeam, quippe qui tum (ut cum *Horoccio* * loquar) pulchre ſibi diſputare videntur, ſi, quod arguendo evertere non poſſunt, tanquam ridiculum contemnant, aut puerilibus dicteriis adſperſum aliorum riſui exponant: cum tamen mearum partium eſſe exiſtimem, ut generoſa atque excelſa ingenia ad ſtudia Mathematica incendam atque inflammem; quid, quæſo, impedit, quo minus evincam, non eſſe Mathematicos (liceat mihi denuo *Horoccii* verbis ** uti) tam perfrictæ frontis, ut abſurdas quasvis ampullas magno clamore ignaris divendant, modo in fucati laboris præmium breviſſimo inanis gloriæ flatu intumeſcant & inter inconditos plaudentium ſtrepitus placide ſibi adulentur; multo minus ita dibuccinare laudes ſuas, ut apud alios merito nullam inveniant.

mediocria, incitari poſſunt ipſa artium admiratione, ſi admoneantur, deinde ſi accedat artifex, qui commode tradat. Ideo ſpero aliquorum ſtudia commoveri poſſe.

* In Aſtronomia Kepleriana defenſa atque promota c. I. p. 23.

** In Prolegomen. p. 8.

Agedum, ergo! quis est, qui scientias Mathematicas & rerum evidentia ac sublimitate, & demonstrationum rigore ac profunditate, & ordinis pulchritudine ac concinnitate ceteris omnibus longe superiores mentem perficere negare ausit? Qui mentis dotes ignorat; qui judicium leve a gravi, ingenium hebes ab acri non distinguit; qui denique culmen perfectionum non prospicit, ad quod menti pervenire datum est. Tum demum, me judice, ingenii acie pollebis, si non modo clara ab obscuris, distincta a confusis, adæquata ab inadæquatis, explorata ab inexploratis, certa ab incertis, probabiliora a minus probabilibus discernere valebis, sed & ipsemet fueris exactus & perspicuus in definiendo, solers & circumspectus in observando, ingeniosus & accuratus in experimentando, severus & acutus in judicando, concinnitatis & rigoris tenax in demonstrando, patiens & profundus in meditando, sagax & expeditus in inveniendo. Sed quomodo, quæso, comparantur habitus tam præclari? Non nisi crebro exercitio. Multus ergo sis necesse est in notionibus evolvendis, in demonstrationibus concipiendis, in problematibus resolvendis, nec proletaria in meditando & inveniendo collocanda est opera. Cum adeo disciplinas, quæ huic scopo conveniant, præter mathematicas nullas noverint, qui mathematicas & ceteras eadem diligentia pertractarunt; studium

dium

dium mathematicum ad acuendum judicium apprime necessarium pronunciamus & sine eo ad solidam rerum cognitionem perveniri posse negamus. (b)

Equidem non ignoro, homines quosdam, cum sint in Mathesi hospites ac plane rudes, se jactare, quod audiverint Mathematicos de rebus mathematicis optime, de aliis a Mathesi alienis pessime judicantes: veruntamen quod ad tam inconsiderate dicta reponam, non unum habeo. Quoniam nimirum non quævis terra Mathematicum alit (neque enim creantur in Academiis ut Doctores;) sane non apparet, unde imperitus Artis obtrectator certus fuerit factus, sibi rem cum Mathematico fuisse. Quid si agrimensorem viderit, aut architectum, aut conspicillorum politorem, aut instrumentorum fabrum, aut virum, cui data est docendi quidem, sed non sciendi Mathesin potestas? Quis enim adeo insanus est, ut unumquemque censeat titulo, quem fama fallax aut fortuna cœca eidem tribuit? Non insolitum, nec inauditum, ut, quem ignari judicant

 Ma-

(b) *Melanchthon* loc. cit. Si qui non totos se huic studio dedent, tamen his ad judicia formanda - - - opus est cognitione elementorum Geometriæ. Idem paulo ante: Cum demonstrationes Geometriæ maxime sint illustres; nemo sine aliqua cognitione hujus artis perspicit, quæ sit vis demonstrationum, nemo sine ea erit artifex methodi.

Matheseos apprime peritum, quem Professores *Euclidis*, *Apollonii*, *Archimedis alterius* elogio etiam post fata mactant, idem tamen a Mathematicis summis, vere idoneis harum rerum arbitris Matheseos imperitus appelletur. Enimvero etiamsi hoc demus, Artis nostræ osorem audivisse Mathematicum de rebus ad Mathesin non spectantibus judicantem; nondum tamen video, unde cognoverit, quod male judicaverit: aliter enim nisi judicaret qui ingenii acumine pollet, aliter qui haud altius vulgo sapit, inter ingenium acre & hebes nullum foret discrimen, nec concedendum erat, in Mathesi cum laude versatis res quaslibet profundius scrutari datum esse. Denique si vel maxime aliquando contigerit, Mathematicum aliquem de rebus ad se non pertinentibus male judicasse; hinc saltem colliges, ipsum occasione ita ferente de re, quam nondum meditatus fuerat, per præcipitantiam, vitium ἀγεωμετρήτοις tantum non semper familiare, statuisse.

Neque enim defendimus, quod eadem opera, qua quis Mathemata sibi familiaria reddit, ceterarum quoque rerum cognitione animum imbuat, & criminationis loco habemus, si qui per malitiam affirment, quod Mathematici glorientur, penes se solos esse principia veritatis; sed quod Matheseos cultura reliquis studiis præmissa efficiat, ut alias disciplispli-

ſciplinas facilius, rectius & profundius percipere poſſis, ubi ad eas induſtriam atque aſſiduitatem attuleris, id vero eſt quod aſſeveramus. Neſcio vero, qua fronte, qui inexperta loquuntur, majorem ſibi fidem haberi velint, quam iis, qui niſi experta non confitentur. Utinam tandem, qui Eccleſiæ ac Reip. præſunt, caverent ne ad cetera ſtudia tractanda animum appellerent, niſi mathematica cognitione imbuti, neque ullus dubito fore ut aliam Eccleſiæ, aliam Reip. faciem contueremur. (c) Ut enim taceam, quæ a ſolida doctrina in Eccleſiam & Remp. redundant, emolumenta, plurimum refert, ſi, qui ob eruditionem utrique præficiuntur, ſint aſſidui, conſiderati, moderati & veritatis amantes, quos Matheſeos ſtudium efficit, ubi ita tractetur, ut amplificet uſum rationis.

Quot-

(c) *Melanchthon* loc. cit. Jacent deſertæ & neglectæ artes mathematicæ, multis jam ſeculis. Nam proxima ætas (*quidni & noſtra?*) juventutem ab hac vera philoſophia ad inſulſiſſimas cavillationes abduxerat. Nunc, poſtquam hæ exploſæ ſunt e ſcholis, annitendum erat, ut pura & nativa philoſophia traderetur, quæ conduceret ad ſolidam doctrinam conſequendam. Nam hæc noſtra ætas ſatis commonefacit nos, quantum opus ſit Reip. perfecta doctrina, quia multi paſſim, tum inopia judicii, tum quia diſerte explicare nihil poſſunt, ſparſerunt aut defendunt opiniones abſurdas & confuſaneas, ex quibus in Eccleſia magna certamina, magnæ diſſenſiones extiterunt. Nec finis horum malorum erit ullus, niſi ad veram & eruditam ſtudiorum rationem juventus revocata fuerit.

Quotquot humanæ mentis vires cognoſcere ſtudent earumque uſum ſcrutari geſtiunt; eos ad Mathematum culturam invitamus. Oſtendet Algebra atque Geometria ſublimior, nihil eſſe tam abditum, quin detegatur: docebit Aſtronomia cum Geographia, nihil eſſe a ſenſibus hominum tam remotum, quin id ſatis diſtincte cognoſcere & accurate dimetiri valeamus: teſtabitur calculus Aſtronomicus, quanta certitudine futura cœli phænomena prædicere liceat, etſi genius nullus motuum, quibus ſidera feruntur, leges Aſtronomis revelaverit: Optica cum Aſtronomia diſcrimen inter repræſentationes rerum in intellectu & in imaginatione monſtrabit: Arithmetica, Trigonometria & Analyſis regulas generales ſuppeditabunt, quibus in inveniendo dirigatur intellectus & una cum ſenſibus compeſcatur imaginatio, ne meditationes turbet: methodus denique mathematica rectum rationis uſum manifeſtabit.

Quanta ſit vis Mathematum in ſcientia naturali, ex Statica, Mechanica, Hydroſtatica, Aerometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Aſtronomia & Geographia abunde perſpicitur: quæ omnes argumenta quædam phyſica ſolidius atque profundius pertractata exhibent, quam ſine Matheſeos principiis fieri poterat. Nonne enim Phyſici eſt explicare motum, gravitationem corporum, proprie-

prietates aeris, phænomena viſus, ſtructuram univerſi, naturam & proprietates corporum mundi totalium? Quodſi vero quæ de motu ſolidorum in Statica & Mechanica, de gravitatione corporum in fluidis in Hydroſtatica, de motu fluidorum in Hydraulica, de aere in Aerometria, de viſu in Optica, Catoprica & Dioptrica, de corporibus mundi totalibus eorumque motuum legibus in Aſtronomia & Geographia traduntur, cum iis conferre dignatus fueris, quæ de iisdem argumentis in Phyſicorum ſyſtematibus occurrunt, demtis præſertim iis, quæ ex Mathematicorum voluminibus deſcripta ſunt; quantum diſcriminis intercedat inter doctrinas phyſicas principiis Mathematicis ſuperſtructis atque Mathematicorum opera excultas, & inter ea dogmata, quæ Mathematicorum opem adhuc deſiderant, illico conſtabit. Unde non miramur *Robertum Boylium*, de ſcientia naturali experimentando præclare meritum, ita ſcribentem (d): „De Mathematica nonnihil tibi propoſiturus ſum, „eum inprimis in finem, ne forte (quod & mihi „olim evenit) ſeducaris Philoſophorum iſtorum „modernorum autoritate, qui cum Phyſici objectum ſit materia, mathematicas diſciplinas, tan-

 „quam

(d) In Conſiderationibus circa utilitatem Philoſophiæ naturalis experimentalis Exercitat. 6. §. 142. p. m. 483.

„quam abſtractis ſaltem quantitatibus & figuris oc-
„cupatas, ſtudio naturali obeſſe magis, quam pro-
„deſſe contendunt. Quamvis enim opinionem
„ipſius *Kepleri*, trium Imperatorum Mathematici
„aliorumque Aſtronomorum recentium abſurdam,
„hominibus perſuadentem, quod Mathematica
„quempiam ad ſtudium naturale facilius abſolven-
„dum non omnino idoneum reddere poſſit, reſta-
„bilire & defendere aliquando conatus fuerim; in-
„genue tamen confiteor, quod experimentis meis
„in ſpecie mechanicis, Mathematicæ in Phyſica
„uſum ingentem mihi demonſtrantibus, ſæpe jam
„exoptarim, ut in Geometriæ theoriam & ſtudium
„Algebræ ſpecioſæ, quam puer ferme addidici, ma-
„jorem impendiſſem partem temporis & induſtriæ,
„quæ Planimetriæ & Fortificatoriæ (de qua me in-
„tegrum Tractatum ſcripſiſſe memini) aliisque pra-
„cticis Mathematicæ partibus a me attributa fuit.
Imo nec miramur ingenue profitentem (e): „ve-
„reor, implorandam eſſe a Mathematicis lectoribus
„veniam pro iis rebus, quas, ſi in Matheſi magis pol-
„lerem, accuratius tractaſſem. Alibi nimirum oſten-
di (f), tum demum in ſcientia naturali ad certitudi-
nem

(e) In præfat. ad nova experimenta phyſico-mechanica de vi aeris elaſtica.

(f) In præfat. ad Elementa Aerometriæ A. 1709. ſeorſim edita.

nem ſeu evidentiam perveniri & dominium in res creatas obtineri, ſi Matheſis ad Phyſicam applicetur.

Niſi utilitates, quas Matheſis ad vitam affert, ſponte ſua occurrerent attentis; non modo Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Architecturæ, Mechanicæ, Hydroſtaticæ, Hydraulicæ uſus in œconomia ampliſſimus facile oſtendi, ſed etiam evidenter demonſtrari poſſet, maximam felicitatis humanæ partem Matheſi ſuperſtructam: ut taceam commoda, quæ Matheſis præſtat abſolutis ſtudiis Academicis in exteras regiones excurrentibus, quibus maxima utilitatis ac voluptatis ex itinere capiendæ pars perit, ſi in illa fuerint hoſpites ac peregrini.

Cum adeo diſciplinarum Mathematicarum utilitates innumeras mente attenta perpenderem, propria autem experientia edoctus non ignorarem, deſiderari adhuc Matheſeos univerſæ elementa, quæ ad illas conſequendum ſufficerent; ante triennium idiomate patrio Elementa Matheſeos univerſæ publici juris feci, in quibus ea potiſſimum explanavi, quæ ad praxin tendunt, adeoque theorias prætermiſi, quarum non adeo manifeſtus eſt uſus. Dum liber adhuc ſub prælo ſudabat, contigit ut multi eundem expeterent: (g) quo ipſo adductus biblio-

(g) Elementa iſta Germanica ab eo tempore jam quarta vice typis reſcripta, & in compendium redacta, quod ter lucem adſpexit.

bliopola desiderabat, ut eundem in sermonem Latinum transfunderem. Hujus ego desiderio annuens bonam jam operis partem habitu Romano indutam prælo destinaveram, cum consultius mihi videretur, si theoretica uberius exponerentur, quam in Opere Germanico ad juvandum primos tyronum conatus composito fieri par erat, ut Latinum scilicet etiam satisfaceret ad sublimiora tendentibus. Quæ igitur sermone Latino prodeunt Elementa, a Germanicis multum differunt novoque ordine digesta sunt. In iis elaborandis tantum operæ collocare non licuit, quantum opus istiusmodi requirere videbatur. Præterquam enim quod sex, minimum quinque per diem horas instituendæ juventuti Academicæ cum in Mathesi, tum in Philosophia impendam; varia obstacula alia impediverunt, quo minus omnia ex voto fierent. Quoniam nimirum bibliopola, qui aliquos jam sumtus in editionem fecerat, instabat, ut opus cœptum perficerem; singulas fere propositiones typis describendas tradere coactus fui, quamprimum a me in chartam conjectæ essent, typothetis scilicet quotidie pensum semidiurnum a manu mea exspectantibus. Quodsi ergo quædam in hoc opere deprehendis, quæ jure displicent, ea nec mihi placere scias velim. Si totum displicet, ut meliora des hortor, gratum & mi-

hi

hi & aliis facturus. Interea patere, ut hoc duce utantur, quotquot ad ſolidam Mathematum cognitionem non ſine operæ, ſumtuum & temporis compendio adſpirant, quamdiu deſit magis fidus. Theoretica & practica eadem induſtria expoſui: ex his unusquisque ſeligat, quæ ad palatum ſuum eſſe exiſtimaverit, reliqua aliis, non ſibi dicta putet. Indicem geminum ſubjunxi: quorum alter eſt rerum atque verborum, ut his elementis etiam inſtar Lexici mathematici uti poſſint, quorum ſtudia eodem juvantur; alter elementa *Euclidea* cum noſtris confert, ut, quæ ex *Euclide* paſſim citantur, etiam in noſtris inveniri poſſint, nec *Euclideis* habeant opus, qui noſtra poſſident. Vale, Lector benevole, & his noſtris utere, Tomum alterum, qui Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perſpectivam, Trigonometriam Sphæricam, Aſtronomiam, Chronologiam, Geographiam, Gnomonicam, Pyrotechniam, Architecturam militarem atque civilem, una cum Bibliotheca Mathematica complectetur, propediem exſpectans. Dabam Halæ Magdeburgicæ ipſis Calendis Octobris A. 1713.

Plato apud Theonem Smyrnæum
c. I. p. 20.

Adolescentibus eorumque ætati conveniunt disciplinæ Mathematicæ, quæ animam præparant & defæcant, ut ipsa ad Philosophiam capessendam idonea reddatur.

MONITUM AUTORIS
DE EDITIONE NOVA.

NOvam horum Elementorum editionem daturi operam dedimus, ut multo correctiora prodirent, multo etiam auctiora. Etenim in singulis disciplinis ea adjecimus, quæ adhuc desiderari posse videbantur & viam ad ulteriora sternunt: quo ipso contingit, ut disciplinæ nonnullæ novam plane formam adeptæ fuerint, &, quæ in editione priore per duos Tomos digesta fuerant, in hac posteriore quatuor Tomis complecti necesse fuerit. Ita in Tomo primo, qui nunc prodit, ut taceamus, quæ passim intersperse sunt, Arithmeticæ accesserunt capita nonum & decimum integra de fractionibus decimalibus & sexagesimalibus, Geometriæ caput secundum partis posterioris de sectione & situ planorum, Trigonometriæ & Algebræ problemata varia, quæ vel utilitate sese commendant vel quædam inveniendi artificia continent per cetera nondum insinuata. Accessere etiam tum Geometriæ, tum Analysi finitorum, tum Analysi infinitorum figuræ novæ tabulis æneis incisæ. Et quoniam philosophiam

cer-

certam ac utilem effecturi Mathematum notitiam amplificamus, ut ad eam capessendam animi defæcati præparentur, nuperque in Opere Logico (a) methodum, quæ convenit doctrinæ solidæ, accuratius delineavimus, quam hactenus ab aliis factum fuerat, ac inprimis genuinam demonstrationum formam distincte exposuimus; ideo demonstrationes ita digessimus, ut exempla regulis ad amussim respondeant, & elementa hæc manu assidua volventibus naturalis ratiocinandi modus sua veluti sponte sese insinuet nascanturque in animo ideæ, quæ Logicæ præceptis respondent. Nulli igitur dubitamus fore, ut, qui in his elementis attenta mente perlegendis fuerint assidui, fructus eximios percipiant: id quod quemadmodum speramus, maxime optamus. Dabam Marburgi Cattorum d. 11. Martii. A. 1730.

(a) Prodiit A. 1728. in 4.

DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

PRÆFATIO.

SI quid mei judicii eſt, operam non inanem ſumit, qui methodum Mathematicorum diligentiſſime rimatur. Ejus enim vim qui tenet, is non modo ad Mathemata percipienda animum, quantum poteſt, attendit & rationes evidentiæ illorum funditus perſpicit; verum ad alias etiam diſciplinas, utut labore non adeo facili, cum fructu tamen prorſus inſigni, eandem transfert. Quodſi vero Matheſis non aliam præter hanc unicam cultoribus ſui afferret utilitatem; eidem tamen gnaviter incumbere deberent, quotquot diſciplinarum ſtudia ingrediuntur. Eumque in finem ſtudium mathematicum tantopere

commendant viri docti ac intelligentes, quos inter (*) LOCKIUM, (**) MALEBRANCHIUM, (***) TSCHIRNHUSIUM nominasse sufficiat, quorum in philosophia rationali illustranda solertia haud paucorum opinionem vicit. Hanc igitur de methodo mathematica commentationem mole exiguam, sed rerum ubertate gravem Elementis Matheseos universæ præmisi, ne in iis desiderari paterer industriam meam, quorum ad recte philosophandum quam maxime necessaria est cognitio: (****) inprimis cum exiguus admodum sit eorum numerus, quibus interiora methodi sunt perspecta; multo minor autem illorum, qui methodo mathematica prompte utuntur. Cæterum hæc commentatio de methodo singulari cum attentione perlegenda &, ubi Arithmeticæ ac Geometriæ elementa evolvuntur, præcepta methodi sunt relegenda, tum ut penitus intelligantur, tum ut appareat, quomodo iis satisfiat. Ita demum Matheseos studium vere acuet intellectum.

(*) In Tractatu de directione ingenii (qui inter opera posthuma idiomate Anglico Londini 1706. edita habetur) p. 30.

(**) de inquirenda veritate lib. 6. c. 6. & 7.

(***) in introductione ad Mathesin & Physicam Germanice conscripta p. m. 17. & seqq.

(****) Uberius huc spectantia exposuimus in Logica seu philosophia rationali.

CONSPECTUS COMMENTATIONIS DE METHODO MATHEMATICA.

Methodus Mathematica definitur §. 1. & ejus forma generaliter deſcribitur §. 2. Hæc ut ſpecialius explicetur, docetur quid ſint definitiones §. 3. & harum gratia traditur explicatio notionum tum in genere §. 4. tum in ſpecie clararum §. 6. obſcurarum §. 7. diſtinctarum §. 8. confuſarum §. 9. adæquatarum §. 10. 11. & inadæquatarum §. 12. Oſtenditur, quænam notiones in numerum definitionum admittantur §. 13. 14. 15. Definitiones dividuntur in nominales & reales §. 16. 17. 18. Exponuntur quatuor modi inveniendi definitiones nominales §. 19. 20. 21. 22. & quatuor alii inveniendi reales §. 25. 26. 27. 28. Indicatur, quomodo innoteſcat, quod definitiones tam nominales §. 23. 24. quam reales §. 29. poſſibiles ſint. Declaratur indoles axiomatum & poſtulatorum §. 30. 31. 33. & abuſus quidam notantur §. 32. Diſſeritur quoque de experientia §. 34. 35. 36. 37. Definitur theorema §. 38. & diſtincte agitur de propoſitionis partibus theſi, atque hypotheſi §. 39. 40. 41. 42. & de demonſtratione §. 43. 45. 47. ubi etiam docetur uſus citationum Mathematicis in demonſtrationibus ſolennis §. 44. Similiter declaratur problematum §. 48. corollariorum §. 49. 50. ſcholiorum §. 51. ratio. Aſſeritur methodi mathematicæ univerſalitas §. 52. & ratio redditur, cur interdum Matheſis judicium acuere debeat §. 53. interdum minus §. 54. Denique reſpondetur ad objectiones, quæ contra methodum mathematicam a nonnullis afferri ſolent §. 55. 56. 57.

DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

§. 1.

Per *Methodum Mathematicam* intelligo Ordinem, quo in tradendis dogmatis ſuis utuntur Mathematici.

§. 2. Ordiuntur autem Mathematici a definitionibus; inde ad axiomata & poſtulata, in Matheſi mixta ad experientias ſeu obſervationes, progrediuntur; his tandem theoremata & problemata ſuperſtruunt: ubique vero corollaria & ſcholia, ſi e re viſum fuerit, annectunt.

§. 3. Sunt autem *Definitiones* primæ rerum notiones, quarum ope inter se distinguuntur & unde, quæ de ipsis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. 4. Per *Notionem* quamlibet rei cujuslibet in mente repræsentationem intelligo.

§. 5. Notionum differentiam primus distincte tradidit sagacissimus *Leibnitius* (*): quæ quanti sit ponderis, pauci hactenus agnoverunt.

§. 6. Est scilicet *Notio clara*, quæ ad rem oblatam recognoscendam sufficit, e. gr. quod figura data in numero triangulorum habeatur.

§. 7. *Obscura* est *notio*, quæ ad rem oblatam recognoscendam non sufficit. Talis est e. gr. plantæ, ad cujus conspectum dubitas, utrum ea sit nec ne, quam alio tempore alibi videras & cui hoc vel illud nomen tribui suevit.

§. 8. Clara *notio distincta* habetur, si notas recensere valeas, ex quibus rem oblatam recognoscis, e. gr. quod circulus sit figura linea curva in se redeunte terminata, cujus singula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter distant.

§. 9. *Confusa* est *notio* clara, si notas, ex quibus rem oblatam recognoscis, recensere minime valeas, utut in tales sit resolubilis: qualis est e. gr. notio coloris rubri.

§. 10. Distincta *notio adæquata* dicitur, si & notarum, ex quibus componitur, notiones distinctas habueris, e. gr. notio circuli paulo ante tradita censetur adæquata, ubi curvæ in se redeuntis, puncti intermedii, distantiæ æqualis & terminationis notiones distinctas habueris.

§. 11. In hac analysi cum progredi liceat, donec ad notiones irresolubiles perveniatur; notionum adæquatarum dari gradus manifestum est, in præsenti tamen non explicandos. Sufficit monuisse, quod notiones quædam confusæ admitti queant, quarum evolutio ad demonstrationes non apprime necessaria. Ita *Euclides* non resolvit notionem æqualitatis, utut eadem notiones trianguli æquilateri, rhombi & figurarum regularium ingrediatur. Propositiones enim, ad quarum demonstrationem necessaria erat, facile ipsi sine probatione concedi poterant, e. g. Quod æqualia eidem tertio sint æqualia inter se; quod figuræ sibi mutuo congruentes sint æquales; quod æqualibus per æqualia multiplicatis facta sint æqualia &c. Defectum scilicet analyseos supplent pro-

(*) In Actis Eruditorum An. 1684. p. 537.

propositiones, quæ per experientiam satis certæ sunt.

§. 12. *Inadæquata* est *notio*, si notarum, quæ distinctam ingrediuntur, nonnisi confusas notiones habueris.

§. 13. In numerum definitionum mathematicarum non admittuntur nisi notiones distinctæ &, quantum fieri potest aut pro re nata sufficit, adæquatæ.

§. 14. Hinc in definitionibus subsequentibus non utuntur vocibus, nisi vel ex antecedentibus, vel aliunde satis intelligatur, quæ res iis subjiciantur.

§. 15. Et, si quando notione confusa contenti sumus, res, ad quam spectat, obvia sit necesse est, ut vel præsentem quandocunque libuerit percipere, vel sæpius jam olim perceptæ haud difficulter reminisci valeamus.

§. 16. Definitiones vero ad duas classes commode revocantur. Sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. 17. *Definitio nominalis* est enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis distinguendam sufficientium. Talis est quadrati, si figura quadrilatera, æquilatera, rectangula esse dicatur.

§. 18. *Definitio realis* est notio distincta rei genesin, hoc est, modum, quo fieri potest, exponens. Talis in Geometria est Circuli, si per motum lineæ rectæ circa punctum fixum describi concipitur.

§. 19. Ad definitiones nominales multis modis pervenitur: quos inter primus nominari debet, si ad rem præsentem, quam percipimus, attendimus. Hac ratione Astronomis innotuit, eclipsin Lunæ esse privationem luminis Lunæ plenæ. Cum cura vero distinguenda sunt, quæ distingui possunt, eaque fini singula primum sigillatim considerari, mox inter se conferri debent, ut definitio notio distincta evadat, qualis *vi* §. *13*. esse debet.

§. 20. Definitiones hac vel alia methodo investigatas expendentes varias plerumque determinationes animadvertimus, quibus omissis generaliores evadunt. E. gr. Si ex definitione *trianguli*, quod sit spatium tribus lineis comprehensum, linearum numerus expungatur; notionem *figuræ* habebis, quod sit spatium lineis terminatum.

§. 21. Si determinationes in definitionibus obvias consideres, alias iis geminas comminisci datur: qua ratione definitiones aliæ inveniuntur. E. gr. Ubi perpendis figuram trianguli a ternario laterum

numero

numero dependere; quaternarium aut numerum quemcunque alium ternario majorem ſubſtitue, ut definitio *figuræ quadrilateræ* aut *multilateræ* cujuscunque prodeat.

§. 22. Quemadmodum vero *vi* §. 20. determinationes quædam omitti; ſic etiam novæ ſuperaddi poſſunt. E. gr. in definitione trianguli ſpecies & ratio linearum, quam inter ſe habent, determinari poteſt. Ponamus nimirum lineas eſſe rectas; generalis notio trianguli in notionem *trianguli rectilinei* abit. Ponamus porro eſſe latera omnia inter ſe æqualia; notio trianguli generalis in notionem *trianguli æquilateri* degenerabit.

§. 23. Definitionum per methodum primam inventarum realitas extra omnem dubitationis aleam poſita. Quis enim, quæ actu exiſtere cognoſcit, utrum eſſe poſſint nec ne, dubitabit? Dubitaret enim, num perciperet, quæ ſe percipere ſibi conſcius eſt: id quod valde abſonum. E. gr. Si quis lunam deficientem intuetur; quod eclipſin pati poſſit, dubitare nequit. Idem de illis definitionibus judicium eſto, quæ a poſſibilibus abſtrahuntur.

§. 24. Alia vero definitionum per methodum tertiam & quartam inventarum eſt ratio. Utrobique enim arbitrium regnat, ſive juxta tertiam determinationes datas in alias ſimiles convertas, ſive juxta quartam datis alias ſuperaddas: noſtrum autem arbitrium nullam rebus exiſtendi neceſſitatem imponit. Licet e. gr. ſpatium tribus lineis rectis comprehendi poſſit, inde tamen nondum liquet, quod etiam quatuor, quinque aut pluribus quotcunque aliis terminari queat. Et quamvis tres lineæ rectæ ſpatium comprehendant; inde tamen nondum apparet, quod inter ſe æquales eſſe poſſint. Tales itaque definitiones poſſibiles eſſe demonſtrandum eſt: id quod Geometræ circa figuras præſtant, dum earum conſtructionem tradunt.

§. 25. Definitiones reales vel a priori inveniuntur, vel a poſteriori innoteſcunt. A priori definitiones reales inveſtigabis, ſi ex plurium poſſibilium, quæ tibi innotuerunt, combinatione novum quoddam poſſibile producis, e. gr. ex combinatione machinarum ſimplicium machinam quandam compoſitam, cujus nullam antea habebas notionem. Et in hac quidem methodo caſui perſæpe aliquid datur. Exemplo eſt compoſitio teleſcopii per fortuitam combinationem lentis convexæ cum concava detecta, narrante *Borello*.

§. 26.

§. 26. Difficilius idem præstatur, si ex data definitione nominali realis invenienda. Hoc enim in casu notiones distinctas eorum evolvere tenemur, quæ in ista continentur, ut appareat, qualia ad rei formationem requirantur; postea cognitiones jam ante acquisitas mente recolere debemus, visuri num talia succurrant, per quæ rei formationem concipere licet. E. gr. datur in Astronomia definitio nominalis eclipsis Lunæ, quod scilicet sit privatio luminis Lunæ plenæ; invenienda est definitio realis ejusdem. Lumen igitur lunare & plenilunium meditari debemus. Ubi istud a Sole secundum lineas rectas in corpus lunare incidere & tempore plenilunii ecliptici Lunam Soli diametraliter opponi, adeoque Tellurem duobus hisce corporibus interpositam in locum Soli oppositum projicere umbram succurrit; haud difficulter innotescit, eclipsin Lunæ oriri, si ea umbram terræ ingrediatur.

§. 27. A posteriori definitiones reales innotescunt, si rei formationi præsentes attendimus. E. gr. Si quis videat in campo circulum describi, fune circa clavum fixum in gyrum acto; is genesin circuli concipit per motum lineæ rectæ circa punctum fixum.

§. 28. Ad definitiones reales quoque pervenitur, dum compositum totum in suas partes simplices resolvitur, quod in organicis potissimum locum habet. Hac ratione e. gr. structuram machinæ jam extantis assequimur.

§. 29. Circa hoc definitionum genus duo consideranda sunt, antequam de illarum possibilitate judicare licet, nempe 1. utrum ea existant aut existere possint, nec ne, quæ ad genesin rei concurrere assumimus; 2. num ab iis proficisci queant, quæ in formatione rei iisdem tribuimus: id quod ex natura definitionis realis (§. 18.) liquet. Horum vero certitudinem vel experientia, vel eorum, quæ per consequentias legitimas alio tempore deduximus, reminiscentia consequimur. Ita e. gr. in definitione circuli superius (§. 27.) tradita per experientiam claret, lineam rectam circa punctum fixum in gyrum agi posse. Ast in definitione eclipsis lunaris ratione, experientia licet stipata, assequimur, Lunam Telluris umbram ingredi posse.

§. 30. Definitiones tam reales, quam nominales cum in se considerari, tum inter se conferri possunt. Quicquid ex consideratione eorum, quæ in una definitione continentur, immediate deduci-

tur, *Axioma* vocatur, si quid rei convenire, aut non convenire enunciet; *Postulatum* vero, si quid effici posse affirmet vel neget. E. gr. Ex genesi circuli liquet, omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter se æquales esse, cum unam eandemque lineam in diverso situ referant. Hæc adeo propositio in axiomatum numero habetur. Ast dum per eandem definitionem intelligitur; ex quovis puncto quovis intervallo circulum describi posse: id inter postulata collocatur.

§.31. Quoniam igitur axiomatum & postulatorum veritas per intuitum definitionum, ex quibus fluunt, cognoscitur; demonstratione nulla indigent. Vera enim esse intelliguntur, quam primum realitas definitionum fuerit evicta. Et hoc intuitu *propositiones per se notæ*, item *ex terminis manifestæ* dicuntur.

§.32. Multi hac axiomatum proprietate abutuntur, dum præmissas syllogismorum, quas probare nesciunt, pro axiomatibus venditant. Hinc videas in axiomatum numerum referri propositiones, quas sine probatione non admittunt intelligentes. Equidem negandum non est, ipsum *Euclidem*, qui in demonstrando se virum præstitit, propositiones utique demonstrabiles in axiomatum numerum retulisse, propterea quod æqualitatis, congruentiæ, lineæ rectæ aliarumque rerum notiones explicare non poterat: monuimus tamen jam in superioribus (§. 11.), ipsum non supposuisse nisi propositiones, quarum certitudo statim cuique patet per recordationem vel maxime confusam eorum, quæ olim sæpius experti sumus aut etiamnum, si ita visum fuerit, denuo extemplo experiri possumus, immo quibus in judicando tantum non quotidie utuntur omnes, quale e. gr. est, quod eidem tertio æqualia sint æqualia inter se; item quod figuræ & lineæ rectæ sibi mutuo congruentes sint æquales. *Euclidis* igitur exemplum abusum, quem taxamus, minime tuetur.

§. 33. Notandum nimirum, eo minorem fieri axiomatum numerum, quo sufficientius notiones evolvuntur. Immo si verum fateri fas est, vera axiomata non sunt nisi propositiones identicæ.

§. 34. Cum axiomatibus & postulatis etiam experientiæ nonnunquam confunduntur. *Experiri* autem dicimur, quicquid ad perceptiones nostras attenti cognoscimus, e. gr. dum accensa candela

dela conspicua fieri videmus, quæ ante non apparebant.

§. 35. Experientiæ itaque sunt rerum singularium, quoniam nonnisi res singulares percipimus. Quamobrem ad illas provocans casum singularem in medium proferre tenetur, nisi vel sensui, vel memoriæ fuerint obviæ: id quod in Mathesi exactissime observatur. Neque enim e. gr. in Astronomia Solis orientis & occidentis observationes recensentur, utpote quotidianæ ac omnibus satis notæ. Diametri vero apparentis Planetarum observationes a diversis Astronomis tempore diverso diversisque instrumentis celebratæ fideliter referuntur, cum non in cujusvis potestate existant.

§. 36. Mathematici quoque experientias a conclusionibus inde deductis accurate distinguunt, aliis ut plurimum has cum istis confundentibus. E.gr. Quod candela accensa corpora, quæ ante non apparebant, in conspectum prodeant, per experientiam innotescit. Quodsi vero perpendens, lumen in causa esse, cur tenebris discussis appareant, & una expendens rerum naturalium eodem modo se habentium eundem esse effectum, infero; quicquid lumine collustratur, videri potest: hæc propositio non in experientiarum, sed conclusionum per legitimam consequentiam inde derivatarum numerum referenda.

§. 37. Istiusmodi conclusiones omissis experientiis commemorantur, si modus, quo ex his eliciuntur, omnibus fuerit cognitus atque perspectus. E. gr. Maximam Solis declinationem non immediate metimur, sed ex data elevatione Æquatoris & altitudine meridiana Solis in solstitio invenimus. Proprias igitur de ea observationes traditurus, non altitudinem Solis meridianam in solstitio observatam annotet opus est, sed sufficere potest, ut ipsam declinationem statim indicet. Si enim constet, quantam elevationem Æquatoris assumserit; nec quanta meridiana fuerit altitudo Solis ignoratur. Quod si vero non appareat, quomodo propositio data ex prævia quadam experientia eliciatur; casus singularis omnino adducendus, ut ratio deductionis ad examen revocari possit. Quod enim aliquid perceperis, cum demonstrare nequeas; ut credatur, jure poscis: sed quomodo unum ex altero deductum fuerit, cum rationis examini subsit, ut fides deductis habeatur, sine ratione flagitas.

§. 38. Propoſitio theoretica ex pluribus definitionibus inter ſe collatis eruta *Theorema* appellatur. E. gr. Si in Geometria triangulum cum parallelogrammo ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis confertur, & partim immediate ex ipſis eorundem definitionibus, partim ex aliis ipſorum proprietatibus jam ante erutis infertur; parallelogrammum eſſe trianguli duplum: ea propoſitio in theorematum numerum referenda.

§. 39. Duo autem ſunt, quæ in omni theoremate attentionem merentur, *Propoſitio* nempe atque *Demonſtratio*. Iſta quidem enunciatur, quid rei cuidam ſub certis conditionibus convenire poſſit, quid non: in hac autem rationes exponuntur, ob quas intellectus illud ipſi convenire concipere valet.

§. 40. Abſolute poſſibile non eſt niſi ens a ſe: reliqua vero omnia tantum admiſſo alio poſſibilia eſſe intelliguntur, hoc eſt, nil eorum eſt ſine quadam conditione. Hæc igitur in propoſitione una exprimenda. E. gr. Triangulum eſt dimidium parallelogrammi, ſi baſes & altitudines fuerint ſigillatim æquales. In propoſitione itaque tam baſium, quam altitudinum æqualitas exprimenda. Hinc quælibet propoſitio in *Hypotheſin* & *Theſin* commode diſtinguitur: quarum iſta conditiones recenſet, ſub quibus aliquid affirmatur, vel negatur; hæc vero complectitur, quod vel affirmatur, vel negatur. E. gr. in propoſitione allata hypotheſis eſt, *ſi triangulum & parallelogrammum ſuper æquali baſi & ejusdem altitudinis exiſtant*; theſis autem, *illud hujus dimidium eſt*.

§. 41. Notandum vero, ſi in ipſa rei definitione conditiones, de quibus dixi, continentur, hypotheſin diſtincte non exprimi. E. gr. Si tres in triangulo anguli 180. graduum dicantur; hypotheſi carere videtur propoſitio: quæ tamen ſtatim comparet, ſi pro voce trianguli definitionem ejus ſubſtituas. Ita enim habet propoſitio: ſi quædam figura tribus lineis rectis terminatur, tres habet angulos junctim ſumtos duobus rectis æquales. En hypotheſin, quæ urget, ut tres lineæ rectæ ſpatium comprehendant.

§. 42. Datur autem in propoſitione affirmativa neceſſarius nexus inter hypotheſin atque theſin; in negativa autem nullus concipi poteſt, ſed hæc illi repugnat. Quoniam ſcilicet in ſubjecto deprehenditur, quod hypotheſis involvit; ei quoque convenire debet, quod in theſi continetur. E. gr. in hoc the-

theoremate, quod *triangulum ſit dimidium parallelogrammi ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis,* primum triangulo tribuimus baſin & altitudinem baſi ac altitudini parallelogrammi æquales; dein aſſerimus, quod ſit parallelogrammi dimidium. Poſterius concipitur propter prius.

§. 43. Nexum inter theſin & hypotheſin in propoſitionibus affirmativis; repugnantiam in negativis *demonſtratio* manifeſtat. Eorum igitur definitiones, quæ in hypotheſi ac theſi continentur, eorundemque proprietates ex iſtis derivatæ aut aliunde cognitæ demonſtrationum principia exiſtunt. Quoniam vero in Matheſi principia non admittuntur, niſi quæ ante fuerunt evicta; definitiones ac propoſitiones, quibus demonſtrationes ſuperſtruuntur, citari ſolent, partim ut appareat, genuina principia adhiberi; partim ut ignaris conſtet, unde ipſorum certitudo haurienda.

§. 44. Enimvero citationes definitionum, axiomatum, poſtulatorum, theorematum & problematum non exiguum habent uſum, nec ſine ratione in Matheſi ſingulis cogitationum generibus ſingula nomina imponuntur. Demonſtratio namque non convincit niſi principiis demonſtrandi extra dubitationis aleam poſitis. Quamobrem ex citationibus liquet, quænam tanquam vera ſupponenda ſint, antequam veritatis propoſitionis datæ convinci posſis. Et quoniam definitiones primi conceptus exiſtunt, axiomata vero ex iis immediate deducuntur, theoremata vero vel immediate, vel mediate ex iisdem derivantur; ex nomine veritatis cujuslibet, ad quam in demonſtratione provocatur, ſtatim addiſcitur, utrum multa ſupponenda ſint nec ne, & quo ordine ſit procedendum, ut convictio locum habeat. Immo cum ad veritatem definitionum, axiomatum & poſtulatorum, theorematum & problematum dijudicandam peculiaribus artificiis opus ſit; nomina veritatum citatarum ſimul methodos in memoriam revocant, quibus principia demonſtrandi perſuadeas convincendo.

§. 45. Non alia vero eſt ratio ex principiis concluſiones inferendi, quam quæ in omnibus libellis Logicis, ubi de ſyllogiſmo agitur, dudum expoſita. Sunt enim demonſtrationes Mathematicorum congeries quædam enthymematum, ita ut omnia vi Syllogiſmorum concludantur, omiſſis ſaltem præmis-

 mis-

miſſis, quæ vel ſponte meditanti occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur. Perfecta autem ut ſit demonſtratio, præmiſſæ ſyllogiſmorum novis ſyllogiſmis tamdiu probandæ ſunt, donec perveniatur ad ſyllogiſmum, in quo præmiſſæ ſunt vel definitiones, quas jam conſtat eſſe poſſibiles, vel propoſitiones aliæ identicæ.

§. 46. Equidem demonſtratu haud difficile foret, (*) genuinam demonſtrationem, quæ convictionem plenariam pariat, fieri non poſſe, niſi cogitationes noſtræ juxta regulas ſyllogiſticas dirigantur; his tamen ambagibus in præſenti opus non eſt. Cum enim de quæſtione facti diſputemus; exempla allegaſſe ſufficit. Scilicet non ignotum eſt, *Clavium* demonſtrationem propoſitionis primæ elementi primi *Euclidis* in ſyllogiſmos reſolviſſe: immo *Herlinum* atque *Daſipodium* ſex priora elementa *Euclidis* & *Heniſchium* integram Arithmeticam per ſyllogiſmos in forma exhibitos demonſtraſſe.

§. 47. Equidem non ignoro, eſſe hac noſtra præſertim ætate non paucos, qui ſibi perſuadent, demonſtrationum mathematicarum formam a legibus ſyllogiſmorum abhorrere, multo minus concedere, illas vim omnem ad convincendum ab his unice habere; ſed nec me latet, contrarium videri Viris non modo præclara judicii vi pollentibus, ſed & attentione magis ſevera utentibus: quorum autoritas me permovit, ut eam in rem penitius inquirerem & ſic præjudicium ex præcipitantia in judicando ortum cognoſcerem. Fatetur certe *Leibnitius* (**), vir in Matheſi & omni eruditione reliqua ſummus, *firmam eſſe demonſtrationem, quæ præſcriptam a Logica formam ſervat*. Similiter *Johannes Walliſius*, Mathematicus profundus, (***) agnoſcit, *id, quod in Matheſi proponitur probandum, ſyllogiſmi unius pluriumve ope deduci*. Immo ingenioſiſſimus etiam *Hugenius* (****) obſervavit, *paralogiſmos in Matheſi ſæpius vitia formæ exiſtere*. Verum enimvero ne autoritatibus magis, quam rationibus (*****) pugnare videar (quanquam in hoc argumento maximum pondus habeat tantorum virorum autoritas); fontes præjudicii vulgaris retegere libet. Quamdiu ſcilicet in Matheſi verſamur,

(*) Oſtendimus id in Logica §. 551. & ſeqq. (**) Acta Erudit. A. 1684. p. 541. conf. Eſſais de Theodicée p. 37. 40. 41. 73. (***) Operum Mathem. Vol 3. f. 180. hoc eſt Logic. lib. 3. c. 22. (****) Acta Erudit. A. 1711. p. 477. (*****) Vide eas in Logica §. 551. & ſeqq.

ſamur, figuris & characteribus in ratiocinando juvamur, ex quarum inſpectione non minus, quam ex aliarum propoſitionum citatione multæ præmiſſæ ſyllogiſmorum ſupplentur: ad quod ſi non ſatis attendatur, quam ſancte in demonſtrationibus mathematicis leges ſyllogiſmorum cuſtodiantur non apparet.

§. 48. *Problemata* facienda proponunt & tribus partibus conſtant, *Propoſitione* ſcilicet, *Reſolutione* ac *Demonſtratione*. In propoſitione, quid fieri debeat, indicatur. In reſolutione ſinguli actus ordine decenti recenſentur, quibus efficitur, quod erat faciendum. Denique in demonſtratione evincitur, factis iis, quæ reſolutio præcipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque problema demonſtrandum, in theorema convertitur, cujus hypotheſin reſolutio, theſin vero propoſitio conſtituit. Generalis enim omnium problematum demonſtrandorum (ut jam innuimus) tenor hic eſt: Factis iis, quæ reſolutio præcipit, illud quoque efficitur, quod erat faciendum. Quare non opus eſt, ut de problematibus plura dicantur.

§. 49. Rationes ſubinde non deſunt, cur ad caſus ſpeciales applicentur propoſitiones generales, & ex quibusdam propoſitiones ſæpe alias prona conſequentia deducere licet. Quæ utroque modo eruuntur propoſitiones *Corollaria* nuncupantur.

§. 50. Primum corollariorum genus demonſtratione non indiget. Quod enim in genere de omnibus in univerſum caſibus demonſtratum fuit, de hoc vel iſto in ſpecie ut denuo demonſtretur opus non eſt. E. gr. ubi de omnibus triangulis oſtenſum, tres angulos eorum una ſumtos duobus rectis æquari; idem in ſpecie de triangulis rectangulis confirmari haud debet. Aſt alterum corollariorum genus demonſtrationem requirit. Quotiescunque nimirum ex aliis propoſitionibus aliquid infertur, ratio illationis indicanda. E. gr. Si theoremati, cujus modo mentionem feci, hoc corollarium ſubjungatur; *in triangulo rectangulo unus ſaltem actu rectus eſſe poteſt*: ratio illationis non negligenda, quod ſcilicet, poſitis duobus actu rectis, tertius nihilo æqualis foret.

§. 51. In *Scholiis* denique tam definitionibus, quam propoſitionibus earumque corollariis ſubjungi ſolitis, obſcura declarantur, ad dubia reſpondetur, uſus doctrinarum indicatur, hiſtoria ac fontes inven-

inventionum deſcribuntur, &, ſi qua alia ſcitu nec injucanda, nec inutilia occurrunt, inſeruntur.

§. 52. Explicatam hactenus methodum qui probe perpendit, ejus univerſalitatem haud dubie agnoſcet nec diffitebitur, ſine ea ad ſolidam rerum cognitionem perveniri haudquaquam poſſe. Dicitur vero *Methodus mathematica*, immo ſæpius *Geometrarum methodus*, quia huc usque Mathematici fere ſoli, in Geometria inprimis, ejus leges ſancte cuſtodiverunt. Quanquam enim non defuerint, qui eandem aliis diſciplinis applicare ſtuduerunt; conatui tamen ipſorum eventus minime reſpondit. Etenim nunc notiones non ſatis evolverunt, nunc ſine probatione aſſumſerunt, quæ maxime probari debebant, nunc per ſaltum ratiocinati ſunt, inferentes nimirum, quæ nullo argumento inferri poſſunt.

§. 53. Explicatæ methodi legibus cum ex aſſe ſatisfiat in Matheſi præſertim pura, non ex vano prædicatur, quod Mathemata judicium acuant, hoc eſt, quod eorum cultores promptitudinem acquirant veritatem quamlibet, ad quam cognoſcendam animum appellunt, accuratius, quam alii ſolent, dijudicandi. Exercitio enim comparatur judicandi etiam ac ratiocinandi habitus, quale demonſtrationum mathematicarum meditatio cenſeri debet.

§. 54. Fructus igitur, quem ex ſtudio Matheſeos maximum percipere licet, participes non fiunt, quotquot praxes quasdam mathematicas aliasque parum mathematici habentes, vulgo tamen ad eandem referri ſolitas, addiſcunt. Licet enim in vita communi utiles exiſtant; neminem tamen judicii acumine ac inveniendi habitu beant, quia *per* §. *præc.* hæc non niſi a ſeria demonſtrationum meditatione expectare licet.

§. 55. Supereſt ut ad objectiones duas reſpondeam, quas contra methodum Geometrarum nonnulli afferre ſolent, præſertim cum ſatis prævideam non defuturos, qui easdem contra Elementa mea Matheſeos urgebunt. Nempe vitio vertitur Geometris, 1. *quod multa definiant, quæ definitione non habent opus, & quod multa probent, quæ probatione non indigent:* 2. *quod ordinem, quo generaliora & ſimpliciora ſpecialibus & compoſitis præponi neceſſe eſt, negligant, nec ad unum argumentum pertinentia uno loco abſolvant.*

§. 56. Objectioni primæ ut ſatis-

tisfiat, explicandum est, quando definitiones sint superfluæ & quales esse debeant propositiones, ut probatione non indigeant: id quod ex fine definitionum atque indole demonstrationum redditur manifestum. Definitiones nimirum hunc habent usum, ut vel subsequentibus aliis intelligendis inserviant, vel principia demonstrandi præbeant. Ostendant igitur adversarii, *Euclidem* aut Geometram alium ullam dedisse definitionem, qua nec ad subsequentes explicandas, nec in propositionibus demonstrandis utuntur. Quamdiu vero exempla istiusmodi in medium afferre nequeunt, Geometras reprehendere desinant, quod nimii sint in definiendo, & suum potius errorem agnoscant, quod definitionibus non alium tribuant usum, nisi qui in rebus definitis agnoscendis & ab aliis distinguendis consistit. Diximus porro superius, præmissas syllogismorum tamdiu continuandas esse, donec ad definitiones, quas jam constat esse possibiles, & propositiones identicas perveniatur. Sine ratione itaque non admittuntur nisi propositiones identicæ ac experientiæ claræ, in quibus notiones primæ fundantur. Reliquæ propositiones omnes sunt demonstrandæ. Ostendant igitur adversarii, *Euclidem* aut Geometram alium propositiones identicas & notiones in experientiis claris fundatas demonstrasse. Quamdiu vero hujusmodi exemplum nullum in medium afferre valent; Geometras reprehendere desinant, quod probent, quæ probatione non indigere ipsis videntur, & potius discant, quod in demonstrando nunquam nimis accurati esse possimus, præsertim ubi extra Mathesin versamur, nec ut ibi figuris ac characteribus in ratiocinando juvamur.

§. 57. Quoniam igitur rigor in demonstrando laudi ducitur Geometris (§. 56.); nec ordo jure taxatur, quo sine in demonstrando accurati esse nequimus. Eo nimirum ordine singula proponenda sunt, quo unum ex altero facilius infertur. Quare cum satis experiamur, id fieri minime posse, si in unum cumulum congerantur, quæ de subjecto eodem cognosci possunt; *ordo scholæ* Philosophis vulgaribus relinquendus & a Geometris aliisque, quibus res profundius meditari datum est, *ordo naturæ* retinendus.

FINIS.

ELEMENTA
ARITHMETICÆ.

PRÆFATIO.

NOn dubito fore aliquos, qui mirabuntur, quod elementa Matheseos universæ conscribens MATHESIN UNIVERSALEM prætermittam. Enimvero quam perperam nonnulli Mathesin universalem appellant, eam ego ab Arithmetica diversam non agnosco. Quantitates enim, quarum affectiones & relationes in ea considerant, pro numeris indeterminatis habeo: quæ etiam ratio est, cur non aliæ ipsarum, quam numerorum sint affectiones ac relationes. Ea igitur, quæ in Mathesi universali vulgo tractari solent, ego in Arithmetica pertracto: quo rationum potissimum doctrina spectat. Calculum tamen numerorum indeterminatorum, quem LITTERALEM appellare solent, non integrum trado, quia in demonstrationibus arithmeticis & geometricis integro opus non habeo. Plenior adeo explicatio ANALYSI reservatur. Nec rationum doctrinam ope calculi hujus solius demonstro, quia cum rigore demonstrandi, quem mihi observandum proposui, ea demonstrandi ratio non subsistit, utpote in qua multa communiter sine probatione assumuntur, quæ & a veteribus demonstrata, nec mihi sine probatione concedi posse visa sunt, ubi solidam doctrinam cordi habueris. Veram autem MATHESIN UNIVERSALEM in desideratorum numero colloco, eam nempe, quæ leges metiendi generales & ad omnium rerum quantitatem determinan-

dam menſuras convenientes præſcribit: nec repertu adeo facilem judico. Cæterum quæ commodius ope calculi litteralis eruuntur, nec ad communis Geometriæ elementa intelligenda neceſſaria ſunt; ea ad Analyſin rejeci. Tyrones ſub initium praxes arithmeticas ſolas cum definitionibus ſibi familiares reddere debent, theorematibus problematumque demonſtrationibus omiſſis. In calculo exercitati theoremata ad multa exempla numerica applicent,ut non modo eorum ſenſum clare perſpiciant, ſed eadem quoque memoriæ firmiter infigant, quo in promptu ſint, quoties iis vel ad demonſtrandum, vel ad inveniendum opus eſt. Iis intellectis problematum demonſtrationes expendere,ac his perceptis inoffenſo pede ad theorematum demonſtrationes progredi licebit. Abſit autem,ut quis arbitretur,omnibus calcandam eſſe hanc ſemitam. Quorum enim eſt major mentis acies, congenita vel aliis ſtudiis acquiſita, & facilius conſervatur attentio; illi elementa integra eo ordine perlegere poſſunt, quo conſcripta ſunt. Uſus Arithmeticæ per diſciplinas reliquas omnes ſe diffundit. Ea igitur reliquis omnibus præmittenda fuit & ante eas cum cura addiſcenda eſt. Quantus Arithmeticæ in vita civili uſus ſit, experientia loquitur: quantus in Phyſicis & aliis Philoſophiæ partibus,experientur quotquot Matheſi abſoluta ſolidam extra eam doctrinam quærere allaborabunt. Quantum denique in perficiendo intellectu poſſit,in ipſa pertractatione hinc inde annotavimus, &, ſi quis culturam convenientem ſtudio Arithmetico non negaverit, experientia optima erit Magiſtra.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT I.

De PRINCIPIIS ARITHMETICÆ.

DEFINITIO 1.

1\. A*Rithmetica* est numerorum scientia. Pars ejus *practica* est scientia computandi, hoc est, ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur; ut si fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6. & 8. junctim sumtis æqualis est.

SCHOLION.

2\. *Patet adeo, Arithmeticam practicam esse methodum inveniendi specialem. Ab ea igitur, si rite meditemur, regulas inveniendi generales abstrahere licet. Particularis enim methodus in applicatione regularum generalium consistit. Dederunt aliqua huc spectantia* Cartesius *cum in Tractatu de methodo, tum in iis, quæ de ingenii directione inter posthuma habentur, &* R. P. Malebranchius *in egregio opere de inquirenda veritate. Plura, quamvis paucis, nos damus infra (§. 125.).*

DEFINITIO 2.

3\. *Unum* est, quod ita est aliquid, ut aliud præterea idem esse nequeat. Illustris *Leibnitius* unum sic definit: Si A sit B, nec præterea D ponatur B, nisi A & D idem sint, ponetur B unum.

DEFINITIO 3.

4\. *Unitas* est abstractum, per quod dicimus unum.

DEFINITIO 4.

5\. *Unitates eædem* sunt, quæ per eandem notionem agnoscuntur: *diversæ* sunt, quæ agnoscuntur per diversas.

SCHOLION.

6\. *Ponamus e. gr. A esse globum lapideum, B similiter esse globum lapideum alium; erunt A & B unitates eædem. Sed si A fuerit globus lapideus, C plumbeus: erunt A & C unitates diversæ. Quodsi A, B & C tantum ut globos consideres, erit etiam C eadem unitas cum A & B.*

DEFINITIO 5.

7\. Si A sit unum, B sit unum, C sit unum, D sit unum &c. nec tamen B, C, D &c. sint idem cum A; erunt A, B, C, D &c. *Plura* seu *Multa.*

DEFINITIO 6.

8\. *Multitudo* est abstractum, per quod dicuntur plura.

DEFINITIO 7.

9\. Si A sit idem cum B, C & D simul sumtis, dicetur A *Totum*; B vero C & D dicentur ejus *Partes,*

tes, & intuitu partis B reliquas C & D &c. *Complementum ad Totum* vocabimus.

DEFINITIO 8.

10. Quicquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, *Numerus* dicitur.

SCHOLION 1.

11. *Nempe si pro unitate linea recta sumatur; numerus quoque exprimi potest per rectam: id quod infra in Geometria & Analysi abunde patebit.*

SCHOLION 2.

12. *Numerus autem adeo generaliter definiendus, ut sub eadem definitione numeros cum integros, tum fractos, tam rationales, quam irrationales comprehendere valeamus.*

DEFINITIO 9.

13. *Numerus determinatus* est, qui refertur ad unitatem datam, ut ternarius. *Indeterminatus* est, qui refertur ad unitatem vagam, diciturque *Quantitas*.

SCHOLION.

14. *In quantitatum numerum refertur latitudo fluvii. Quodsi quæsiveris, quanta ea sit; quantitatem concepturus unitatem quandam ad arbitrium assumit & illius ad hanc relationem quærit, ac pro diversa unitate assumta per diversum numerum determinatum latitudinem fluvii enunciat. Latitudo igitur fluvii inter quantitates collocatur, quatenus refertur ad unitatem vagam: qua determinata, per numerum determinatum distincte intelligitur.*

DEFINITIO 10.

15. *Æqualia* sunt, quorum unum alteri salva quantitate substitui potest. *Inæqualia* sunt, si pars unius alteri toti substitui potest.

COROLLARIUM 1.

16. Quoniam pars unius inæqualium alteri toti substitui potest, quod vero alteri, salva nempe quantitate, substitui potest, alteri æquale est (§. 15.); pars unius inæqualium alteri toti æqualis est.

COROLLARIUM 2.

17. Similiter cum unum inæqualium pro alterius parte substitui possit (§. 15.); erit idem alterius parti æquale.

HYPOTHESIS 1.

18. *Signum æqualitatis est* =.

SCHOLION.

19. *Hoc signo primus usus est* Hariotus, *Anglus* (a), *& hodie plerique eodem utuntur. Nonnulli cum* Cartesio *adhibent Signum sequens* ∝; *quidam etiam alia. Apud Autores* Harioto *antiquiores nullum æqualitatis signum occurrit.*

DEFINITIO 11.

20. *Majus* est, cujus pars alteri toti æqualis est: *Minus* vero, quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM.

21. Cum pars unius inæqualium A alteri toti B æqualis sit (§. 16.) & vicissim B æquale parti ipsius A (§. 17.); in

(a) In Artis Analyticæ praxi Sect. 1. f. 10.

inæqualium unum A majus, alterum B minus est (§. 20.).

HYPOTHESIS 2.

22. *Signum majoritatis est* > ; *minoritatis* < .

SCHOLION.

23. *Signis his itidem primus usus est* Hariotus (b). *Eum secuti celeberrimus* Wallisius (c) & R. P. Lamy (d). *Aliis alia placent: plerisque nulla sunt.*

DEFINITIO 12.

24. *Similia* sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ a se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ a se invicem discerni debent. Atque adeo *Similitudo* est identitas; *Dissimilitudo* diversitas eorum, per quæ res a se invicem discerni debent.

COROLLARIUM 1.

25. Nihil ergo in uno Similium deprehenditur, quod non æque deprehendatur in altero, modo sit istiusmodi ut sine alio assumto intelligi possit.

COROLLARIUM 2.

26. Cum quantitas sine alio assumto per se non intelligi, sed tantum dari possit (§. 13, 14.); Similia, salva similitudine, quantitate differre possunt (§. 25.) atque adeo quantitas est discrimen internum similium.

SCHOLION.

27. *Similitudinis notionem distinctam primus eruit* Leibnitius. *Dixit nempe* similia, quæ non possunt distingui, nisi per compræsentiam. *Quoniam vero terminus* compræsentiæ *plerisque obscurus videtur; aliam definitionem intellectu planiorem substituere libuit. Ceterum res* compræsentes *fiunt duplici modo, nimirum vel immediate unum alteri, vel utrique idem aliquod tertium applicando: id quod intellectu facilius evadet, si in exemplum aliquod aciem ingenii intendamus. Ponamus itaque duo horologia portatilia prorsus inter se similia esse. Illorum unum possideat* Grachus; *alterum* Cajus. *Quodsi* Cajus *in præsentia* Grachi *horologium suum depromat, ne is attonitus sibi persuadebit, horologium suum esse, quod* Cajus *manu tenet; at diversum a suo agnoscet, ubi & suum depromit, hoc est, horologium* Caji *a suo distinguit* Grachus *per compræsentiam, unum nempe alteri immediate applicando. Sed si locorum vel temporum intervallum inter duo ædificia similia interjectum menti una cum ipsis exhibetur; vel si dimensiones templorum aut statuarum similium ad staturam nostram aut mensuram datam aliam referimus; similia animo compræsentia sistuntur idem tertium utrique eorum applicando.*

HYPOTHESIS 3.

28. *Signum similitudinis est* ∽ .

SCHOLION.

29. *Commendatur in Miscellaneis Berolinensibus* (e). *Communiter nullo utuntur.*

(b) Loc. cit. (c) Vide Arith. c. 35. f. 156. Vol. 1. Oper. Mathem. (d) Elementis Geometriæ lib. 3. sect. 5. p. 177. edit. Par. 1710. (e) Part. 3. p. 159.

DEFINITIO 13.

30. *Pars aliquota est*, quæ aliquoties repetita integro fit æqualis. *Pars* vero *aliquanta* est, quæ repetita aliquoties semper vel major, vel minor est toto.

DEFINITIO 14.

31. *Commensurabilia* sunt, quæ partem aliquotam communem habent, vel quorum unum est pars aliquota alterius. *Incommensurabilia* sunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.

DEFINITIO 15.

32. *Quantitates homogeneæ* sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare potest, seu quarum una ab altera vel semel, vel aliquoties ablata tandem vel nihil, vel se minus relinquit. *Heterogeneæ* vero sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare nequit.

DEFINITIO 16.

33. *Numerus numerans* est, cujus unitas denotat ens in genere: *Numerus* vero *numeratus* est, cujus unitas denotat certam quandam entis speciem, vel genus quoddam determinatum.

SCHOLION.

34. E. gr. *Si quis simpliciter dicat*, sex; *is non determinat, quænam sint illa entia, quæ numerantur, adeoque utitur* numero numerante. *Contra si quis dixerit cum addito*, sex globi aurei; *is speciem entium determinat, quæ numerat, adeoque utitur* numero numerato. *Vocant nonnulli numerum numerantem* abstractum; *numeratum vero* concretum.

DEFINITIO 17.

35. *Numeri inter se homogenei* sunt, qui ad eandem; *heterogenei*, qui ad diversas unitates referuntur.

SCHOLION.

36. *Hæc divisio numerum numeratum potissimum respicit. Omnis nempe numerus determinatam quandam unitatem supponit* (§. 10.). *Determinatur ea per notionem, ad quam in numerando respicimus* (§. 5.). *E. gr. ea globi proprietas est, qua ab aliis corporibus distinguitur, quod singula puncta superficiei a centro æqualiter distent. Quodsi igitur hanc unitatis notam constituas; singula corpora, quibus eadem convenit, unitatis naturam induunt, suntque unitates eædem, quatenus sub hac notione continentur* (§. cit.). *Quodsi vero globos porro distinguas e. gr. per materiam, ex qua constant, & alios ut aureos, alios ut plumbeos spectes; quæ antea eædem erant unitates, nunc diversæ evadunt. Hinc tres globi aurei & sex globi aurei sunt numeri homogenei inter se; sed tres aurei & sex argentei sunt inter se heterogenei.*

DEFINITIO 18.

37. *Numerus integer* est, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

DEFI-

DEFINITIO 19.

38. *Numerus fractus* est, qui refertur ad unitatem tanquam pars ad totum. Dicitur is etiam *Fractio*, itemque *Minutia*.

DEFINITIO 20.

39. *Numerus rationalis* est, qui unitati commensurabilis. Vocatur etiam *effabilis*.

DEFINITIO 21.

40. *Numerus rationalis integer* est, cujus pars aliquota est unitas.

DEFINITIO 22.

41. *Numerus rationalis fractus* est, qui unitatis parti aliquotæ aut aliquot partibus aliquotis æqualis est.

DEFINITIO 23.

42, *Numerus rationalis mixtus* est, qui constat ex integro & fracto, seu ex unitate & fracto.

DEFINITIO 24.

43. *Numerus irrationalis sive surdus* est, qui unitati incommensurabilis. Vocatur etiam *ineffabilis*, item *geometricus*.

HYPOTHESIS 4.

44. *Si in numerando ad denarium pervenitur, initium numerandi repetatur, nisi quod denariorum numerus una exprimatur.*

COROLLARIUM.

45. Decem ergo nominibus opus est ad decem numeros rationales primos indigitandos & præterea aliis, quibus decadum multitudo denotetur & ita porro.

SCHOLION.

46. *Lex numerandi, quam in hypothesi tradimus, ubivis (quantum constat) gentium recepta, & cum a prima ætate eidem adsueverimus, indispensabilis necessitatis videtur. Enimvero non modo* Erhardus Weigelius *in Arithmetica Tetractyca ostendit, fieri quoque posse, ut in numerando non ultra quaternarium progrediamur; sed &* Illustris Leibnitius (f) *Arithmeticam binariam excogitavit, nonnisi duabus notis* 1 *&* 0 *utentem ac numerorum proprietatibus investigandis aptam: cujus aliquod specimen dedit* Cl. Dangicourt *circa progressiones arithmeticas* (g). *Nimirum quoniam Arithmetica Dyadica duabus tantum notis utitur, leges progressionum numerorum dyadice expressorum facillime omnium deteguntur. Et* Carolus XII, *Rex Sueciæ, calculum sexagenarium excogitavit, referente* Emanuele Suedenborgio (h), *novis characteribus & numeris novisque denominationibus adinventis. Arithmetica autem decadica, qua vulgo utimur, denario digitorum numero procul dubio originem debet; digitis enim in computando utimur,*

(f) Histoire de l'Academie Royale des Sciences An. 1703. p. m. 175. & seqq.
(g) In Miscellaneis Berolinens. p. 336. & seqq. (h) Observat. miscellan. part. 4. p. 1. & seqq.

mur, quamdiu in computo nondum satis versati.

DEFINITIO 25.

47. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, sunt: *unum, duo, tria, quatuor, quinque, sex, septem, octo, novem, decem.* Iidem numeri generali *Unitatum* nomine insigniri solent, nec opus est ut definiantur. Dicuntur etjam *Digiti.* Ex decem unitatibus componitur una *Decas.* Duæ decades dicuntur *viginti;* tres *Triginta;* quatuor *Quadraginta;* quinque *Quinquaginta;* sex *Sexaginta;* septem *Septuaginta;* octo *Octoginta;* novem *Nonaginta.* Ex decem decadibus componitur *Centenarius*; ex decem centenariis *Millenarius;* ex mille millenariis millionum *Billio;* ex mille millenariis billionum *Trillio* &c. Denarius ejusque quævis multipla dicentur *Articuli.*

SCHOLION.

48. *Vocibus millionum, billionum, trillionum &c. utimur ad confusionem in numeris magnis evitandam, quorum distinctis notionibus formandis inserviunt.*

HYPOTHESIS 5.

49. *Notæ numericæ constituantur novem sequentes:* 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. *Ut vero non solum unitates, sed & decades, centenarios, millenarios &c. indigitare possimus, valor ipsis tribuatur localis, ita ut solitariæ vel in loco dextimo positæ unitates sive digitos, in secundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. denotent. Loca vacua repleantur cyphra* 0, *quæ scilicet sit* Nullitatis *nota.*

COROLLARIUM 1.

50. Numerorum igitur partes hoc ordine se invicem excipiunt;

Unitates Decades Centenarii	Simplices.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum.
Unitates Decades Centenarii	Millionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Millionum.
Unitates Decades Centenarii	Billionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Billionum.
Unitates Decades Centenarii	Trillionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Trillionum &c.

SCHOLION 1.

51. *Characterum arithmeticorum electio arbitraria. Hinc apud varias gentes varii occurrunt; ut inter alios*

docent

docent Georgius Henischius *in libello de numeratione multiplici, vetere & recenti, atque* Guil. Beveregius *in Arithmetica chronologicæ libro primo integro. Non tamen omnes æque commodi. Seligendi adeo sunt, per quos numerus quantumvis magnus facillime exprimi & computus optime absolvi potest. Quod autem notæ nunc usitatæ reliquis præstent, has cum illis conferentes experiuntur. Dicuntur subinde cyphræ, quamvis usitatius sit, ut hoc nomen soli notæ nullitatis imponatur: quem morem nos sequimur. Ab Arabibus inventæ vulgo feruntur. Sed docuit celeberrimus* Wallisius (i), *quod* Alsepadi *Arabs in Commentario ad* Tograi *poema* Lamiat 'o l Ajam *dictum, inventionis gloriam Indis tribuat. Idem refert* (k), *quod Saraceni eas in Hispaniam attulerint, & quod ex Hispania in Galliam pervenerint studio* Gerberti, *monachi Floriacensis in Gallia, qui a variis dignitatibus ecclesiasticis tandem ad Pontificatum maximum nomine* Sylvestri II. *circa* A. C. *999. evectus, ex ipsis ejus epistolis A. 1636. Parisiis recusis probat.* Joannes Fridericus Weidlerus, *Mathematum apud Wittebergenses Professor clarissimus*, (l) *ex MSC.* Boëthii *de Geometria, quod in Bibliotheca Academiæ Altorfinæ asservatur, & in quo Noster characteres numerorum arabicis similes expressos vidit, probare nititur, eos jam* Boëthio *fuisse cognitos, quem* A. C. 524. *vitam finiisse constat.* Wallisius (m) *non ignoravit, in* Boëthii, Bedæ *aliorumque antiquiorum editionibus figuras istiusmodi comparere; sed id in vetustioribus MSC. contigisse negat. Quamobrem cum* Weidlerus *MSC. cujus autoritate nititur, seculo quarto non junius existimet; criticorum est statuere, num tanta illius antiquitas admittenda sit.*

SCHOLION 2.

52. *Ex collatione diversarum figurarum numeralium discant velim, qui artem inveniendi cordi habent, quantum momenti in eo situm sit, ut ars characteristica perficiatur.*

COROLLARIUM 2.

53. Quodsi notis numericis substituantur litteræ ad arbitrium electæ iisque idem tribuatur valor, qui illis tribui solet (§. 49.); numerum occulte scribere licet.

SCHOLION 3.

54. E. gr. *Denotent litteræ infra scriptæ in secunda serie eosdem numeros, quos designant notæ superiores supra scriptæ in prima,*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.
p. s. a. c. e. h. o. i. n. g.

erit 3748 = aoci. *Hoc artificio utuntur mercatores ad designanda mercium pretia in schedulis affixis.*

PROBLEMA 1.

55. *Numerum scriptum enunciare, hoc est, cuilibet characteri valorem competentem assignare.*

(i) Arithmet. Oper. c. 9. f. 48. Vol. I. Oper. Math. (k) in Tract. de Algebr. c. 4. f. 11. & seqq. Vol. II. Oper. Mathem. (l) in Dissertatione de characteribus numerorum vulgaribus & eorum ætatibus A. 1727. publice ventilata §. 8. & seqq. p. 17. & seqq. (m) in Tract. de Algebr. loc. cit.

RESOLUTIO.

1. Numerus propoſitus per commata dividatur in claſſes, tres notas unicuique aſſignando, initio a dextris facto.
2. Nota dextima claſſis tertiæ notetur lineola transverſa apici adſcribenda; dextima claſſis quintæ duabus; dextima ſeptimæ tribus &c.
3. Comma ſolitarium per millenarios, lineola transverſa una per milliones, duæ per billiones, tres per trilliones, &c. nota vero ſiniſtima claſſis uniuscujusque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur (§. 50.). *Sic factum eſt, quod petebatur.*

E. gr. Numerus ſequens

$2''', 125, 473'', 613, 578', 432, 597$

ita enunciatur: Duæ trilliones, centum & viginti quinque millia billionum una cum quadringentis ſeptuaginta tribus billionibus, ſexcenta & tredecim millia millionum una cum quingentis ſeptuaginta octo millionibus, quadringenta & triginta duo millia, quingenta & nonaginta ſeptem.

SCHOLION.

56. *Quantum conveniens terminorum uſus in rebus diſtincte concipiendis, ſeu ex confuſione extricandis vires intellectus humani extendat; abunde perſpicient oculatiores, ſi ad præſens problema fuerint ſatis attenti.*

HYPOTHESIS 6.

57. *Quantitates aut numeros indeterminatos litteris Alphabeti minoribus a, b, c &c. vel etiam majoribus A, B, C &c. indigitamus.*

SCHOLION.

58. *Litteris majoribus uſus eſt* Vieta (n): *minores introduxit* Hariotus (o), *quem mox imitatus eſt* Carteſius (p) & *nunc ſequuntur plerumque omnes.*

HYPOTHESIS 7.

59. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interjecta lineola ſubſcribitur. Eorum inferior, ſeu* Denominator, *indicat unitatem ſeu totum in partes diviſum; ſuperior vero, ſeu* Numerator, *numerat partes in caſu propoſito datas.* E. gr. Duæ partes tertiæ unius lineæ ita ſcribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3 indicat, lineam eſſe in tres partes æquales diviſam; numerator 2 vero duas iſtiusmodi partes aſſignat.

SCHOLION.

60. *Neque vero mirentur tyrones, quod in numeris fractis numeratori denominator ſubſcribatur, qualis in integris non occurrit. Additur enim, ut appareat, quamnam partem aliquotam cum*

(n) In variis ſcriptis Analyticis, quæ inter Opera ejus habentur. (o) in Artis Analyticæ praxi. (p) in Geometria.

cum unitate communem habeat fractus (§. 41.).

DEFINITIO 26.

61. *Additio* est inventio alicujus numeri ex duobus vel pluribus homogeneis datis, qui datis junctim sumtis æqualis est. Numeri dati dicuntur *summandi*; quæsitus autem *summa* vel *aggregatum*.

COROLLARIUM.

62. Iterata ergo ejusdem numeri additio est inventio numeri alteri cuidam aliquoties sumto æqualis & contra.

HYPOTHESIS 8.

63. *Signum additionis est* ✠, *quod per* plus *efferri solet*. Ita 3 ✠ 4 denotat Summam ex 3 atque 4, & pronunciatur: 3 plus 4.

DEFINITIO 27.

64. *Subtractio* est inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis est. Numerus, qui subducitur, dicitur *Subtrahendus*; alter, a quo subtractio fit, *Minuendus*; qui denique invenitur, *Differentia*, a nonnullis *Residuum*.

HYPOTHESIS 9.

65. *Signum subtractionis est* —, *quod* per minus *efferri solet*. E. gr. 7—3 denotat differentiam inter 3 & 7, pronunciatur: 7 minus 3.

DEFINITIO 28.

66. *Multiplicatio* est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *Factores*, item *Efficientes*; quæsitus *Factum*, item *Productum*. In specie factorum alter, qui aliquoties sumitur, vocatur *Multiplicandus*; alter vero, qui indicat, quoties ille sumatur, *Multiplicator*.

COROLLARIUM.

67. Quoniam itaque in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties sumto æqualis (§. 66.), istiusmodi autem inventio non est nisi iterata additio (§. 62.); multiplicatio est iterata ejusdem numeri additio.

HYPOTHESIS 10.

68. *Signum multiplicationis est punctum unicum* (.) *inter factores duos medio loco positum, quod per* multiplicatum *effertur*. E. gr. 4.3. denotat factum ex 4 in 3; item 7.5.9, factum, cujus factores sunt 7, 5 & 9. *Litteræ sine ullo signo junguntur*. E. gr. *ab* denotat factum ex *a* in *b*; *b c d* factum, cujus factores *b*, *c* & *d*.

DEFINITIO 29.

69. *Divisio* est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas, quoties datorum unus in altero. Numerus

merus, qui dividi debet, *dividendus;* alter, per quem fit divisio, *divisor;* qui denique indicat, quoties divisor in dividendo contineatur, *Quotus* dicitur.

SCHOLION.

70. *In multiplicatione & divisione opus non est, ut numeri dati sint homogenei, quemadmodum in additione & subtractione requirebatur (§. 59. 62.). Cum enim in additione ex duobus vel pluribus numeris componatur unus tanquam ex partibus totum (§. 59. 9); omnes omnino summandi ad eandem unitatem referri (§. 10.), consequenter homogenei inter se esse debent (§. 35.). Quoniam vero porro liquet, summam, quæ fit ex numeris aggregandis, ad eandem cum ipsis unitatem referri, consequenter iisdem homogeneam esse (§. cit.); in subtractione vero numerus minuendus respondet summæ, subtrahendus & residuus aggregandis seu summandis (§. 59. 62.): ulterius patet, in subtractione etiam minuendum, subtrahendum & residuum numeros inter se homogeneos esse debere. In multiplicatione contra multiplicator ad unitatem exprimit rationem, quam habet factum ad multiplicandum, sicut in divisione divisor ad unitatem rationem dividendi ad quotum, adeoque opus non est, ut multiplicator multiplicando & facto, divisor dividendo & quoto sit homogeneus. Quodsi divisor consideretur tanquam pars dividendi, ex dictis constat, divisorem esse dividendo homogeneum: sed tum quotus, qui indicat, quoties pars ista ex suo toto auferri potest, nec dividendo, nec divisori homogeneus. Singula suo loco clarius patebunt.*

HYPOTHESIS II.

71. *Signum divisionis sunt duo puncta* (:), *quæ per divisum efferri solent.* E.gr. 8:4 denotat quotum ex divisione 8 per 4 emergentem. Similiter $a : b$ est quotus ex divisione a per b prodiens.

DEFINITIO 30.

72. *Numerus par* est, qui bifariam sive per 2 dividi potest, ut 4, 12, 16.

DEFINITIO 31.

73. *Numerus impar* est, qui a pari unitate differt, ut 3 differt unitate a 2, item a 4.

DEFINITIO 32.

74. Numerus A *metiri* vel juxta alios *numerare* dicitur numerum B, si eum ita dividit, ut quotus sit numerus integer sine fractione, vel si fuerit pars ejus aliquota. Ita 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO 33.

75. *Numerus primus in se* est, quem sola unitas metitur, vel numerat, ut 5, 7, 11.

DEFINITIO 34.

76. *Numerus compositus* est, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2, item 2 metitur 8 per 4.

DEFI-

DEFINITIO 35.

77. *Mensura numeri* est numerus, qui ipsum metitur. Ita 2 & 4 sunt mensuræ numeri 8. *Mensura maxima numeri* est numerus maximus, qui ipsum metitur. Ita 4 est mensura maxima numeri 8.

DEFINITIO 36.

78. *Mensura communis duorum pluriumve numerorum* est numerus, qui singulos sigillatim metitur. Ita 3 est communis mensura numerorum 12 & 24. *Maxima* dicitur, si fuerit numerus maximus, qui omnes metitur. Ita 12 est communis mensura maxima numerorum 12 & 24, 3 vero numerorum 9 & 12.

DEFINITIO 37.

79, *Numeri primi inter se* sunt, qui nullam communem mensuram habent, præter unitatem. Ita 12 & 19 sunt numeri primi inter se.

DEFINITIO 38.

80. *Numeri compositi inter se* sunt, qui præter unitatem communem mensuram aliam habent. Ita 12 & 15 sunt compositi inter se.

AXIOMA 1.

81. *Idem est æquale sibimetipsi.*

SCHOLION.

82. *Hujus axiomatis amplissimus est in Analysi usus.*

AXIOMA 2.

83. *Quantitates homogeneæ aut æquales sunt, aut inæquales* (§. 15.).

THEOREMA 1.

84. *Totum est majus qualibet sua parte.*

DEMONSTRATIO.

Cujus pars alteri toti æqualis est, id ipsum altero majus est (§. 20.). Sed quælibet pars totius parti totius, hoc est, sibi ipsi æqualis est (§. 81.). Ergo totum qualibet sua parte majus est.

SCHOLION.

85. *En exemplum Analyseos perfectæ! Continetur enim demonstratio syllogismo, cujus altera præmissa est definitio, altera vero propositio identica. Id vero Analyseos perfectæ indicium est* (§. 45. de Meth.) *Ne tyrones Logicæ, qui propositiones oblique universales ignorant, nec regulæ Logicorum de tribus syllogismi terminis vim atque efficaciam percipiunt, circa formam argumentandi hæreant, ad lineas demonstrationem applicare libet.* Sit itaque linea AB totum, linea AC ejus pars; demonstrandum erit, lineam AB esse majorem linea AC : id quod fit sequentem in modum. Cujus lineæ pars alteri lineæ toti æqualis est, illa linea altera major est (§. 20.). Sed lineæ AB pars (nempe AC) alteri lineæ AC toti (nempe sibimet ipsi) æqualis est. Ergo linea AB linea AC major (nempe totum AB parte AC majus) est. Q. e. d. *Fig. 4.*

THEOREMA 2.

86. *Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis.*

DEMONSTRATIO.

Cum idem sit æquale sibimet ipsi (§. 81.); quod idem est cum partibus totius simul sumtis, id iisdem æquale est. Sed totum idem est cum omnibus partibus suis simul sumtis (§. 9.): ergo iisdem æquale est. *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

87. *Quæ æqualia sunt eidem tertio, vel æqualibus æqualia; ea sunt æqualia inter se.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit A = C & B = C; dico esse A = B. Quoniam enim B = C *per hypoth.* B salva quantitate substitui potest ipsi C (§. 15.). Substituatur adeo B ipsi C in casu priore, ubi A = C: habebimus A = B *Quod erat primum.*

2. Si jam porro sit A = B & præterea C = A, D = B; dico esse C = D. Quoniam enim A = B & C = A *per hypoth.* erit B = C *per cas. 1.* Quare cum porro sit D = B *per hypoth.* erit quoque C = D *per cas. 1.* *Quod erat alterum.*

THEOREMA 4.

88. *Si æqualibus (A & B) æqualia (C & D) addas, aggregata (A + C & B + D) sunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

A + C = A + C (§. 81.). Sed quoniam C = D, *per hypoth.* poterit D substitui pro C (§. 15): quo facto, habemus A + C = A + D. Porro B + D = B + D (§. 81.). Sed A = B, *per hypoth.* Ergo A substitui potest pro B (§. 15): quo facto, habemus B + D = A + D. Quare B + D = A + C (§. 87). *Q. e. d.*

THEOREMA 5.

89. *Quod uno æqualium majus vel minus est, etiam altero æqualium majus vel minus est.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit A = B & C > A, dico esse C > B. Quoniam enim C > A, *per hypoth.* A parti ipsius C æquale est (§. 20), quæ dicatur P. Porro cum sit A = B. *per hypoth.* Erit etiam P = B (§. 87). Ergo C > B (§. 20). *quod erat unum.*

2. Sit A = B, & C < A, dico esse C < B. Quia C < A, *per hypoth.* parti hujus æquale est (§. 20), cujus complementum ad totum dicatur P. Cum adeo sit P + C = A (§. 86) & A = B, *per hypoth.* erit quoque P + C = B (§. 87). Est itaque C parti ipsius B æqualis (§. 9); consequenter C < B (§. 20). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 6.

90. *Si majori (B) & minori (A) idem (C) vel æqualia addas, aggregatum prius (B+C) majus est, posterius vero (A+C) minus. Quodsi majori (B) majus (C) & minori (A) minus (D) addas, aggregatum prius (B+C) majus est; posterius (A+D) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A < B, *per hypoth.* parti hujus æquale est (§.20). Componitur ergo B ex A & parte alia (§.9), quæ dicatur P, estque adeo B = P+A (§.86). Quare cum etiam sit B+C=P+A+C (§.88.); erit A+C pars ipsius P+A+C (§.9) & hinc P+A+C > A+C (§.84), consequenter B+C > A+C (§.89.) *Quod erat unum.*

Quoniam B > A *per hypoth.* erit B+C > A+C, *per demonstrata.* Similiter quia C > D *per hypoth.*, erit A+C > A+D *per demonstrata.* Ergo cum A+D sit pars ipsius A+C (§. 20.); erit multo magis B+C > A+D (§.84). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 7.

91. *Si æqualia (A & B) ab æqualibus (C & D) subtrahas, quæ relinquuntur (C−A & D−B) æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

C−A = C−A (§.81). Sed quoniam A = B *per hypoth.* salva quantitate B pro A substitui potest (§.15). Quodsi ergo substituatur, habemus C−A = C−B. Similiter D−B = D−B (§. 81). Sed quia C = D, *per hypoth.* salva quantitate C pro D substitui potest (§. 15). Quodsi ergo substituatur, habebimus D−B = C−B. Quamobrem C−A = D−B (§.87).

THEOREMA 8.

92. *Si a majore (A) & minore (B) idem (C) vel æqualia subtrahas; residuum prius (A−C) majus est; posterius (B−C) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quia B < A, parti hujus æquale est (§.20). Componitur ergo A ex B & parte alia (§. 9), quæ dicatur P. Itaque A = B+P. (§. 86), consequenter A−C = P + B−C (§. 91.). Sed B−C est pars ipsius P+B−C (§. 9), consequenter P+B−C > B−C (§.84). Ergo & A−C > B−C (§. 89.). *Q. e. d.*

THEOREMA. 9.

93. *Si æqualia (A & B) per æqualia (m & n) multiplices; facta (m A & n B) æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quia A = B *per hypoth.* erit

etiam A + A = B + B, seu in genere A + A + A + A &c. B + B + B + B &c. (88.). Jam cum multiplicatio sit iterata ejusdem numeri additio (§. 65), si m & n fuerint multiplicatores, erit A + A + A + A &c. = m A (§. 64. 66). & B + B + B + B = n B (§. §. *cit.*) Quare cum in eo casu, ubi A + A + A + A &c. = B + B + B + B &c. sit m = n; erit etiam m A = n B (§. 87.). *Q. e. d.*

THEOREMA 10.

94. *Si æqualia (A & B) per æqualia (C & D) dividas, quoti (A : C & B : D) æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

A : C = A : C (§. 81.). Sed quia A = B, *per hypoth.* salva quantitate B pro A substitui potest (§. 15). & sic A : C = B : C. Ob eandem rationem B : D = B : C. Quare A : C = B : D (§. 87.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

95. *Non dubito fore multos, quibus ridiculum videbitur aut minimum superfluum talia demonstrari, quorum casus singulares in numeris præsertim rationalibus per se evidentes videntur. Ego vero has demonstrationes maxime facio, tum quia prima & secunda* (id *quod supra §. 85. annotavimus*) Analyseos perfectæ; *tum quia reliquæ* calculi universalis *ideam animo ingenerant, in talium substitutione consistentis, quæ relationes datas non mutant. Illa cavetur, ne laxius in demonstrando versemur (id quod hactenus fecerunt plerique omnes, qui extra Mathesin demonstrationes mathematicæ certitudinis dare conati sunt :) hic, si tandem in apricum produceretur, maximum foret intellectus* humani *subsidium.*

CAPUT II.

De SPECIEBUS ARITHMETICÆ IN NUMERIS INTEGRIS.

PROBLEMA 2.

96. *Numeros quotcunque datos addere.*

RESOLUTIO.

1. Numeri homogenei sub homogeneis, hoc est, ita scribantur, ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c. respondeant.
2. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.

3. Si-

3. Sigillatim addantur unitates & summa earum ipsis subscribatur.
4. Quodsi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadum vero summa sub decadibus collocanda.
5. Hac operatione per reliquas numerorum datorum series continuata, habebitur summa quæsita.

E. gr. Si numeri A, B, C addendi; ita procedendum: 4 & 3 sunt 7, additis 8, prodeunt 15. Collocentur 5 sub unitatibus, & 1 decas connumeretur decadibus datis. Itaque 1 (*sc. decas*) & 6 (*decades*) sunt 7 (*decades*): additis 2, prodeunt 9; additis porro 7, habentur 16 (*decades*). Collocentur 6 sub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc est, 1 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaque 1 & 5 (*centenarii*) 6 &, additis adhuc 5, prodeunt 11 (*centenarii*). Collocetur 1 sub centenariis datis, & 10 centenarii reliqui, hoc est, 1 millenarius addatur 3 *millenariis* datis, summaque 4 sub iis scribatur. Ita prodit summa quæsita 4165.

3578	A
524	B
63	C
4165	

DEMONSTRATIO.

Cum unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum sint partes eorundem (§. 50); idem sunt cum omnibus numeris datis simul sumtis (§. 9). Liquet vero ex operatione, numerum inventum compositum esse ex omnibus unitatibus, decadibus, centenariis, millenariis &c. numerorum datorum. Compositus ergo est ex omnibus numeris datis simul sumtis, consequenter ipsis æqualis (§. 86), adeoque summa eorundem est (§. 64.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

97. Unitates numerorum singula tamdiu per digitos repræsentantur & eorum ope additio absolvitur, donec memoriæ infigatur, quinam numerus prodeat, si unitates quotlibet cuicunque numero addas, e. gr. quod 3 + 2 = 5, 9 + 5 = 14 &c. Hoc modo talia natura docet.

COROLLARIUM 1.

98. Quoniam seriei sinisteriori tot unitates accedunt, quot decades ex summatione in proxime dexteriore emergunt (§. 96); additio minore tædio absolvetur, si ex qualibet numerorum serie tot decades deleantur, quot ex iis colligi possunt, residuum infra lineam scribatur, & numerus decadum abjectarum seriei proxime sinisteriori connumeretur.

E. gr. Si numeri addendi fuerint A, B, C, ita procedendum: cum 7 & 3 sint 10; residuus numerus 5 scribatur infra lineam & 1 connumeretur decadibus. Dic itaque 6 & 4 sunt 10; 2 & 1 sunt 3. Scribe 3 infra lineam & 1 repone in locum centenariorum. Quoniam vero 7 & 2 sunt 9,

8763	A
5247	B
2125	C
16135	

porro 9 & 1 ſunt 10; adde 1 ſeriei millenariorum & reſiduum 1 ſcribe in loco centenariorum. Dic itaque 8 & 2 ſunt 10 millenarii ſeu 1 decas millenariorum, 5 & 1 vero ſunt 6. Scribe 6 in loco millenariorum & 1 in loco decadum millenariorum.

SCHOLION 2.

99. *Modus hic addendi eſt maxime naturalis (§. 49): nec abſimili artificio numeri heterogenei adduntur. Ex ſerie nimirum ſpeciei minoris toties colligitur valor ſpeciei proxime majoris, quoties fieri poteſt & pro unoquoque unitas reponitur in ſerie proxime majore. E. gr. ſint expenſæ:*

Januarii	45 thal.	16 groſs.	9 num.
Februarii	60	12	3
Martii	72	13	6
Aprilis	180	19	9
Maji	55	15	6
erit ſumma	415	5	9

Cum enim 12 nummi conficiant groſſum, in ſerie nummorum additis 6 & 6, itemque 3 & 9 valor groſſi bis colligitur & relinquuntur 9. Scribuntur itaque 9 infra lineam in loco nummorum & 2 adduntur ſeriei groſſorum. Similiter quoniam thalerus 24 groſſis conſtat, in ſerie groſſorum ut ante valor thaleri ter colligitur, relictis 5. Quare denuo 5 in loco groſſorum reponuntur & 3 thaleris connumerantur. Reliqua ut in corollario aut problemate peraguntur.

COROLLARIUM 2.

100. Si omnes numeri dati unitatum inſtar conſiderentur, evidens eſt inter ſummandum tot novenarios omitti, quot unitates ex ſumma ſeriei dexterioris in ſiniſteriorem transferuntur. Sic in exemplo problematis loco *quindecim* ſub unitatibus ſcribimus 5, ſub decadibus 1, quorum numerorum inſtar unitatum conſideratorum ſumma eſt 6. Unus itaque novenarius omittitur, cum ex loco unitatum in locum decadum una rejicitur decas. Similiter ſi ſumma unitatum *viginti ſeptem*; ſub unitatibus collocamus 7, ſub decadibus 2. Duo igitur novenarii omittuntur, cum 2 decades ex loco monadum in locum decadum rejiciuntur. Hinc ſolvitur

PROBLEMA 3.

101. *Examinare additionem, hoc eſt, explorare, utrum numerus inventus ſit æqualis omnibus datis ſimul ſumtis, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Notentur a latere numeri, qui inter addendum ex ſerie qualibet dexteriore in proxime ſiniſteriorem rejiciuntur, & operatione abſoluta addantur, ut numerus novenariorum inter ſummandum omiſſorum innoteſcat (§. 100).
2. Abjiciatur præterea ex ſumma inventa novenarius, quoties fieri poteſt, abjectorumque novenariorum numerus addatur numero inter ſummandum omiſſorum: quæ ſumma una cum numero reſiduo, ſi quis fuerit, probe notetur.
3. Tandem ex numeris ſummandis,

dis, qui omnes tanquam unitates spectantur, novenarius abjiciatur, quoties fieri potest, & numerus novenariorum abjectorum una cum numero residuo, si quis fuerit, denuo notetur.

Quodsi enim uterque fuerit æqualis utrique ante reperto; numerus inventus æquatur omnibus datis simul sumtis (§. 91), consequenter additio rite peracta (§. 61). *Q. e. i. & d.*

E. gr. in exemplo problematis inter summandum 3 novenarii omittuntur & ex summa reperta unus adhuc deleri potest: quo facto, relinquuntur 7. Sed si ex numeris summandis 4 novenarii abjiciantur, 7 similiter relinquuntur. Quare additio rite peracta.

SCHOLION.

102. *Discrimen inter demonstrationem & examen haud obscurum est. Illa evincit, per regulas præscriptas inveniri debere numerum quæsitum; hoc docet, regulas ad casum singularem rite fuisse applicatas. Unde apparet examinis utilitas, frustra obnitente* Ramo (*), *qui demonstrationem cum examine confundit. Vulgo præcipiunt, ut tam ex summa, quam aggregandis, notis singulis instar digitorum consideratis, abjiciatur novenarius, & ex residui identitate operationis bonitatem colligunt. Sed cum examen tum fallere possit, quando error novenarium vel ejus multiplum adæquat; ideo aliquantisper idem immutavi, ut hunc quoque excluderet errorem. Ceterum non inutilia sunt examina, etsi non omnes errores detegant, modo iisdem sese non subducant, qui frequentius admittuntur.*

PROBLEMA 4.

103. *Numerum minorem e majore subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Numerus minor ea lege majori subscribatur, ut homogenei homogeneis respondeant, quemadmodum in additione præcepimus (§. 96).
2. Sub numeris hisce ducatur linea recta.
3. Subtrahantur sigillatim unitates ab unitatibus, decades a decadibus, centenarii a centenariis &c. & residua singula loco conveniente infra lineam scribantur, nempe residuum unitatum sub unitatibus, decadum sub decadibus &c.
4. Quod si nota major e minore veniat subtrahenda, ex sinisteriore loco in dexteriorem transferatur unitas, quæ (§. 50) hic 10 valebit, ut subtractio fieri queat. Numerus vero unitate mulctatus puncto notetur, ne

(*) In Schol, Mathem, lib. 4. p. 114.

ne ipsum mulctatum esse obliviscamur.

5. Si in loco sinisteriore cyphram reperiri contingat, unitas a numero proxime sequente mutuetur, puncto propterea notando, ut ipsum unitate minutum esse constet. Unitas vero illa in locum dexteriorem translata decadis valorem tuebitur (§. 50). Quamobrem ubi plures cyphræ sese insequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutentur, & numerus minor, a quo subtractio fieri debet, decade augeatur.

Juxta has regulas numerum quemcunque ex alio quocunque majore subtrahere licet.

E. gr. Si ex 98.0.0.4.0.34.59
subtrahas 474386526 3

Differentia est 505653819 6

Demtis enim 3 ex 9, relinquuntur 6 unitates infra lineam scribendæ. Decades 6 ex 5 auferri nequeunt: a centenariis itaque 4 auferatur unus & ejus loco decem decades decadibus jungantur. Ablatis itaque 6 ex iis, remanent 9 decades infra lineam loco convenienter ponendæ. Centenarii 2 ex 3 subducti relinquunt 1. Millenarii 5 ex 3 auferri nequeunt: a centenariis itaque millenariorum 4 auferatur unus, qui in locum vacuum delatus cyphram in decem decades millenariorum vertet. Inde si 1 decadem in locum millenariorum transferas, habebis hic 13 millenarios, ibi 9 decades millenariorum. Subductis jam 5 ex 13, residui fiunt millenarii 8. Demtis porro 6 millenariorum decadibus ex 9, relinquuntur 3. Jam si 8 ex 3 subtrahere debes, ab 8 sinisterioribus mutuetur unitas, cujus beneficio duæ cyphræ in 9 & 3 in 13 degenerabunt, ut tandem subtractio facillime absolvatur.

DEMONSTRATIO.

Numerus inventus prodit, si unitates, decades, centenarios &c. numeri minoris ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris subducas, *vi operationis*, hoc est, si singulas partes numeri minoris a singulis partibus majoris subtrahas (§. 50). Sed singulæ partes numeri minoris simul sumtæ sunt numero minori, & partes singulæ majoris simul sumtæ sunt majori æquales (§. 86). Ergo idem relinqui debet numerus, si totum numerum minorem e toto majore subtrahas (§. 91). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

104. *Si numeri heterogenei fuerint a se invicem subtrahendi; unitas mutuo petita non 10, sed tot unitates valet, quot unitates speciei minoris constituunt valorem unitatis speciei majoris.*

E. gr.	45. thal.	16. gr.	6. num.
	27	23	9
	17 thal.	16 gr.	9 num.

Nimi-

Nimirum cum nummi ex 6 ſubtrahi nequeant, ex 16 groſſis unus convertitur in 12 nummos, ut loco 6 habeantur 18. Subductis adeo 9 nummis ex 18, relinquuntur 9. Similiter cum 23 groſſi ex reſiduis 15 auferri nequeant; ex 45 thaleris unus ablatus in 24 groſſos convertitur: unde ſi ſubtrahantur 23, reſiduus eſt 1 groſſus 15 addendus, ut reſidui loco ponantur 16 groſſi. Denique 27 thaleri a 44 ablati relinquunt 17.

SCHOLION 2.

105. *Quodſi numerus major e minore ſubtrahi jubeatur, evidens eſt id fieri non poſſe. Subtrahitur itaque minor e majore, & defectus notatur ſigno —. E. gr. Si quis 8 thaleros ſolvere debet, atque 3 nonniſi poſſidet: tribus ſolutis 5 adhuc debet, qui per — 5 indigitantur.*

PROBLEMA 5.

106. *Examinare ſubtractionem.*

RESOLUTIO.

Reſiduo addatur ſubtrahendus (§.96). Quodſi enim ſumma fuerit æqualis minuendo; ſubtractio rite peracta (§64).

E. gr. 9800403459 Minuendus.
4743865263 Subtrahend.
――――――――
5056538196 Differentia
――――――――
9800403459

ALITER.

Quoniam in ſubtractione reſiduum cum ſubtrahendo æquatur minuendo (§.64). Si minuendus ſumatur pro aggregato, reſiduum cum ſubtrahendo pro aggregandis (§.61); examen per novenarium ſuccedet ut in additione (§.101).

PROBLEMA 6.

107. *Examinare additionem per ſubtractionem.*

1. Deſcribantur in continua ſerie multipla Septenarii centenario inferiora, nempe 7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. continua Septenarii additione invenienda. Eſt enim 7+7=14, 14+7=21 &c.
2. In exemplo ad examinandum propoſito, veluti

 566
 8259
 526
 2687
 ――――
 3425
 10946

 ſumantur in aggregato binæ notæ ſiniſtimæ 10 & cum multiplis ſeptenarii conferantur.
3. Multiplum proxime inferius, aut ipſe ſeptenarius, veluti in noſtro caſu, ab iſtis notis ſubtrahatur & reſiduum 3 iisdem ſuperſcribatur.
4. Juncta huic reſiduo 3 nota proxime ſequente 9, numerus inde reſultans 39 conferatur ut ante cum ſeptenarii multiplis &, proxime minori 35

inde ſubducto, reſiduum 4 ſupra ſcribatur.

5. Hæc operatio continuetur, donec reſiduum ultimum 5 ſuper nota dextima obtineatur.

6. Singulæ aggregandorum ſeries 2687 & 8259 eodem modo tractentur.

7. Reſidua ſuper notis dextimis 6 & 6 addantur & a ſumma 12 ſeptenarius vel ejus multiplum proxime inferius abjiciatur.

Quodſi reſiduum fuerit idem cum reſiduo ſuper nota dextima aggregati, velut in noſtro exemplo 5; operatio rite peracta.

DEMONSTRATIO.

Ad operationem attento manifeſtum eſt, tum ex aggregato, tum ex aggregandis abjici omnia multipla ſeptupli, e.gr. in noſtro caſu millenariorum, centenariorum, decadum, unitatum. Jam cum aggregatum ſit aggregandis æquale (§. 61), omnia quoque iſta multipla junctim ſumta utrobique æqualia eſſe debent (§. 86.87). Cum adeo ab æqualibus æqualia auferantur; reſidua omnino æqualia ſint neceſſe eſt (§.91). Quare ſi contingat, inæqualia reſidua fieri; id indicio erit, ſi examen rite inſtitutum, errorem in operatione admiſſum fuiſſe. *q. e. d.*

ALITER.

1. Colligantur ſigillatim in unam ſummam ſingulæ ſeries verticales, quibus conſtant numeri ſummandi, initio facto a ſiniſtra & progrediendo verſus dextram, & quidem deſcendendo (§.96).

2. Summæ partiales ſubtrahantur a notis ſummæ, quæ ſingulis ſeriebus reſpondent (§.103).

Quodſi in loco dextimo, qui eſt unitatum, relinquatur cyphra, additio rite peracta.

E. gr. Sit exemplum additionis

```
  ABCD
  3579
  8462
  5376
 ------
 17417
  1210
```

Collectis in unam ſummam notis in ſerie A, 16 ſubducatur ex 17 & reſidua 1 ſcribatur ſub 7. Similiter ſumma notarum in ſerie B 12 auferatur ex 14, reſiduo 2 ſub 4 ſcripto. Summa notarum in ſerie C 20 tollatur ex 21 & reſidua 1 ponatur ſub 1. Denique ſi ſumma ſeriei D 17 ex 17 ſubtrahatur, relinquitur 0: quod indicio eſt, numerum 17417 eſſe ſummam quæſitam.

DEMONSTRATIO.

Ex operatione patet, a millenariis ſummæ ſubtrahi omnes millenarios ſummandorum & a centenariis, decadibus, unitatibus ſummæ omnes centenarios, decades, uni-

unitates ſummandorum. Quodſi ergo operatione abſoluta nihil relinquitur, ſumma tot præciſe millenarios, centenarios, decades, unitates continet, quot numeri ſummandi ſimul ſumti continent, atque adeo ſumma numeris ſummandis ſimul ſumtis æqualis eſt (§. 87), conſequenter additio rite peracta (§.61).

SCHOLION.

108. *Examen primum adhuc procedere, ſi loco ſeptenarii numerus alius ſumatur ipſa demonſtratio inſinuat. Solent etiam examinis loco additionem iterare, ſed diverſa ratione, ita ut una vice aſcendendo, altera vero deſcendendo ſummatio perſiciatur, facto tamen in utraque operatione initio a dextra & progrediendo verſus ſiniſtram.*

PROBLEMA 7.

109. *Abacum Pythagoricum, hoc eſt, Tabulam conſtruere, in qua facta ex ſingulis digitis in ſingulos repræſentantur.*

RESOLUTIO.

1. Latera quadrati alicujus ſingula in 9 partes æquales dividantur & per lineas ipſi parallelas in areolas quadratas area ejus reſolvatur.
2. In ſerie horizontali ſumma & laterali ſiniſtima ſcribantur novem notæ numericæ, ſeu ſinguli digiti.
3. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 ſcribatur infra 2. Addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 collocetur ſub 4. Addantur 2 & 6, aggregatum 8 ponatur ſub 6; & ita porro.
4. Quodſi hæc additio per reliquos digitos eadem lege continuetur, Abacus Pythagoricus conſtruetur. *Q. e. f.*

ABACUS PYTHAGORICUS.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

SCHOLION.

110. *Abacum Pythagoricum memoriæ mandare tenetur multiplicationem ac diviſionem expedite abſoluturus. Quamdiu vero memoriæ infixus non eſt, ad manus eſſe debet, quoties multiplicas aut dividis.*

PROBLEMA 8.

111. *Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicator ſcribatur ſub multiplicando, ut in additione (§. 96).
2. Ducatur ſub iis linea recta.

3. Infra hanc ex abaco Pythagorico scribantur singula producta ex singulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris, similiter ex illis in reliquas hujus notas, ea quidem lege, ut decades cujuslibet producti annumerentur producto proxime sinisteriori, & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenariorum &c. scribere incipiamus.

4. Producta partialia addantur (§. 96). Dico aggregatum esse factum quæsitum.

38476
35
192380
115428
1346660

E. gr. Sint factores 38476 & 35. Multiplicatore sub multiplicando scripto, duc 5 in 6, cumque factum vi abaci Pythagorici sit 30, scribe o sub 5 & 3 decades annumera facto ex 5 in 7, quod est 35. Additis itaque 3 ad 35, prodeunt 38. Pone 8 juxta o versus sinistram & facto ex 5 in 4, nempe 20, adde 3, ut prodeant 23 (scilicet centenarii). Scribe itaque 3 in loco centenariorum & 2 millenarios annumera facto 40 ex 5 in 8, ut habeatur summa 42 millenariorum. Scribe 2 in loco millenariorum; 4 vero decades millenariorum adde facto 15 ex 5 in 3, & summam 19 in loco conveniente repone. Ita habetur factum ex multiplicando in dexteram multiplicantis notam. Quodsi eadem ratione quæratur factum ex multiplicando in sinistram multiplicatoris notam 30 & producta partialia addantur; prodibit tandem factum ex 35 in 38476, nempe 1346660.

DEMONSTRATIO.

Vi operationis & Abaci Pythagorici primus numerus intra lineas scriptus singulas multiplicandi notas, hoc est, singulas ejusdem partes (§. 50), adeoque multiplicandum ipsum (§. 9), toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus secundus intra lineas scriptus multiplicandum toties contineat, quoties nota secunda multiplicantis unitatem &c. Sed cum numeri intra lineas scripti adduntur, summa iisdem æqualis est (§. 61), adeoque multiplicandum toties continet, quoties singulæ multiplicatoris notæ, hoc est, partes (§. 50), consequenter totus multiplicator (§. 9) unitatem continet. Est igitur factum ex multiplicando in multiplicantem (§. 66). *Q. e. d.*

SCHOLION.

112. *Si factoribus* cyphræ *adhæreant, producto invento eædem adjunguntur, ut ex sequentibus exemplis manifestum.*

3578.

3578	4760
30	2000
107340	9520000

PROBLEMA 9.

113. *Lamellas Neperianas parare, quarum ope multiplicationem ac divisionem facilius absolvere licet, quam per abacum Pythagoricum.*

RESOLUTIO.

1. Ex orichalco, ligno aut charta compacta parentur lamellæ oblongæ in novem quadratula divisæ, quæ per Diagonales denuo in duo triangula singula resolvantur. *Fig. 1.*
2. In illis quadratulis ea lege scribatur tabula Pythagorica, ut notæ solitariæ aut dextræ triangulum dextrum, notæ autem sinistræ sinistrum cedat. *Sic factum est, quod petebatur.*

SCHOLION.

114. *Has lamellas sub initium seculi superioris invenit* Johannes Neperus, *Baro Merchistonii, Scotus, & peculiari libello descripsit, cui* Rhabdologiæ *nomen imposuit.*

PROBLEMA. 10.

115. *Multiplicare numerum datum per datum alium lamellarum Neperianarum ope.*

RESOLUTIO.

1, Lamellas ita dispone, ut in fronte exhibeant multiplicandum.
2. Eis ad sinistram junge lamellam unitatum.
3. In hac quære dextimam multiplicatoris notam &
4. Ipsi respondentes numeros in quadratulis reliquarum lamellarum ita exscribe, ut in unam summam colligantur numeri in eodem rhombo obvii.
5. Eodem modo exscribe numeros reliquis multiplicatoris notis respondentes & decenter infra factores (§. 111) scribe.
6. Tandem ut ante (§. 111) facta hæc partialia in unam summam collige. *Sic f. e. q. p.*

E. gr. Sit multiplicandus 5978, multiplicator 937; ex triangulo dextimo, quod dextimæ multiplicatoris notæ 7 respondet, exscribe 6 & pone infra lineam. Mox in rhombo versus sinistram proxime sequente 9 & 5 adde & summæ 14 notam dextram scribe juxta 6, sed 1 connumera 3 & 4 in rhombo ulteriore obviis. Aggregatum 8 junge jam inventis 46. Similiter in rhombo ultimo adde 6 & 5. Summæ 11 notam dextram 1 pone, ut ante, infra lineam; sinistram vero itidem 1 adde notæ 3 in sinistro triangulo deprehensæ. Summam 4 si 1846 a sinistris jungas; habebis factum ex 7 in 5978. Eodem modo reperies facta ex 5978 in reliquas multiplicatoris notas 3 & 9. *Fig. 2.*

5978
937
41846
17934
53802
5601386

PROBLEMA II.

116. *Numerum quemlibet per alium quemcunque sine abaci Pythagorici subsidio multiplicare.*

RESOLUTIO.

Omne artificium huc redit, ut ex simplo, duplo & decuplo per additionem, subtractionem & mediationem, singula multipla inveniantur. Nimirum numerus quilibet sibimetipsi additus producit sui *duplum*. Addatur huic simplum, summa est numeri dati *triplum*. Duplum addatur sibimetipsi, aggregatum est numeri dati *quadruplum*. Medietur decuplum, hoc est, ipse numerus datus cyphra auctus (§. 112), prodibit *quintuplum*. Quintuplo addatur simplum vel duplum, habebitur *sextuplum* vel *septuplum*. Ex decuplo subtrahatur duplum vel simplum, residuum erit *octuplum* vel *noncuplum*. Sine abaci itaque Pythagorici subsidio multiplicaturo familiaris sit sequens a *Jobo Ludolffo*, in Academia Erfordiensi nuper Mathematum Professore, in Arithmeticam primum introducta

NOMENCLATURA.

1. Simplum.	1. *Simplum.*
2. Duplum.	1+1 *Simplum & simplum.*
3. Triplum.	2+1 *Duplum & simplum.*
4. Quadruplum.	2+2 *Dupli duplum.*
5. Quintuplum.	$\frac{10}{2}$ *Decupli dimidium.*
6. Sextuplum.	$\frac{10}{2}$+1 *Decupli dimidium & simplum.*
7. Septuplum.	$\frac{10}{2}$ + 2 *Decupli dimidium & duplum.*
8. Octuplum.	10—2 *Decuplum sine duplo.*
9. Noncuplum.	10—1 *Decuplum sine simplo.*

E. gr. 3) 3894
7788
11682

4) 3894
7788
15576

5) 3894
19470

6) 3894
19470
23364

7) 3894
19470
7788
27258

8) 389.4.
7788
31152

9) 389.4.
35046

Si multiplicator ex pluribus notis constet, infra lineam scribatur ejus duplum & decupli dimidium, ut beneficio *Nomenclaturæ* exinde multipla multiplicandi erui possint, quæ desiderantur. Sub ducta

ctâ igitur altera linea ſcribantur more conſueto (§.111) multiplicandi multipla.

```
 37896A
 (6874)
————————
 75792B
189480C
————————
151584D
265272E
303168F
227376G
————————
260497104
```

E. gr. Sit multiplicans 6874, multiplicandus A 37896. Infra lineam ſcribatur B ipſius A duplum & porro C decupli ipſius A dimidium. Reperies ergo 1. D ipſius A quadruplum ſumendo duplum ipſius B; 2. E ſeptuplum ipſius A addendo B & C; 3. F octuplum ipſius A vel addendo C, B & A, vel B ſubducendo a decuplo ipſius A, hoc eſt ex A cyphra aucto; 4. denique G addendo C & A.

Si multiplicator ex pluribus notis conſtet, ſæpius ex productis jam inventis per additionem vel ſubtractionem inveniri poſſunt, quæ adhuc deſiderantur, nec tum *Nomenclaturæ* propoſitæ ſtricte inhærendum, ita ut non opus ſit infra lineam demum ſcribi duplum multiplicandi & decupli ejusdem dimidium.

```
743)   895765482
     ——————————————
       1791530964
      3583061928
     6270358374
   ————————————————
   665553753126
```

E. gr. ſit multiplicans 743. Factum facillime invenietur, ſi multiplicando ſubſcribatur (1) duplum, (2) dupli duplum, (3) ſumma ex ſimplo, duplo & dupli duplo, & tria hæc multipla multiplicando addantur.

Similiter ſi multiplicans fuerit 789, ſub multiplicando ſcribitur decuplum ſine ſimplo, quod eſt noncuplum. Ex eo ſi denuo auferatur ſimplum, relinquetur octuplum.

```
789) 89.57.6.5.482
    ———————————————
     8.0.6.1889.3.38
     7.1.66.1.238.56
     6270358374
 ————————————————————
  706758965298
```

Quodſi & ab hoc ſimplum ſubducas, reſiduum erit ſeptuplum.

PROBLEMA 12.

117. *Numerum datum per alium minorem dividere.*

RESOLUTIO.

Caſus I. Si diviſor unica fuerit nota,

1. Scribatur is ſub nota dividendi ſiniſtima, aut, ſi ea minor fuerit, ſub proxime ſequente, ac ope *Abaci Pythagorici* inveſtigetur, quoties in nota vel notis ſuprascriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dexteram verſus poſt lunulam loco quoti.
2. Quotus ducatur in diviſorem & productum ex nota vel notis ſupraſcriptis dividendi ſubtrahatur, & his deletis, ſi quod fuerit reſiduum, ſupraſcribatur.
3. Diviſor ad notam ſubſequentem verſus dexteram promoveatur,

&ope

& ope *Abaci Pythagorici* denuo inveſtigetur, quoties is in notis ſupraſcriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.

4. Quodſi hæc operatio per ſingulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. *Q. e. f.*

E. gr. Sit dividendus 7856, diviſor 3. Ponantur 3 ſub 7 & per *abacum Pythagoricum* innoteſcit, 3 in 7 bis contineri. Scribantur ergo 2 poſt lunulam loco quoti & factum ex 2 in 3, hoc eſt 6, ſubtrahatur ex 7 lineola transverſa delendis, reſidua unitas ſupraſcribatur. Promoveatur diviſor 3 ſub 8, cumque vi *abaci Pythagorici* 3 in 18 ſexies contineatur, ſcribantur 6 loco quoti & factum 18 ex 3 in 6 ex 18 ſubducatur: quo in caſu nihil relinquitur. Quodſi eadem ratione pergatur, quotus tandem integer prodit 2618 & binarius 2 remanet: id quod indicio eſt, numerum propoſitum in tres partes æquales exacte dividi non poſſe.

1 22
7856 ($2618\frac{2}{3}$
3333

DEMONSTRATIO.

Ex ipſa operatione liquet, numerum inventum indicare, quoties diviſor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc eſt, in ſingulis ejus partibus (§. 50), adeoque in toto dividendo (§. 9) contineatur, conſequenter unitatem toties continet, quoties dividendus diviſorem. Eſt igitur quotus (§. 69). *Q. e. d.*

Caſus II. Si diviſor ex notis pluribus conſtet,

1. Siniſtima ejus nota ſcribatur ſub nota ſiniſtima dividendi & reliquæ dexteriores ſub proxime ſequentibus verſus dexteram.
2. Ope *abaci Pythagorici* inveſtigetur, quoties prima diviſoris nota in prima dividendi contineatur.
3. Numerus inventus ducatur in diviſorem integrum & diſpiciatur, utrum factum ex numeris ſupraſcriptis ſubtrahi poſſit, nec ne.
4. Si ſubtractio fieri queat, ſcribatur is loco quoti poſt lunulam & ſubtractio actu peragatur. Numeri, ex quibus ſubtractio fit, lineola transverſa deleantur, & qui reſidui fuerint, ſupraſcribantur. Quodſi vero ſubtractio non ſuccedat, loco quoti ſumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum ex eo in diviſorem ad notas dividendi quam proxime accedat & ex iis auferri queat.
5. Diviſor loco uno verſus dexteram promoveatur & reliqua ut ante peragantur.
6. Hæc operatio continuetur, donec

nec diviſor ulterius promoveri nequeat. *Sic f. e. q. p.*

E. gr. Sit dividendus 7856, diviſor 32.

```
  1
  21
  147
 7856 ( 245 16/32
 3222
  33
```

Scribantur 32 ſub 78 & inquiratur, quoties 3 in 7 contineantur. Cum itaque bis in eo contineantur; ducantur 2 in 32 &, quia factum 64 ex 78 ſubtrahi poteſt, 2 ſcribantur poſt lunulam &, ſubtractione peracta reſiduisque 14 ſupraſcriptis, diviſor loco uno promoveatur. Quo facto inveſtigetur, quoties 3 in 14 contineantur & factum ex 4 in 32, hoc eſt 128, ſubducatur ex 145, reſiduo 17 ſupraſcripto & 4 in loco quoti poſt lunulam repoſitis. Promoveatur diviſor denuo loco uno & quæratur, quoties 3 in 17 contineantur. Numerus 5, qui hoc indicat, jungatur quoto jam invento, & factum ex eo in diviſorem 32, nempe 160 ſubtrahatur ex 176, reſiduo 16 ut ante ſupraſcripto. Dico numerum inventum $245\frac{16}{32}$ eſſe quotum quæſitum.

Si diviſor ex pluribus præſertim conſtet notis, præſtat multipla quoti ſubtrahenda ſub notis dividendi, ex quibus ſubtractio fieri debet, immediate ſcribi & ſub ſubtrahendo reſiduum, cui continuandæ diviſionis gratia jungitur nota dividendi ſequens, donec nulla ſuperfuerit, adeoque diviſio abſoluta.

E. gr. Sit dividendus 385797, diviſor 8672, quem tibi ſub loco quoti notabis.

```
385797 ( 44
34688    8672
------
 38917
 34688
------
  4219
```

Jam cum 8 in 38 quater contineatur, ſcribe diviſoris 8672 quadruplum ſub notis dividendi 38579, & reſiduum 3891 ſub eodem, juncta eidem nota ſequente 7, ut diviſio continuari poſſit. Quoniam itaque diviſor in notis 38917 denuo 4 continetur, quadruplum diviſoris ut ante ſub iisdem ponitur & ex ipſis aufertur. Erit $44\frac{4219}{8672}$ quotus.

DEMONSTRATIO.

Eadem fere eſt demonſtratio, quæ in caſu primo, hoc unice notato, quod, cum ex *abaco Pythagorico* conſtare nequeat, quoties diviſor integer in notis dividendi ſupraſcriptis contineatur, interea ſupponatur, toties illum in his contineri, quoties ſiniſtima diviſoris nota continetur in ſiniſtima aut duabus ſiniſtimis dividendi notis. Licet enim hæc ſuppoſitio ſubinde fallat, in errorem tamen inducere nequit, quia examen mox inſtituitur, cum factum ex diviſore in quotum juxta eam inventum cum dividendo comparatur, & pſeudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

SCHOLION.

118. *Equidem hæc methodus tædiosa videtur, quod raro verus quotus prima statim vice per eam eliciatur. Enimvero experientia comprobatur, examen, quod instituendum, cogitationum celeritati parere in exercitatis.*

PROBLMA 13.

119. *Divisionem per lamellas Neperianas absolvere.*

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita dispone, ut in fronte referant divisorem.

2. Eis ad sinistram junge lamellam unitatum.

3. Sub divisore descende, donec occurrant notæ dividendi, in quibus quoties contineatur, disquiritur, aut numerus ipsis proxime minor ex dividendo subtrahendus.

4. Numerus in lamella unitatum respondens scribatur loco quoti.

5. Quodsi eadem ratione partes quoti reliquas investiges, divisio tota absolvetur.

E. G. Sit dividendus 5601386, divisor
Fig. 3. 5978. Quoniam quæritur, quoties in 56013 contineantur 5978; sub diviso-

```
5601386(937
53802..
-------
2.21.18.
17934.
-------
 41846
 41846
-------
 00000
```

re descendendo in infima serie reperitur numerus 53802, quam proxime ad 56013 accedens, quorum ille ex hoc subtrahitur & in lamella unitatum respondens 9 loco quoti scribitur. Residuo 2211 jungitur nota dividendi sequens 8, cumque ut ante per lamellas reperiatur huic convenire quam proxime numerus 17934, ipsi in lamella unitatum respondens 3 scribatur loco quoti, & subtractio ut ante peragatur. Eodem modo pars tertia quoti 7 reperitur.

PROBLEMA 14.

120. *Sine abaci Pythagorici subsidio numerum datum dividere per alium datum.*

RESOLUTIO.

1. Dividendo ad dexteram more consueto jungatur lunula & infra locum quoti ducatur linea recta.

2. Infra hanc lineam scribatur divisor, ejus duplum & decupli dimidium sive quintuplum: quibus numeris a dextris 1. 2 & 5 adscribi oportet. Inde nimirum quodcunque divisoris multiplum (§. 116) elicitur.

3. Tot dividendi notæ, quot divisor habuerit, comparentur

cum

cum illius multiplis modo inventis: ita enim quotus innoteſcet.

4. Is more ſolito poſt lunulam ſcribatur, ipſi vero reſpondens multiplum diviſoris ſub notis dividendi, quas modo diximus, atque ex his ſubducatur.

5. Reſiduo adjungatur nota dividendi proxime ſequens: reliqua ut ante peragantur.

Quodſi hæc operatio continuetur, ſine *abaci Pythagorici* ſubſidio quotus eruetur. *Q. e. f.*

E. gr. Sit dividendus 385724615, diviſor 175. Scribantur numeri dati cum diviſoris multiplis, ut hic factum eſſe apparet. Cum multiplis diviſoris compara 385 & quoniam illius duplum 350 quam proxime convenit, ſcribe 2 loco quoti & 350 ſubduc ex 385. Reſiduo 35 junge notam dividendi proxime ſequentem 7 & 357 denuo compara cum diviſoris multiplis. Quoniam vero denuo duplum 350 quam proxime accedit,

```
385724615(2204140
350
———
 357
 350
———
  724
  700
———
   2.46
   175
———
    711
    700
———
    115
```

175	1
350	2
875	5

idem ex 357 ſubtrahe & quoti loco rurſus ſcribe 2. Reſiduo 7 junge notam ſubſequentem 2. Quia dividendus 72 eſt diviſore 175 minor, quotus erit 0. Junge numero 72 notam dividendi 4, & cum 724 inter duplum 350 atque quintuplum 875 cadant, ipſisque dupli duplum, hoc eſt quadruplum diviſoris 700 quam proxime conveniat, quotus erit hoc in caſu 4. Quodſi hac ratione operationem continuare libuerit, reperietur quotus integer 2204140 & reſiduum erit 115.

SCHOLION.

121. *Hac dividendi methodus & meditandi difficultatem & errandi facilitatem tollit, cui obnoxia eſt altera in problemate undecimo expoſita. Quamvis igitur eam ſerio commendem, nolim tamen ut abacus Pythagoricus prorſus rejiciatur, quoniam ſubinde caſus occurrunt, in quibus eodem minus commode caremus. Fractionum reductio ad minores terminos inter alia aſſertum noſtrum confirmabit.*

PROBLEMA 15.

122. *Examinare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multiplicans; aut factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus, ſi multiplicatio rite fuerit peracta.

38476) 1346660 (35
 115428
 ————
 192380
 192380
 ————
 000000

E. gr. Si multiplicandus 38476, multiplicator 35; factum est 1346660 (§. 111). Si vero 1346660 per 38476 dividas, quotus est 35.

ALITER.

1. Abjiciatur ex multiplicando 857 novenarius, quoties fieri potest.
2. Residuum 2 ducatur in multiplicatorem 4, si novenario minor fuerit, & ex facto, ubi novenarium superaverit, abjiciatur itidem novenarius, quoties fieri potest, noteturque residuum.
3. Ex facto 3428 exterminetur etiam novenarius, quoties datur.

Quodsi residuum 8 idem fuerit cum facto anteriore, aut ejus residuo; operatio rite peracta.

4. Si multiplicator fuerit novenario major, residuum in multiplicando ducatur non in ipsum multiplicatorem, sed in id, quod abjectis novenariis relinquitur.

E. gr. Si multiplicandus 857, multiplicator 65; factum erit 55705. Abjectis novenariis, in facto relinquitur 4, in multiplicando 2, in multiplicatore itidem 2; quorum residuorum factum cum sit 4, id indicio est multiplicationem rite fuisse peractam.

 857
 65
 ————
 4285
 5142
 ————
 55705

DEMONSTRATIO.

Cum multiplicatio sit itera ejusdem numeri additio (§. 67), & factum quidem summæ, multiplicandus toties iteratus, quot multiplicator unitates habet, numeris aggregandis respondeat (§. 61. 66); ex facto & multiplicando iterato abjiciendus est novenarius, quoties fieri potest (§. 101). Quoniam itaque novenario ex multiplicando abjecto, quoties datur, residuum toties relinquitur, quot multiplicator unitates habet; evidens est, istud in multiplicatorem duci atque ex facto novenarium denuo exterminari debere, quoties licet, ut habeatur residuum numeris aggregandis respondens. *Quod erat unum.*

Quoniam vero perinde est, sive residuum in multiplicatorem, sive multiplicator in residuum ducatur, quemadmodum inferius (§. 207) independenter ab his demonstrabitur, per primum patet, etiam ex multiplicatore, si novenario major fuerit, novenarium toties exterminari debere, quoties fieri potest, & residuum hoc ducendum esse in residuum ex multiplicando, ut habeatur residuum numeris aggregandis respondens. *Quod erat alterum.*

SCHO-

SCHOLION.

123. *Demonstratio majorem evidentiam nanciscitur, ubi ad exemplum applicatur: id quod etiam de quacunque alia intelligendum.*

PROBLEMA. 16.

124. *Examinare divisionem.*

RESOLUTIO.

1. Quotus ducatur in divisorem, aut divisor in quotum.
2. Facto addatur, si quod a divisione fuerit residuum.

Quodsi hac ratione prodeat dividendus, divisio legitime peracta. (§. 112).

245 32 ——— 490 735 ——— 7840 16 ——— 7856	E. gr. Si 7856 dividas per 32, quotus est 245, residuum 16 Duc 245 in 32 & facto 7840 adde 16; habebis dividendum 7856. Constat igitur divisionem legitime fuisse peractam.

ALITER.

Cum vi examinis prioris dividendus sit factum ex divisore in quotum; examen quoque instituetur, abjiciendo ex dividendo, itidemque ex divisore & quoto novenarium, quoties datur, atque residuum in divisore multiplicando per residuum in quoto & facto, quod inde emergit, addendo residuum ex divisione.

E. gr. In exemplo antecedente exterminato in dividendo 7856 novenario, relinquitur 8. Idem si tentetur in divisore 32 & quoto 245; ibi 5, hic 2 residuum erit. Quodsi ulterius facto 10 ex 5 in 2 addatur residuum ex divisione 16, & ex aggregato 26 tentetur more communi abjectio novenarii; habebitur ut in dividendo residuum 8.

SCHOLION GENERALE.

125. *Superest ut videamus, juxta quasnam regulas intellectus in hactenus expositis operationibus arithmeticis dirigatur. Meditaturi regulas duplicis generis offendemus, quarum aliæ imaginationem, aliæ intellectum purum dirigunt. Priores in numerorum scriptione, linearum ac lunulæ ductu, notarum in divisione a subtractione peracta deletione &c. continentur. Scriptio numerorum varias suppeditat regulas, quibus vires imaginationis extenduntur. Numeros enim quosvis, quantumvis magnos & una varios, menti præsentes exhibet, quamdiu libuerit, qui alias disparent, cum vix eam subierint: quo ipso cogitationes a meditationibus alienæ arcentur, domesticæ autem quantolibet temporis intervallo in nota qualibet numerorum datorum defiguntur. Hinc discimus:*

1. Intellectum uti debere in meditando subsidiis imaginationis, objecto meditationis convenientibus, ex ejus adeo indole in dato quolibet casu particulari derivandis.
2. Quæ intellectus meditatur, ea, quantum fieri potest, imaginationi præsentia sistenda esse: quod observasse in tyronibus quoque instituendis plu-

plurimum prodest, cum ad disciplinas animum appellentes operationibus intellectus puri parum sint adsueti, operationes vero imaginationis a primis (quod Græci ajunt) unguiculis familiarisſimæ ipſis existant.

Ipsa vero hæc numerorum scriptio præstat, ut intellectus tum singula sigillatim meditari, tum singula cum singulis, prout commodum visum fuerit, conferre possit. Vide inprimis cor. 1. probl. 2. (§. 98.), probl. 4. (§. 103), probl. 11. (§. 116), & probl. 14. (§. 120). Utrumque difficultates partim ex rerum meditandarum serie nimis longa enasci solitas, partim ordini, quo cogitationes promoventur, parum convenienti debitas tollit. Unde liquet

3. Ad minuendam in meditando difficultatem singula distincte imaginationi repræsentanda esse, ita ut objectum meditationis repræsentetur secundum omnes relationes datas & tota totius repræsentatio ex partialibus singularum relationum componatur. Hanc regulam in *Arte characteristica* perficienda magni momenti esse, inferius in Analysi patebit. Eadem secundæ juncta tyronum institutioni egregia suppeditat adjumenta. Inservit etiam confusæ cognitioni eorum, quæ sigillatim distincte cognita fuerunt: cujus usum demonstrationes Geometricæ inferius concipiendæ loquentur.

Linearum & lunulæ ductus, notarum deletio, punctum notis unitate mulctatis adjectum impediunt, ne eadem pro diversis aut diversa pro iisdem habentes in errorem incidamus: quo ipso docemur

4. Quæ sunt eadem in intellectu, ut eadem repræsentari debere imaginationi; quæ vero diversa sunt in intellectu, ut diversa quoque repræsentanda esse. Sunt eadem in intellectu, quæ sub notione communi continentur. Hæc vero regula errori potissimum discavet.

Progrediendum nunc ad alterum regularum genus, quibus intellectus purus juvatur. Numeri dati distinguuntur in varias classes, nempe in unitates, decades, centenarios &c. & in hisce classibus singuli numeri singulis characteribus discernuntur. Satisfit igitur huic regulæ generali:

1. Quæstio proposita in tot partes resolvenda, quot res diversæ naturæ in eadem involvuntur.

Additio & subtractio in singulis numerorum classibus sigillatim peragitur: nec minus in multiplicatione ac divisione facta & quoti particularia quæruntur, ut inde componatur numerus quæsitus. Discimus adeo

2. Singula, quæ in quæstione proposita involvuntur, esse sigillatim expendenda, &, quæ inde deducta sunt, inter se conferenda.

In operationibus arithmeticis vel ad notiones numerorum respicimus, vel eorum proprietates e. gr. ex abaco Pythagorico in memoriam nobis revocamus. Unde patet:

3. Dum singula in se considerantur, vel notiones eorundem evolvendas, vel proprietates & relationes ad alias alio tem-

tempore cognitas in memoriam revocandas esse.

Si divisor ex pluribus notis constet, ad facilitandum laborem assumitur, integrum divisorem in omnibus dividendi notis suprascriptis toties contineri, quoties nota divisoris prima in nota dividendi continetur. Sed cum hypothesis fallere queat, utrum quotus inventus sit verus nec ne, probatur. In his vero continetur regula generalis hujusmodi:

4. Si datorum numerus de re eadem sit ingens, e. gr. si in Astronomia multa admodum phænomena motus siderum dentur, qualis esse debeat rei natura, e. gr. structura systematis mundani, ut quibusdam phænomenis satisfiat, primo investigandum; dein ulterius disquirendum, utrum phænomenis quoque reliquis satisfiat nec ne. Ita si contingat, nos in hypothesin falsam incidere, eam facilius emendare, quam ex simultanea omnium consideratione prima statim vice veram elicere licebit. Hæc regula in scientia naturali multum habet usum non minus in inveniendo, quam in aliorum hypothesibus dijudicandis.

Licet abunde constet per demonstrationes, regularum, quibus utimur, ope numerum quæsitum inveniri; examina tamen non negliguntur, quibus convincimur nos in regularum applicatione non aberrasse. Docemur ergo

5. Consultum esse, ut dispiciamus, an veritates a priori deductæ experientiæ respondeant.

Plura non addimus, cum hæc speciminis tantum loco in medium proferantur.

CAPUT III.

De RATIONE AC PROPORTIONE QUANTITATUM.

DEFINITIO 39.

126. *Ratio* est ea homogeneorum relatio, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, sine tertio homogeneo assumto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini Rationis* & in specie *antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *consequens* vero, ad quem alter refertur,

SCHOLION. 1.

127. Euclides *rationem definit per* habitudinem magnitudinum ejusdem generis secundum quantitatem. *Sed hæc definitio incompleta: dantur enim & aliæ magnitudinum relationes, quæ sunt constantes, nec tamen in rationum numero con-*

continentur. Talis est sinus recti ad sinum complementi in Trigonometria. Completam reddidit vir summus Leibnitius. *Equidem &* Hobbesius *definitionis Euclideæ correctionem tentavit* (q); *sed infeliciter. Cum enim rationem definiat per* magnitudinis ad magnitudinem relationem; *definitio ejus non modo id vitii habet, quod Euclidea, quod scilicet relationis speciem non determinet; verum etiam in eo peccat, quod speciem magnitudinum non exprimat, quæ rationem inter se habere possunt.*

SCHOLION. 2.

128. *Ceterum hic de ratione quantitatum in genere, non tantum de ratione numerorum agimus, quia hæc doctrina non modo ad commensurabilia, sed etiam ad incommensurabilia, hoc est, ad quantitatum quodvis genus applicari debet.*

COROLLARIUM 1.

129. Cum in fractionibus relatio numeratoris ad denominatorem sine tertio homogeneo assumto intelligatur (§. 59); erit ea ratio.

COROLLARIUM 2.

130. Si duæ quantitates inter se comparantur sine tertia homogenea assumta, aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur (§. 83). Ratio itaque vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM 3.

131. Si termini rationis fuerint inæquales, vel minor refertur ad majorem, vel major ad minorem (§. 21); minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major vero ad minorem tanquam totum ad partem (§. 20): Ratio itaque determinat, quoties minus in majore contineatur, vel quoties majus minus contineat, hoc est, quantæ majoris parti minus æquetur: id quod divisio prodit (§. 69).

COROLLARIUM 4.

132. Ceterum quia ratio per se intelligibilis (§. 126), iis discernendis inservire potest, quæ compræsentia non sunt (§. 27).

DEFINITIO 40.

133. *Ratio majoris inæqualitatis* est, quam habet majus ad minus, e. gr. 6 ad 3. *Ratio* vero minoris *inæqualitatis* est, quam habet minus ad majus, e. gr. 3 ad 6.

DEFINITIO 41.

134. *Ratio rationalis* dicitur, quæ est ut unitas vel numerus rationalis ad numerum rationalem, e. gr. ut 3 ad 4. *Irrationalis* vocatur, quæ numeris rationalibus exprimi nequit.

SCHOLION.

135. *Sint duæ quantitates A & B, sitque A < B. Si A ex B toties subtrahas, quoties fieri poterit, e. gr. quinquies, relinquetur vel nihil, vel aliquid. In priori ergo casu A erit ad B ut 1 ad 5, hoc est, A in B quinquies continetur, seu* $A = \frac{1}{5} B$. *Ratio ergo est rationalis. In casu posteriori aut dabitur pars aliqua, quæ aliquoties ex A, e. gr. ter, itidemque ex B, e. gr. septies subducta nihil relinquit; aut nulla dabitur istiusmodi pars. Si*

(q) in Tractatu de principiis & ratiocinatione Geometrarum c. 11, p. 22.

Si prius: erit A ad B ut 3 ad 7, seu A $=\frac{3}{7}$ B, *adeoque ratio denuo rationalis. Si posterius: ratio ipsius A ad B numeris exprimi nequit rationalibus, hoc est, dici nequit, quanta pars ipsius B sit A. Suo autem loco ostendetur, quomodo pars illa aliquota communis inveniri possit, nec minus demonstrabitur, dari quantitates, quæ rationem irrationalem habent. Hinc simul lumen affunditur definitioni rationis, dum ostendimus, quomodo ex comparatione duorum homogeneorum sine tertio homogeneo assumto ratio intelligi possit. Nimirum aut minus majoris, aut pars, quæ utrique inest, utriusque mensura constituitur, vel, quod perinde est, minus aut prædicta pars pro unitate assumitur & in casu priore majus, in posteriore majus & minus per numeros exprimuntur: quos in ratione irrationali irrationales esse suo loco constabit.*

DEFINITIO 42.

136. *Exponentem rationis* dico Quotum, qui ex divisione antecedentis per consequentem emergit. E. gr. rationis 3 ad 2 exponens est $1\frac{1}{2}$; sed rationis 2 ad 3 est $\frac{2}{3}$. Vocatur is etiam *Denominator*, nec non *Nomen rationis.*

SCHOLION.

137. *In Geometria demonstrabitur, quod exponens rationis datæ exprimi possit linea, licet in numeris vel rationalibus, vel irrationalibus eundem exhibere non valeamus.*

COROLLARIUM 1.

138. Si consequens est unitas, antecedens ipse est exponens rationis, e. gr. rationis 4 ad 1 exponens est 4.

COROLLARIUM 2.

139. Numerus ergo quilibet integer exprimit rationem multi ad unum, seu multitudinis ad unitatem.

COROLLARIUM 3.

140. Exponens rationis est ad unitatem ut antecedens ad consequentem (§. 69).

COROLLARIUM 4.

141. Rationes per exponentes discernuntur (§. 131. 136) atque adeo, si antecedens A, consequens B, ratio ipsius A ad B commode exprimitur per A : B (§. 71).

DEFINITIO 43.

142. Si terminus minor est pars aliquota majoris, *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex*; *ratio* vero minoris inæqualitatis *submultiplex*. Speciatim in casu primo *dupla*, si exponens 2; *tripla*, si 3 &c. in altero *subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; *subtripla*, si $\frac{1}{3}$ &c. E. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam, continet enim senarius binarium ter; contra 2 ad 6 est in ratione subtripla, continet enim binarius tertiam senarii partem.

DEFINITIO 44.

143. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partem ipsius aliquotam; *ratio* majoris inæqualitatis dicitur *superparticu-*

ticularis, *ratio* minoris inæqualitatis *subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo vocatur *sesquialtera*, si exponens $1\frac{1}{2}$; *sesquitertia*, si $1\frac{1}{3}$ &c. in altero *subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{3}$; *subsesquitertia*, si $\frac{3}{4}$ &c. E. gr. 3 ad 2 est in ratione sesquialtera; 2 ad 3 in subsesquialtera.

DEFINITIO 45.

144. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partes ipsius aliquot aliquotas; *ratio* majoris inæqualitatis vocatur *superpartiens*; *ratio* minoris inæqualitatis *subsuperpartiens*. Speciatim in casu priore dicitur *superbipartiens tertias*, si exponens $1\frac{2}{3}$; *supertripartiens quartas*, si $1\frac{3}{4}$; *superquadripartiens septimas*, si $1\frac{4}{7}$ &c. in posteriore *subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{5}$; *subsupertripartiens quartas*, si $\frac{4}{7}$; *subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{11}$ &c. E. gr. 5 ad 3 est ratio superbipartiens tertias; sed 3 ad 5 ratio subsuperbipartiens tertias.

DEFINITIO 46.

145. Si terminus major minorem aliquoties continet & insuper partem ipsius aliquotam; *ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex superparticularis*; ratio minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo dicitur *dupla sesquialtera*, si exponens $2\frac{1}{2}$; *tripla sesquiquarta*, si $3\frac{1}{4}$ &c. in altero *subdupla subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{5}$; *subtripla subsesquiquarta*, si $\frac{4}{13}$ &c. E. gr. 16 ad 5 habet rationem triplam sesquiquintam; 4 ad 9 rationem subduplam subsesquiquartam.

DEFINITIO 47.

146. Denique si terminus major minorem aliquoties continet ac insuper aliquot partes ipsius aliquotas, *ratio* majoris inæqualitatis dicitur *multiplex superpartiens*; ratio minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperpartiens*. Speciatim in casu primo vocatur *dupla superbipartiens tertias*, si exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla superquadripartiens septimas*, si $3\frac{4}{7}$ &c. in altero *subdupla subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{8}$; *subtripla subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{25}$ &c. E. gr. Ratio 25 ad 7 est tripla superquadripartiens septimas; 3 ad 8 subdupla subsuperbipartiens tertias.

SCHOLION 1.

147. *En genera & species rationum rationalium, quarum quidem nomina apud recentiores rarius occurrunt (eorum enim loco terminis rationum minimis utuntur, e. gr. pro dupla 2 : 1, pro sesquialtera 3 : 2), non tamen ab eo ignorari possunt,*

possunt, qui scripta Mathematicorum evolvit. Ceterum jam Clavius *annotavit* (f) *exponentes rationis majoris inaequalitatis & re, & nomine; rationes vero minoris inaequalitatis re tantum, non autem nomine denominare. Facile vero in his nomen invenies, si denominatorem exponentis dividas per numeratorem. E. gr. si exponens fuerit* $\frac{5}{8}$; *erit* $8 : 5 = 1\frac{3}{5}$. *Unde innotescit, rationem vocari subsupertripartientem quintas. De nominibus rationum irrationalium nemo hactenus cogitavit.*

SCHOLION 2.

148. *Nomina rationum rationalium facile memoriae mandaturus idemque perspecturus, speciebus recensitis plures non dari, considerare debet, quotum ex divisione termini majoris per minorem emergentem, seu exponentem rationum majoris inaequalitatis, vel esse 1. numerum integrum, vel mixtum, hunc vero vel 2. ex unitate & fractione, cujus numerator est unitas, vel 3. ex unitate & fractione, cujus numerator est numerus, vel 4. ex numero & fractione, cujus numerator est unitas, vel denique 5. ex numero & fractione, cujus numerator numerus est, constare. Habemus ergo in casu primo* rationes multiplices & submultiplices, *in secundo* superparticulares & subsuperparticulares, *in tertio* superpartientes & subsuperpartientes, *in quarto* multiplices superparticulares & submultiplices subsuperparticulares, *in quinto denique* multiplices superpartientes & submultiplices subsuperpartientes. *Rationes minoris inaequalitatis per proprios quoque exponentes determinari possunt. Aut enim exponens 1. est fractio, cujus numerator unitas; aut fractio, cujus numerator unitate major, tumque vel simplum numeratoris, vel ejus multiplum denominatore minus. Si simplum numeratoris denominatore minus, ejus differentia a denominatore vel 2. unitas est, vel 3. unitate major. Similiter si multiplum numeratoris denominatore minus, differentia vel 4. unitas est, vel 5. unitate major. In casu primo* ratio *est* submultiplex; *in secundo* subsuperparticularis; *in tertio* subsuperpartiens, *in quarto* submultiplex subsuperparticularis; *in quinto* submultiplex subsuperpartiens.

DEFINITIO 48.

149. *Rationes eaedem* sunt, quarum antecedentes ad suos consequentes eodem modo referuntur, hoc est, quarum antecedentes per suos consequentes divisi dant exponentes aequales.

SCHOLION 1.

150. *Per hanc definitionem agnosci posse etiam identitatem rationum irrationalium patet ex schol. def. 42.* (§. 137).

COROLLARIUM 1.

151. Quoties ergo antecedens unius rationis suum consequentem, vel quantam consequentis partem continet; toties antecedens alterius suum consequentem, vel tantam consequentis partem continet: vel etiam quoties antecedens unius in consequente suo continetur

(f) in Comment. ad Elem. V Euclidis f. 179 Tom. 1. Oper.

tinetur, toties antecedens alterius continetur in suo consequente (§. 131).

COROLLARIUM 2.

152. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit A : B = C : D, seu in exemplo singulari 8 : 4 = 30 : 15. Et hoc modo identitatem rationum in posterum designabimus (§. 141).

SCHOLION. 2.

153. *Alii signis aliis utuntur. Communiter A. B. :: C. D. scribere solent. Sed secundum leges Artis characteristicæ signa scientifica non scientificis præferri debent. Sunt autem signa scientifica, seu ad inveniendum apta, quæ per characteres derivativos exprimunt, quorum notiones ex aliis simplicioribus componuntur.*

COROLLARIUM 3.

154. Cum rationes non discernantur nisi per exponentes (§. 141), in rationibus autem iisdem exponentes iidem sint (§. 149), rationes eædem sunt etiam similes (§. 24), & contra.

DEFINITIO 49.

155. Rationum duarum identitas vel similitudo dicitur *Proportio*. Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales*. E. gr. Si A : B = C : D, dicuntur A, B, C & D, seu 8, 4, 30 & 15 proportionales.

DEFINITIO 50.

156. *Proportio continua* est, si consequens primæ rationis idem cum antecedente secundæ, ut si 3 : 6 = 6 : 12: *Discreta* vero, si consequens primæ diversus ab antecedente secundæ, ut si 3 : 6 = 4 : 8. In proportione continua *terminus*, qui consequentis primæ & antecedentis secundæ vicem tuetur, *medius proportionalis* appellatur. Ita numerus 6 est medius proportionalis inter 3 & 12.

SCHOLION.

157. Gregorius a S. Vincentio (t) *considerat quoque rationes, quas habent rationum exponentes, &* Proportionalitatem *vocat proportionem, quæ inter exponentes quatuor rationum intercedit, ut modos argumentandi in Geometria etiam a rationibus dissimilibus desumere liceat. Sed nos hac doctrina non utemur.*

DEFINITIO 51.

158. Rationum diversarum A : B & F : G *major* dicitur A : B, si fuerit A : B > F : G; contra *minor* F : G, si F : G < A : B. Unde & rationem majorem ac minorem hoc modo designabimus. E. gr. 6 ad 3 majorem habet rationem quam 5 ad 4, nam 6 : 3 (= 2) > 5 : 4 (= $1\frac{1}{4}$); sed 3 ad 6 minorem habet, quam 4 ad 5, nam $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

DEFINITIO 52.

159. *Ratio* ex duabus vel pluribus aliis *composita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium

(t) Quadraturæ Circuli lib. 8 f. 865.

rium rationum antecedentibus ad factum ex earundem consequentibus. Ita 6 ad 96 est in ratione composita 2 ad 8 & 3 ad 12. In specie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus; *quadruplicata*, quæ ex quatuor &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus similibus componitur, multiplicata nempe uniuscujusque rationum similium. Ita 48 : 3 seu 16 : 1 est ratio duplicata ipsarum 4 : 1 & 12 : 3. Unde simul intelligitur, quænam *ratio* dicenda sit *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata* &c. & in genere *submultiplicata*. Nempe 4 : 1 est ratio subduplicata ipsius 16 : 1 vel 48 : 3.

THEOREMA 11.

160. *Quæ sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem, commensurabilia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Numeri rationalis integri pars aliquota est unitas (§. 40); fractus vero cum unitate partem aliquotam communem habet (§. 41). Quæ igitur sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem; eorum unum vel est pars aliquota alterius, vel utriusque pars aliquota communis datur. Quare commensurabilia sunt (§. 31). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

161. Cum in divisione sit ut divisor ad dividendum, ita unitas ad quotum (§. 69); si numerus rationalis per rationalem dividitur, unitas est ad quotum ut numerus rationalis ad numerum rationalem, atque hinc quotus commensurabilis unitati, (§. 160), adeoque numerus rationalis (§. 39).

COROLLARIUM 2.

162. Quoniam ergo in ratione rationali exponens rationis prodit, numero rationali per rationalem diviso (§. 134. 136); rationis rationalis exponens est numerus rationalis (§. 161).

THEOREMA 12.

163. *Commensurabilia sunt inter se velut unitas ad numerum rationalem integrum, vel ut numerus rationalis integer ad alium rationalem integrum: incommensurabilia non item.*

DEMONSTRATIO.

Commensurabilium aut unum est pars aliquota alterius, aut utriusque datur pars aliquota communis (§. 31). Quodsi adeo in casu priore quantitas minor, in posteriore pars aliquota communis pro unitate assumatur; respondebit in priore quantitati majori, in posteriore utrique numerus rationalis integer (§. 40). Ergo in casu priore quantitates sunt inter se ut unitas, in posteriore ut numerus rationalis integer ad numerum ra-

tionalem integrum. *Quod erat primum.*

Incommensurabilium nulla datur pars aliquota communis (§. 31), Nulla ergo datur unitas, cui commensurabilia existant. Quare cum omnis numerus rationalis unitati commensurabilis existat (§. 39); ipsa non sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem. *Quod erat alterum,*

COROLLARIUM. 1.

164. Commensurabilium ratio est rationalis; incommensurabilium irrationalis (§. 134).

SCHOLION.

165. *Dari quantitates incommensurabiles, in Geometria demonstrabitur.*

COROLLARIUM. 2.

166. Rationis commensurabilium exponens est numerus rationalis (§. 162).

THEOREMA 13.

167. *Rationes A : B & F : G similes eidem tertiae C : D sunt etiam similes inter se : & similibus similes sunt inter se similes.*

DEMONSTRATIO.

Rationes similes eidem tertiae	
6 : 3 = 8 : 4	sunt etiam eaedem
10 : 5 = 8 : 4	eidem tertiae (§.
Ergo 6 : 3 = 10 : 5	154). Quare cum

sit A : B = F : G & C : D = F : G (§. 152); erit A : B = C : D (§. 87), consequenter A ad B ut C ad D (§. 152). *Quod erat unum.*

Porro A : B = C : D & F : G = H : E, itemque C : D = H : E, *per hypoth.* Sed A : B = H : E, *per demonstr.* Ergo etiam A : B = F : G, *per demonstr.* *Quod erat alterum.*

THEOREMA 14.

168. *Idem C ad aequalia A & B; & aequalia A & B ad idem C vel etiam aequalia C & D eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

A = B, *per hypoth.* Ergo C : A = C : B (§. 71. 94); consequenter C ad A & B eandem rationem habet (§. 152). *Quod erat primum.*

Similiter quia A = B, *per hypoth.* erit A : C = B : C (§. 71. 94), consequenter A & B ad C eandem rationem habent (§. 152). *Quod erat secundum.*

Sit denique A = C & B = D, erit A : B = C : D (§. 71. 94), consequenter ratio utrobique eadem (§. 152). *Quod erat tertium.*

THEOREMA 15.

169. *Si fuerit A : B = C : D, erit etiam invertendo B : A = D : C.*

DEMONSTRATIO.

Sit quotus ex divisione ipsius A per B emergens E & quotus ex divisione ipsius C per D emergens G; erit B ad A ut unitas ad E &

D ad

D ad C ut eadem unitas ad G (§. 69) consequenter B : A = 1 : E & B : C = 1 : G (§. 152). Sed A : B = C : D, *per hypoth.* seu E = G. (§. 15). Ergo unitas eadem ad E & G eandem rationem habet (§. 168), consequenter B : A = D : C (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA 16.

170. *Partes similes* P *&* p *eandem rationem habent ad tota* T *&* t: *si tota ad partes eandem rationem habent, partes sunt similes: & tota ad partes similes eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Habeat enim, si fieri potest, P ad T aliam rationem quam *p* ad *t*; partes *p* & *P* per diversitatem rationis ad tota a se invicem distingui poterunt (§. 132). Erunt adeo dissimiles (§. 24): Quod cum sit absurdum, utpote contra hypothesin; erit P ad T ut *p* ad *t*. *Quod erat unum.*

Si t : p = T : P, *per hyp.* erit *p* : *t* = P : T (§. 169). Ergo *per demonstrata* P & *p* sunt partes similes. *Quod erat alterum.*

Si P & p sunt partes similes totorum T & t, erit P : T = *p* : *t* *per num. 1.* adeoque T : P = *t* : *p* (§. 169), hoc est, tota ad partes similes eandem rationem habent.

THEOREMA 17.

171. *Partes similes* P *&* p *sunt inter se ut tota* T & t.

DEMONSTRATIO.

Cum totum sit idem cum partibus suis simul sumtis (§. 9); quoties sumitur totum, toties etiam sumitur pars ejus quantalibet, e. gr. quarta, vigesima, millesima, millionesima aut quæ rationem aliam quamcunque ad totum habet. Quare si ponamus totum minus *t* toties sumi, donec toti T æquale fiat; quoties ipsum sumitur, toties etiam sumenda ejus pars *p*, donec parti ipsius T simili, quæ est P, æqualis fiat. Toties itaque P continet *p*, quoties T ipsum *t*. Sunt ergo partes similes ut tota (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

172. *Notandum est, numerum, qui indicat, quoties sumatur totum minus, ut majori æquale fiat, non semper esse rationalem; sed irrationalem quoque esse posse: quo in casu tota ad se invicem rationem irrationalem habent.* E. gr. *In Geometria demonstrabimus latus quadrati, ut diagonali æquale fiat, toties sumi debere, quoties unitas continetur in radice ex binario. Evidens vero est, si latus quadrati sit divisum in duas partes, quarum una est pars quarta totius, altera continet tres quartas; partem quoque quartam toties sumi quoties unitas continetur in radice ex binario, donec parti quartæ diagonalis æqualis fiat.*

THE-

THEOREMA 18.

173. *Si* A : B = C : D; *erit etiam* alternando seu permutando A : C = B : D.

DEMONSTRATIO.

I. Si antecedens A & C consequentibus B & D fuerint minores; eorum partes (§. 20), eæque similes (§. 170) haberi possunt. Sunt igitur ut tota, hoc est antecedentes A & C eam inter se rationem habent quam consequentes B & D. (§. 171).

II. Si antecedentes A & C consequentibus B & D majores; tum quia A : B = C : D, *per hypoth.* erit B : A = D : C (§. 169), consequenter B : D = A : C *per cas.* 1. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

174. Ergo in divisione unitas ad divisorem ut quotus ad dividendum (§. 69).

COROLLARIUM 2.

175. Si fuerit A : B = C : D & B = D, erit etiam A = C. Est enim A : C = B : D (§. 173). Sed B = D, *per hypoth.* Ergo A = C (§. 149).

COROLLARIUM 3.

176. Si fuerit B : A = D : C & B = D; erit etiam A = C. Cum enim sit A : B = C : D (§. 169); erit etiam A = C (§. 175).

THEOREMA 19.

177. *Quæ ad idem vel æqualia eandem habent rationem, æqualia sunt: & ad quæ idem vel æqualia eandem habent rationem, ea itidem æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

A : B = D : B, *per hypoth.* Ergo A : D = B : B (§. 173). Sed B = B (§. 81). Quare A = D (§. 149). Et idem eodem modo ostenditur, si A : B = D : C & B = C. *Quod erat unum.*

Similiter C : A = C : B, *per hypoth.* Ergo C : C = A : B (§. 173). Sed C = C (§. 81). Quare A = B (§. 149). Et idem eodem modo patet, si C : A = D : B & C = D. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 20.

178. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C multiplices; facta D & E sunt inter se ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

6	12
3	3
18	36

6 : 12 = 18 : 36

Cum sit 1 : C = A : D & 1 : C = B : E (§. 66); erit A : D = B : E (§. 167), consequenter A : B = D : E (§. 173). *Q. e. d.*

SCHOLION.

179. *Cum C sit eadem quantitas in utroque casu, per hypoth. unitas quoque in utroque eadem est (§. 13), consequenter 1 : C eadem Ratio.*

CORO-

COROLLARIUM.

180. Ergo si A > B, etiam A C > B C (§. 149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia multiplices, factum prius est majus altero.

THEOREMA 21.

181. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas; quoti F & G sunt inter se ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

24 : 12
3) ————
8 : 4
8 : 4 = 24 : 12

Cum sit 1 : C = F : A & 1 : C = G : B (§. 174); erit F : A = G : B (§. 167), consequenter F : G = A : B (§.173). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

182. Si A > B, etiam F > G (§.149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia dividas, quotus prior posteriore major est.

THEOREMA 22.

183. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes vel consequentes per idem E dividas; in casu priore quoti F & G ad consequentes B & D; in posteriore antecedentes A & C ad quotos H & K eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

3 : 6 = 12 : 24
3 3
————————
1 : 6 = 4 : 24

Quoniam A : B = C : D, *per hypoth.* erit A : C = B : D (§.173). Sed A : E = F & C : E = G, *per hypoth.* Ergo F : G = A : C (§.181), = B : D (§. 167), consequenter F : B = G : D (§. 173). *Quod erat unum.*

Similiter quoniam A : B = C : D *per hypoth*, erit A : C = B : D (§. 173). Sed B : E = H & D : E = K *per hypoth.* Ergo B : D = H : K (§. 181), consequenter A : C = H : K (§. 167) & hinc tandem A : H = C : K (§.173). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 23.

184. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes vel consequentes per eandem quantitatem E multiplices; in casu priore facta A E & C E ad consequentes B & D, in posteriore antecedentes A & C ad facta B E & D E eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

2 : 6 = 3 : 9
6 6
————————
12 : 6 = 18 : 9

Quia A : B = C : D, *per hypoth.* A : C = B : D (§. 173). Sed EA : EC = A : C (§. 178). Ergo EA : EC = B : D (§. 167), consequenter EA : B = EC : D (§. 173). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, esse A : BE = C : DE, *Quod erat alterum.*

THEOREMA 24.

185. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes per idem E & consequentes per idem F multiplices*

aut dividas; in casu priore facta, in posteriore quoti eandem inter se rationem habent.

DEMONSTRATIO.

3 : 6 = 12 : 24
2 3 2 3
6 : 18 = 24 : 72

A:B = C:D, *per hypoth.* Ergo EA : B = EC : D (§.184), consequenter EA : FB = EC : FD (§.*cit.*). *Quod erat unum.*

3 : 6 = 12 : 24
3 2 3 2
1 : 3 = 4 : 12

Sit A : E = G, B : F = H, C : E = K & D : F = L. Quoniam A:B = C:D, *per hypoth.* G : B = K : D (§.183). Ergo & G : H = K : L (§.*cit.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 25.

186. *Pars antecedentis in ratione majore ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens minoris ad consequentem suum. Et majus antecedente rationis minoris ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens majoris ad suum consequentem.*

DEMONSTRATIO.

Si A ad B rationem majorem habet, quam C ad D; erit A : B > C : D (§. 158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, necesse est ut minus quam A, hoc est, pars ipsius (§.20), per B dividatur (§.182): quæ pars si dicatur F, erit F : B = C : D, hoc est, in majore ratione antecedentis pars eandem rationem habet ad consequentem, quam minoris antecedens ad suum (§. 152). *Quod erat unum.*

Similiter si A ad B minorem habet rationem, quam C ad D; erit A : B < C : D (§. 158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, necesse est ut majus quam A, cujus adeo pars est A (§. 20), per B dividatur (§. 182): quod si dicatur F, erit F : B = C : D, hoc est, in ratione minore majus antecedente rationem eandem habet ad consequentem, quam majoris antecedens ad suum consequentem (§. 152). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 26.

187. *Si fuerint quotcunque rationes similes A : B, C : D, E : F, G : H &c. summa omnium antecedentium A + C + E + G &c. est ad summam omnium consequentium B + D + F + H &c. ut antecedens unius rationis A ad suum consequentem B.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus e. gr. esse A = $\frac{1}{2}$ B, C = $\frac{1}{2}$ D, E = $\frac{1}{2}$ F, G = $\frac{1}{2}$ H; erit A + C + E + G = $\frac{1}{2}$ B + $\frac{1}{2}$ D + $\frac{1}{2}$ F + $\frac{1}{2}$ H (§.88), hoc est, summa omnium antecedentium est subdupla

summæ

ſummæ omnium conſequentium, conſequenter ut antecedens unius rationis ad ſuum conſequentem. Eodem modo cum argumentatio procedat, ſi alia quæcunque ratio antecedentium ad conſequentes ponatur, vel etiam antecedentes ſint conſequentibus majores: patet propoſitum. *Q.e.d.*

THEOREMA 27.

188. *Si fuerit ut totum $A + C$ ad totum $B + D$, ita ablatum C ad ablatum D; erit etiam reliquum A ad reliquum B ut totum $A + C$ ad totum $B + D$, vel ut ablatum C ad ablatum D.*

DEMONSTRATIO.

24 : 12	
6 : 3	
18 : 9	

Aut $A:B = C:D$, aut $A:B \rhd C:D$, aut denique $A:B \lhd C:D$ (§. 21). Ponamus $A:B \rhd C:D$. Ergo pars ipſius A, quæ dicatur F, erit ad B ut C ad D (§. 186), hoc eſt, $F:B = C:D$ (152), conſequenter $F + C : B + D = C : D$ (§. 187). Quare cum etiam ſit $A + C : B + D = C : D$, *per hypoth.* erit $F + C = A + C$ (§. 177), adeoque $F = A$ (§. 91). Sed F eſt pars ipſius A *per demonſtrata*: Pars igitur toti æqualis: quod cum ſit abſurdum (§. 84), ut ſit $A:B \rhd C:D$, fieri nequit.

Sit jam $A : B \lhd C : D$. Ergo majus ipſo A, quod dicatur G, ad B eandem rationem habet, quam C ad D (§. 186), hoc eſt, $G : B = C : D$ (§. 152), conſequenter $G + C : B + D = C : D$ (§. 187). Quare cum etiam ſit $A + C : B + D = C : D$ *per hypoth.* erit $G + C = A + C$ (§. 177), adeoque $G = A$ (§. 91). Sed A eſt pars ipſius G *per demonſtrata*. Ergo pars toti æqualis: quod cum ſit abſurdum, ut ſit $A : B \lhd C : D$ fieri nequit. Quoniam itaque nec $A : B \rhd C : D$, nec $A : B \lhd C : D$ *per demonſtrata*: erit utique $A : B = C : D$. *Q. e. d.*

THEOREMA 28.

189. *In rationibus ſimilibus $A : B$ & $C : D$ differentia anteeedentium $A - C$ eſt ad differentiam conſequentium $B - D$, ut antecedens rationis utriuslibet ad ſuum conſequentem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A : B = C : D$ *per hypoth.* erit $A : C = B : D$ (.173). Ponamus $A \rhd C$ & $B \rhd D$; erunt A & B tota, C & D eorum partes (§. 9. 20). Quamobrem cum ſit $A : B = C : D$ *per hypoth.* erit $A - C : B - D = A : B$ (§. 188). *Q. e. d.*

THEOREMA 29.

190. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad ſuum conſequentem, ita antecedens alterius ad conſe-*

quentem suum; erit etiam componendo, *ut summa antecedentis & consequentis primæ rationis ad antecedentem vel consequentem primæ, ita summa antecedentis & consequentis secundæ ad antecedentem vel consequentem secundæ.*

DEMONSTRATIO.

4 : 2 = 10 : 5

6 : 4 = 15 : 10
vel 6 : 2 = 15 : 5

Si A : B = C : D *per hypoth.* erit A : C = B : D (§. 173). Sed A + B : C + D = A : C = B : D (§. 187). Ergo A + B : A = C + D : C, item A + B : B = C + D : D (§. 173). *Q. e. d.*

THEOREMA 30.

191. *Si fuerit A : B* = a : b *& A : C* = a : c *&c. erit A : A + B + C* = a : a + b + c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam A : B = *a* : *b* & A : C = *a* : *c per hypoth.* erit A : *a* = B : *b* = C : *c* (§. 173. 167). Quare A : *a* = A + B + C : *a* + *b* + *c* (§. 187) & hinc A : A + B + C = *a* : *a* + *b* + *c* (§. 173). *Q. e. d.*

THEOREMA 31.

192. *Si fuerint proportiones quotcunque similes A : B = C : D, E : F = G : H, I : K = L : M &c. erit summa omnium antecedentium primarum rationum A + E + I &c. ad summam omnium consequentium B + F + K &c. ut summa omnium antecedentium secundarum rationum C + G + L &c. ad summam omnium consequentium D + H + M &c.*

DEMONSTRATIO.

Cum A : B, E : F, I : K &c, itemque C : D, G : H, L : M &c. sint rationes similes, *per hypoth.* erit A + E + I &c. : B + F + K &c. = A : B & C + G + L &c. : D + H + M &c. = C : D (§. 187). Est vero A : B = C : D : *per hypoth.* Ergo A + E + I &c. : B + F + K &c. = C + G + L &c. : D + H + M &c. (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA 32.

193. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam* dividendo *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus consequentem, ita differentia terminorum secundæ ad ejus consequentem, itemque* convertendo *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus antecedentem ita differentia terminorum secundæ ad ejus antecedentem.*

DEMONSTRATIO.

6 : 4 = 15 : 10

2 : 4 = 5 : 10
2 : 6 = 5 : 15

Si fuerit A : B = C : D *per hypoth.* erit A : C = B : D (§. 173), consequenter A — B : C : D

C—D = B:D = A:C (189). Ergo A—B:B = C—D:D & A—B:A = C—D:C (§.173). *Q.e.d.*

THEOREMA 33.

194. *Si fuerit* ordinate *ut antecedens primæ rationis A ad ſuum conſequentem B, ita antecedens ſecundæ D ad conſequentem ſuum E; & ut conſequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita conſequens ſecundæ E ad aliud quidpiam F: erit* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut antecedens ſecundæ D ad F.*

DEMONSTRATIO.

4:2 = 6:3
2:8 = 3:12
――――――
4:8 = 6:12

Quoniam A:B = D:E & B:C = E:F, *per hypoth.* erit A:D = B:E & B:E = C:F (§.173), conſequenter A:D = C:F (§.167). Quare A:C = D:F (§.173). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

195. Quodſi fuerit A:B = D:E & C:B = F:E; cum etiam ſit B:C = E:F (§.169), erit A:C = D:F (§.194).

COROLLARIUM 2.

196. Similiter ſi fuerit A:B = C:D & A:F = C:G; cum etiam ſit B:A = D:C (§.169), erit B:F = D:G (§.194).

COROLLARIUM 3.

197. Si denique fuerit A:B = C:D & F:A = G:C, cum etiam ſit A:F = C:G (§.169), erit B:F = D:G (§.196).

THEOREMA 34.

198. *Si fuerit* perturbate *ut antecedens primæ rationis A ad ſuum conſequentem B, ita antecedens ſecundæ E ad ſuum conſequentem F; & ut conſequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita aliud quidpiam D ad antecedentem ſecundæ E; erit etiam* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut D ad conſequentem ſecundæ F.*

DEMONSTRATIO.

8:4 = 12:6
4:16 = 3:12
――――――
8:16 = 3:6

Quoniam A:B = E:F, *per hypoth.* ſi ponatur B:C = F:G, erit A:C = E:G (§.194). Eſt vero etiam B:C = D:E, *per hypoth.* Ergo D:E = F:G (§.167), & D:F = E:G (§.173), conſequenter A:C = D:F (§.167). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

199. Quodſi fuerit A:B = E:F & C:B = E:D, cum etiam ſit B:C = D:E (§.169), erit A:C = D:F (§.198).

COROLLARIUM 2.

200. Similiter ſi fuerit B:A = F:E & B:C = D:E, cum etiam ſit A:B = E:F (§.169), erit A:C = D:F (§.198).

COROLLARIUM 3.

201. Si porro fuerit B:A = F:E & C:B = E:D, cum etiam ſit B:C = D:E (§.169), erit A:C = D:F (§.200).

COROLLARIUM 4.

202. Si idem C vel æqualia per majus

A & minus B dividas, quotus prior F erit minor posteriore G. Est enim A : C : = 1 : F & B : C = 1 : G (§. 174), adeoque C : B = G : 1 (§. 169). Ergo A : B = G : F (§. 198). Sed A > B, *per hypoth.* Ergo G > F (§. 149).

THEOREMA 35.

203. *Majus A ad idem C majorem rationem habet, quam minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A > B, *per hypoth.* erit A : C > B : C (§. 202), hoc est, A ad C majorem rationem habet, quam B ad C (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA 36.

204. *Quod ad idem majorem habet rationem quam alterum, id altero majus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat A ad C rationem majorem quam B ad idem C, *per hypoth.* Ergo pars ipsius A eandem ad C rationem habet quam B ad idem C (§. 186), adeoque ipsi B æqualis est (§. 177). Quare A > B (§. 20). *Q. e. d.*

THEOREMA 37.

205. *Idem C ad majus A minorem habet rationem quam ad minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A > B *per hypoth.* erit C : A < C : B (§. 202). Ergo C ad A minorem habet rationem quam ad B (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA 38.

206. *Ad quod idem majorem rationem habet quam ad alterum, id altero minus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat C ad A rationem majorem, quam ad B, *per hypoth.* Ergo pars ipsius C, quæ dicatur D, ad A eandem rationem habet, quam ad B (§. 186), hoc est, D : A = C : B (§. 152). & hinc D : C = A : B (§. 173). Sed D < C (§. 20). Ergo A < B (§. 140). *Q. e. d.*

THEOREMA 39.

207. *Duæ quantitates se mutuo multiplicantes idem factum gignunt.*

DEMONSTRATIO.

4	2
2	4
8	= 8

Sint duo factores A & B, erit 1 : A = B : AB & 1 : B = A : BA (§. 66). Est vero etiam 1 : A = B : BA (§. 173), adeoque ob unitatem eandem, *per hypoth.* B : AB = B : BA (§. 167). Ergo AB = BA (§. 177).

COROLLARIUM.

208. Sint tres factores A, B & C. Quoniam AB = BA (§. 207); erit CAB = CBA (§. 93), adeoque & ABC = BAC (§. 207). Similiter quia CB = BC (§. 207); erit ACB = ABC (§. 93), adeoque & CBA = BCA (§. 207). Quare CAB = CBA = ABC = BAC = ACB = BCA (§. 87), hoc est, factum idem

idem producitur, quocunque ordine efficientes in se invicem ducantur.

SCHOLION.

209. *Idem eodem modo ostenditur, si plures fuerint factores: sed demonstratio prolixior evadit, si plures tribus fuerint termini.*

THEOREMA 40.

210. *Si factum per multiplicandum dividitur, quotus est multiplicans: si per multiplicantem, quotus est multiplicandus.*

DEMONSTRATIO.

Est enim multiplicandus ad factum ut unitas ad multiplicantem (§.66). Est etiam multiplicandus ad factum (si hoc per illud dividi concipimus) ut unitas ad quotum (§. 69). Ergo quotus æqualis est multiplicanti (§.177). *Quod erat unum.*

Quoniam unitas est ad multiplicantem ut multiplicandus ad factum (§. 66); eadem unitas ad multiplicandum ut multiplicans ad factum (173). Sed si factum per multiplicantem dividis; multiplicans est ad factum ut unitas ad quotum (§.69). Ergo quotus est æqualis multiplicando (§. 177). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

211. Omnia igitur facta sunt numeri compositi (§. 76).

THEOREMA 41.

212. *Si quotus per divisorem multiplicatur, aut contra, factum est dividendus.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad divisorem ita quotus ad dividendum (§.174). Sed si quotus per divisorem multiplicatur, erit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad factum (§.66). Ergo factum æquale est dividendo (§.177). *Quod erat unum.*

Idem vero cum sit factum, si divisor per quotum multiplicetur (§. 207); erit quoque in hoc casu factum æquale dividendo. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 42.

213. *Sint quatuor quotcunque quantitates proportionales A:B = C:D, sint totidem aliæ inter se quoque proportionales E:F = G:H, si posteriores singulas in singulas priores ducas, facta inter se proportionalia sunt, nempe AE : FB = GC : DH*

DEMONSTRATIO.

Cum sit *per hypothesin*

A:B = C:D & E:F = G:H
E F E F C D C D

erit EA:FB = EC:FD & CE:DF = CG: DH. (§. 185). Sed EC = CE & FD = DF (§.207). Ergo EA: FB = CG: DH (§.167) = GC: HD (§.207). *Q. e. d.*

THE-

THEOREMA 43.

214. *Rationis compositæ exponens est æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium.*

DEMONSTRATIO.

Si rationis primæ A : B exponens $= m$; secundæ C : D exponens sit $= n$. Erit $m : 1 = A : B$ & $n : 1 = C : D$ (§.140). Ergo $mn : 1 = AC : BD$ (213), consequenter mn est exponens rationis AC : BD (§. 140), hoc est compositæ ex A:B & C:D (§.159). *Q. e. d.*

SCHOLION.

215. *Sint rationes 8 : 4 & 24 : 6. Illius exponens est 2, hujus 4. Rationem compositam datarum habent 192 & 24. Sed 192 : 24 = 8, quod est factum ex 2 in 4. Ceterum eadem demonstratio locum habet, si plures fuerint rationes.*

THEOREMA 44.

216. *Si plures fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D &c. prima A ad tertiam C est in ratione duplicata; ad quartam D in ratione triplicata &c. primæ A ad secundam B.*

DEMONSTRATIO.

1. Quoniam A : B = B : C, *per hypoth.* AB ad BC habet rationem duplicatam ipsius A ad B (§.159). Sed AB : BC = A : C (§.181). Ergo etiam A ad C rationem duplicatam habet ipsius A ad B (§.167). *Quod erat unum.*

2. Quoniam A : B = B : C = C : D. *per hypoth.* ABC est ad BCD in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 159). Sed ABC : BCD = A : D (§. 178). Ergo etiam A ad D est in ratione triplicata ipsius A ad B (§.167). *Quod erat secundum.*

3. Facile apparet, quod eodem modo demonstrari possit, primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam; ad sextum quintuplicatam &c. primi ad secundum. *Quod erat tertium.*

THEOREMA 45.

217. *Si fuerit quæcunque quantitatum A, B, C, D, E, F &c. series; ratio primæ A ad ultimam F componitur ex rationibus quantitatum extremis interjacentium A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c.*

DEMONSTRATIO.

Si enim omnes antecedentes, itidemque omnes consequentes in se invicem multiplices, facta ABCDE & BCDEF sunt in ratione composita rationum A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c. (§.159). Sed ABCDE : BCDEF = A : F (§.178). Ergo etiam A ad F est in ratione composita omnium modo recensitarum (§.167). *Q. e. d.*

THE-

THEOREMA 46.

218. *Rationes compositae ex rationibus, quarum singulae singulis aequales sunt, inter se aequales sunt.*

DEMONSTRATIO.

6:3 = 4:2
3:1 = 12:4
5:1 = 20:4
――――――
90:3 = 960:32
= 30

Sit A : B = C : D, E : F = G : H, I : K = L : M, *per hypoth.* erit AE : FB = CG : DH (§. 213), adeoque & AEI : FBK = CGL : MHD (§. *cit.*). Ratio vero AEI : FBK componitur ex rationibus A : B, E : F & I : K; ratio CGL : DHM ex rationibus C : D, G : H, L : M (§. 159). Ergo constat propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA 47.

219. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales A, B, C & D, aequemultiplices primae atque tertiae A & C, itemque secundae ac quartae B & D, juxta quamlibet multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una aequales sunt, vel una deficiunt, inter se comparatae.*

DEMONSTRATIO.

Denotentur aeque multiplices ipsarum A & C per mA & mC, itemque aeque multiplices ipsarum B & D. per nB & nD. Cum sit A : B = C : D, *per hypoth.* erit etiam mA : nB = mC : nD (§. 185), consequenter mA : mC = nB : nD (§. 173). Quamobrem si mA = mC, erit nB = nD; si mA > mC, etiam nB > nD; si mA < mC, etiam nB < nD (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

220. *Hac proprietate proportionalium utitur* Euclides (u) *in iis definiendis ac inde ceteras demonstrat.*

CAPUT IV.

De SPECIEBUS ARITHMETICAE IN NUMERIS FRACTIS.

THEOREMA 48.

221. *Si numerator est aequalis denominatori, fractio* $\frac{4}{4}$ *aequivalet integro; si minor, fractio* $\frac{3}{4}$ *minor est* inte-

(u) Elem. V. def. 5.

integro; si major, fractio $\frac{5}{4}$ *integro seu unitate major est.*

DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem seu integrum in partes æquales (e. gr. in nostro casu in 4) divisum, & numerator numerat partes istiusmodi in casu aliquo datas (§. 59). Quodsi ergo numerator denominatori æqualis, *per hypoth.* tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis (§. 86). *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor; *per hypoth.* aliquot saltem dantur partes integri, non omnes. Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis, consequenter eadem minor (§. 20). *Quod erat secundum.*

Si denique numerator major est denominatore *per hypoth.* plures dantur partes, quam habet integrum. Sed tot partes, quot habet integrum, integro æquales sunt (§. 86). Ergo integrum parti fractionis æquale est, consequenter ipsa integro major (§. 20). *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

222. Fractiones *integro æquales vel eadem majores dicuntur vulgo* spuriæ, *quia proprie loquendo fractiones non sunt nisi quæ integro minores.* (§. 38).

PROBLEMA 17.

223. *Invenire, quot integra fractio, quæ integro major* ($\frac{8}{4}$), *contineat.*

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur; dico, quotum 2 indicare, quod petebatur.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur (§. 69). Sed denominator idem est cum integro (§. 59). Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA 18.

224. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.
2. Factum scribatur loco numeratoris. Ita reperies $3 = \frac{24}{8}$, $5 = \frac{30}{6}$, $7 = \frac{28}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Est nempe factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. 66. 169). Sed unitas & denominator datus sunt

idem.

idem integrum (§. 59). Ergo fractio & numerus integer æquales sunt (§. 177). *Q. e. d.*

THEOREMA 49.

225. *Fractiones homogeneæ æquales sunt, quarum numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent; major est, cujus numerator habet rationem majorem; minor vero, cujus numerator habet minorem.*

DEMONSTRATIO.

Cum fractiones inter se sint homogeneæ, *ex hypoth.* ad eandem unitatem referuntur (§. 35), adeoque ipsarum denominatores idem totum referunt (§. 59). Quare si numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent; fractiones æquales sunt (§. 177): cujus vero fractionis numerator ad denominatorem suum rationem majorem habet, ea major est; cujus numerator minorem habet, ea minor est (§. 204). *Q. e. d.*

E. gr. $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$. Sed $\frac{3}{24} < \frac{2}{6}$.

SCHOLION.

226. *Intelligitur adeo identitas fractionum, si numerator unius toties continеatur in denominatore suo, quoties numerator alterius in suo continetur. Fractio minor esse intelligitur, si numerator ipsius pluries continetur in suo denominatore, quam numerator alterius in denominatore suo: id quod divisio denominatoris per numeratorem prodit.*

COROLLARIUM.

227. Quodsi ergo tam numerator, quam denominator alicujus fractionis ($\frac{4}{6}$) per eundem numerum (2) multiplicetur vel dividatur; in casu priore facta ($\frac{8}{12}$), in posteriore quoti ($\frac{2}{3}$) constituunt fractionem datæ ($\frac{4}{6}$) æquivalentem (§. 178. 181).

PROBLEMA 19.

228. *Invenire communem mensuram maximam duorum numerorum.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur numerus major per minorem.
2. Divisor primæ divisionis seu numerus datus minor denuo dividatur per residuum primæ divisionis.
3. Similiter divisor secundæ divisionis dividatur per residuum secundæ & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico, divisorem ultimum esse communem mensuram maximam numerorum datorum.

E. gr. *S*int numeri dati 168 & 240, reperietur eorum communis mensura maxima 24 hunc in modum:

```
 7
182        24        4
240( 1    168( 2    72( 3
168        72       24
```

Similiter communis menſura maxima numerorum 95 & 47 reperitur 1.

DEMONSTRATIO.

Diviſor ultimus 24 metitur diviſorem antecedentis (in noſtro quidem caſu ſecundæ) diviſionis 72, (*per hypoth.* & §. 74). Ergo & metitur dividendum antecedentis (hoc eſt, in noſtro caſu ſecundæ) diviſionis 168, quippe ex dividendo ultimæ diviſionis 72, aliquoties (hic quidem bis) ſumto & ejus diviſore 24 compoſitum. Metitur adeo numerum unum datorum 168 & reſiduum primæ diviſionis 72, adeoque & numerum alterum datorum 240, quippe ex minore 168 aliquoties (in noſtro caſu ſemel) ſumto & reſiduo primæ diviſionis 72 compoſitum. Eſt itaque communis numerorum datorum menſura (§. 78).

Eſſe vero communem menſuram maximam ordine retrogrado per indirectum demonſtratur. Ponamus enim numero invento 24 majorem eſſe menſuram numerorum datorum 240 & 168 communem. Patet igitur ex antecedentibus, quod etiam metiri debeat reſiduum primæ ſeu diviſorem ſecundæ diviſionis 72, adeoque & reſiduum ſecundæ diviſionis ſeu diviſorem tertiæ, hoc eſt, in noſtro caſu inventam communem menſuram 24. Sed numerus is eadem major eſt, *ex hyp.* Ergo communem menſuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24: Quod cum ſit abſurdum (§. 74), major communis menſura non datur. Eſt igitur ea, quam invenimus, maxima. *Q. e. d.*

SCHOLION. 1.

229. *Qui demonſtrationem uno quaſi obtutu comprehendere cupiunt; illos hæc numerorum datorum reſolutio juvabit.*

I. $72 = 3 . 24$, per diviſ. tert.

II. $168 = 2 . 72 + 24$, per diviſ. ſec. $=$
$2 . 3 . 24 + 24$, per num. I. $= 7 . 24$

III. $240 = 1 . 168 + 72$ per diviſ. prim.
$= 7 . 24 + 3 . 24$ per num. I & II $=$
$10 . 24$.

SCHOLION 2.

230. *In lineis communis menſura maxima invenitur per mutuam earundem a ſe invicem ſubtractionem. In numeris autem compendii gratia diviſio ſubtractioni ſubſtituitur: ut exemplum oſtendit.*

240	96	48
168	72	24
72	24	24
96	48	0

PROBLEMA 20.

231. *Fractionem datam ad minores terminos reducere, h. e. invenire fractionem datæ ($\frac{20}{48}$) æquivalentem, ſed minoribus numeris expreſſam.*

RESO-

RESOLUTIO.

Dividatur tam numerator 20, quam denominator 48 per eundem numerum 4, qui utrumque metitur: quoti 5 & 12 componunt fractionem quaesitam $\frac{5}{12}$ (§.227).

COROLLARIUM 1.

232. Si ergo divisio fit per communem mensuram maximam numeratoris ac denominatoris (§.228); fractio ad terminos minimos reducitur.

COROLLARIUM. 2.

233. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datae sola unitas metitur; ad minores terminos reduci nequit.

SCHOLION.

234. *Molestius accidit inexercitatis communem mensuram maximam quaerere, quam iterata per mensuras minores sponte animadversas divisione fractiones reducere.*

PROBLEMA 21.

235. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere, h. e. invenire fractiones, quae datis aequales sunt & communi denominatore gaudent.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si fractiones duae dentur, quaelibet integra multiplicetur per denominatorem alterius.

E. gr. 5) $\frac{2}{3}$. 3) $\frac{4}{5} = \frac{10}{15}$. $\frac{12}{15}$

Casus II. Si plures dentur, tam numerator, quam denominator uniuscujusque ducatur in factum ex denominatoribus reliquarum.

E. gr. 24) $\frac{2}{3}$. 12) $\frac{1}{6}$. 18) $\frac{3}{4} = \frac{48}{72}$. $\frac{12}{72}$. $\frac{54}{72}$. | 60) $\frac{1}{2}$. 40) $\frac{2}{3}$. 24) $\frac{1}{5}$. 30) $\frac{3}{4}$. = $\frac{60}{120}$. $\frac{80}{120}$. $\frac{24}{120}$. $\frac{90}{120}$.

DEMONSTRATIO.

Fractiones communem habere denominatorem, patet per §.93 & §.207. 208. Quod vero aequivaleant primum propositis, manifestum est per §. 227. Constat ergo propositum. Q. e. d.

PROBLEMA 22.

236. *Fractiones addere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datae diversos denominatores habuerint, reducantur ad eandem (§.235).
2. Addantur numeratores (§.96) & summae subscribatur denominator communis.

E. gr. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$ (§.235) $= \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$ (§.223). $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{48}{72} + \frac{12}{72} + \frac{54}{72}$ (§.235) $= \frac{114}{72} = 1\frac{42}{72}$ (§.223) $= 1\frac{7}{12}$ (§.231).

DEMONSTRATIO.

Cum denominatores sint nomina unitatum, ex quibus numeratores componuntur (§. 59); numeratores tantum adduntur. Quoniam vero addi nequeunt, nisi fuerint homogenei (§. 61); ad eandem denominationem sunt reducendi (§.35). Q. e. d.

PROBLEMA 23.

237. *Fractionem datam ex alia data subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem (§. 235).
2. Numerator unius ex numeratore alterius subducatur (§.103) & residuo denominator communis subscribatur.

E. gr. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (§.231) & $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10}$ (§.235) $= \frac{1}{10}$.

THEOREMA 50.

238. *Fractio æquatur Numeratori per denominatorem diviso, hoc est, $\frac{3}{4} = 3:4$.*

DEMONSTRATIO.

Est enim fractio $\frac{3}{4}$ ad unitatem seu integrum ut numerator 3 ad denominatorem 4 (§. 38. 59). Quare cum sit ut antecedens ad consequentem ita exponens rationis ad unitatem (§. 140), si antecedens sumatur numerator 3, consequens denominator 4, erit fractio $\frac{3}{4}$ exponens rationis (§. 177). Æquatur ergo fractio numeratori per denominatorem diviso (§. 136). *Q. e. d.*

PROBLEMA 24.

239. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius; facta constituunt fractionem quæsitam.

E. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 231).

DEMONSTRATIO.

Sit $\frac{A}{B}$ $(\frac{2}{3}) = A:B$ (§. 238) $= F$ & $\frac{C}{D}$ $(\frac{1}{2}) = C:D$ (§. *cit.*) $= G$. erit $B : A = 1 : F$ & $D : C = 1 : G$ (§. 69). Ergo $BD : AC = 1 : FG$ (§. 213), hoc est, $AC : BD$ $(\frac{2}{3} : \frac{1}{2}) = FG : 1$ (§. 169) $= FG$ $(\frac{2}{6})$. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

240. *Non mirum, quod factum factoribus minus, cum revera divisio sit, quæ multiplicatio vocatur. E. gr. $\frac{2}{3}$ multiplicare per $\frac{1}{2}$ idem est ac invenire dimidium duarum partium tertiarum.*

SCHOLION. 2.

241. *Hinc fractionum multiplicatio sequente modo facilius demonstratur.* Si fractio $\frac{4}{5}$ multiplicanda per $\frac{2}{3}$, duæ partes tertiæ quatuor quintarum invenienda. Data igitur fractio $\frac{4}{5}$ instar totius considerata dividenda est in tot partes æquales, quot multiplicatoris denominator 3 habet unitates, scilicet in nostro casu in tres, & pars ista multiplicanda per numeratorem multiplicatoris, nempe hic per 2 (§. 59).

SCHOLION. 3.

242. *Vix autem opus est ut annotemus, si fractio per numerum integrum multiplicanda, ducendum esse solum numeratorem*

torem in integrum numerum datum. E. gr. factum ex $\frac{3}{7}$ in 2 est $\frac{6}{7}$.

PROBLEMA 25.

243. *Fractionem $\frac{4}{5}$ per aliam fractionem $\frac{2}{3}$ dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur. E.gr. loco $\frac{2}{3}$ scribe $\frac{3}{2}$.
2. Divisor inversus ducatur in dividendum (§. 239): quod prodit $\frac{12}{10}$ seu $1\frac{1}{5}$ (§. 223) est quotus quaesitus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam divisor ad dividendum ut unitas ad quotum (§. 69); erit etiam dividendus ad divisorem ut quotus ad unitatem (§. 169). Quodsi fractiones ad eandem denominationem reducantur (§. 235), cum eaedem sint aequales quotis ex divisione numeratorum per denominatorem communem (§. 238); erit Numerator fractionis dividendae ad Numeratorem dividentis ut fractio dividenda ad fractionem dividentem (§. 181), consequenter in hoc casu numerator dividendae ad Numeratorem dividentis ut quotus ad unitatem (§. 167). Quare fractiones datae ad communem denominatorem reducendae sunt & numerator dividendae per numeratorem dividentis dividi debet, ut habeatur quotus ex divisione fractionis dividendae per divisionem emergens (§. 177). Enimvero dum fractiones duae ad eandem denominationem reducuntur, numerator primae enascitur ex numeratore ipsius dato in denominatorem secundae, numerator vero secundae ex ipsius numeratore dato in denominatorem primae ducto (§. 235). Obtinemus adeo numeros, ex quorum divisione quotus quaesitus emergit, si divisor inversus juxta §. 239 in fractionem dividendam ducatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

244. *Neque vero mirum est, quod quoti numeri integri esse possint. Una enim fractio alteram ter, quater, millies &c. continere potest. Apparet adeo, cum fractiones sint rationes (§. 141), eas dividere idem esse ac rationum rationes investigare*

PROBLEMA 26.

245. *Integrum 3 per fractionem $\frac{4}{7}$ dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur, ut in problemate praecedente (§. 243). E. gr. loco $\frac{4}{7}$ scribe $\frac{7}{4}$.
2. Numerus integer datus 3 ducatur in Numeratorem 7 divisoris inversi.
3. Facto subscribatur ejusdem denominator 4: quod prodit $\frac{21}{4}$ sive $5\frac{1}{4}$ est quotus quaesitus.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum demonstratione problematis praecedentis (§. 243).

CAPUT

CAPUT V.
De
POTENTIIS NUMERORUM, GENESI PRÆSERTIM AC ANALYSI NUMERORUM QUADRATORUM ET CUBICORUM.

DEFINITIO 53.

246. Si numerus quicunque 2 in se ipsum ducatur, factum 4 *Numerus quadratus*; ipse autem hujus intuitu *Radix quadrata* appellatur.

COROLLARIUM.

247. Cum sit ut unitas ad radicem quadratam, ita radix ad ipsum quadratum (§. 66. 246); erit radix media proportionalis inter unitatem & quadratum (§. 156).

DEFINITIO 54.

248. Si numerus quadratus 4 porro per radicem 2 multiplicetur; factum 8 dicitur *Numerus Cubicus* seu *cubus*, & radix 2 ejus intuitu *Radix cubica*.

COROLLARIUM.

249. Cum sit ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum (§. 66. 246) & ut unitas ad radicem ita quadratum ad cubum (66. 248); erit etiam radix ad quadratum ut quadratum ad cubum (§. 167), hoc est, unitas, radix, quadratum & cubus in continua proportione progrediuntur (§. 156) & radix cubica est primus ex duobus numeris mediis continue proportionalibus inter unitatem & cubum.

DEFINITIO 55.

250. Cum istiusmodi multiplicatio in infinitum continuari possit; facta inde genita generali *potestatum, potentiarum, dignitatum* nomine appellari solent. *Vieta* eadem *Magnitudines scalares* vocat.

DEFINITIO 56.

251. *Exponens dignitatis* est numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens quadrati est 2, cubi 3 (§. 246. 248),

DEFINITIO 57.

252. Hodie tantum non omnes dignitates optime distinguunt per exponentes, ita ut radix dicatur *dignitas prima*, quadratum *secunda*, cubus *tertia* &c. Qui Arabes sequun-

ſequuntur, ſingulis potentiis peculiaria imponunt nomina, diverſa tamen ab iis, quibus cum *Diophanto* (x) utuntur *Vieta* (y) & *Oughtredus* (z). Nomina Arabum ſunt: *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, ſeu *biquadratum*, *Surdeſolidum*, *Quadratum Cubi*, *Surdeſolidum ſecundum*, *Quadratiquadrati quadratum*, *Cubus cubi*, *Quadratum Surdeſolidi*, *Surdeſolidum tertium* &c. Nomina Diophanti ſunt: *Latus* ſeu *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, *Quadratocubus*, *Cubocubus*, *Quadratoquadratocubus*, *Quadratocubocubus*, *Cubocubocubus &c.*

SCHOLION.

253. *Multi quadratum vocant* Zenſum. *Hinc compoſita:* Zenſizenſus, Zenſicubus, Zenſizenzenſus, Zenſurdeſolidus &c.

HYPOTHESIS 12.

254. *Qui Arabum denominationibus uſi, potentiarum ſignis ſequentibus utuntur:* 1. R, 2. ʒ/ 3. C, 4. ʒʒ/ 5. ß/ 6. ʒC, 7. Bß/ 8. ʒʒʒ/ 9. CC, 10 ʒß/ 11. Cß &c. *Multo commodius* Carteſius (a) *monito* Kepleri (b) *obſecutus radici ſuperius a dextris jungit exponentem*, e. gr. *ſi* a *fuerit radix, erunt potentiæ ipſam ſequentes* a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 &c. *vel, ſi* a = 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, &c. *ita ut ſit* $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ &c.

DEFINITIO 58.

255. *Quantitatem ad dignitatem deſideratam evehere* idem eſt ac invenire factum ex ipſa aliquoties in ſe ducta emergens. E. gr. 2 evehere ad dignitatem tertiam idem eſt ac invenire factum 8, cujus factores 2 . 2 . 2.

DEFINITIO 59.

256. *Ex dignitate data radicem extrahere, vel latus educere* idem eſt ac invenire numerum 2, qui aliquoties in ſe ipſum ductus datam potentiam (e. gr. tertiam) 8 producit.

SCHOLION.

257. *Cum dignitates ſuperiores non niſi in Analyſi uſum habeant; in præſenti geneſin & analyſin quadratorum & cuborum tantum tradimus. Radices vero quadratas ac cubicas extracturus omnium digitorum numeros quadratos & cubicos noſſe debet, quos ſequens tabula exhibet:*

Radices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubici	1	8	27	64	125	216	343	512	729

(x) in libris Arithmeticorum. (y) in Iſagoge in Artem Analyt. c. 3. f. m. 3.
(z) in Clave Mathem. c. 12. p. m. 34. (a) in Geometria. (b) Harmonices mundi lib. 1. f. 35. 36.

DEFINITIO 60.

258. *Radix* tam quadrata, quam cubica, aut dignitatis ſuperioris cujuscunque dicitur *binomia*, ſi ex duabus; *trinomia*, ſi ex tribus; *multinomia* ſive *polynomia*, ſi ex pluribus, quam duabus partibus conſtat.

THEOREMA 51.

259. *Potentiæ ejusdem gradus ſunt in ratione tantuplicata laterum, quot unitates habet exponens earundem, hoc eſt, quadrata habent rationem duplicatam, cubi triplicatam, quadrato quadrata quadruplicatam &c. rationem ſuarum radicum.*

DEMONSTRATIO.

Potentiæ oriuntur, ſi radices A & B aliquoties in ſeipſas ducas (§. 250). Quare cum eadem radix A ad eandem radicem B eandem habeat rationem; ratio quadratorum componitur ex duabus, cuborum ex tribus, quadrato-quadratorum ex quatuor &c. reliquarum potentiarum ex tot rationibus ſimilibus, quot exponens earundem habet unitates. Ergo quadrata habent rationem duplicatam, cubi triplicatam &c. ceteræ potentiæ rationem tantuplicatam ſuarum radicum, quot unitates habet exponens earundem (§.159).

THEOREMA 52.

260. *Quantitatum proportionalium potentiæ eædem ſunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Habent enim potentiæ eædem rationem multiplicatam ipſarum A : B, B : C, C : D, D : E &c. vel A : B, C : D, E : F &c. (§.259). Sed hæ rationes omnes inter ſe eædem ſunt *per hypoth.* Ergo potentiæ iſtæ v. gr. A^3, B^3, C^3, D^3, E^3, &c. conſtituunt rationes compoſitas ex rationibus, quarum ſingulæ ſingulis æquales ſunt (§.250), conſequenter easdem (§.218), atque adeo proportionales ſunt (§.155). *Q. e. d.*

THEOREMA 53.

261. *Numerus quadratus radicis binomiæ componitur ex quadrato partis primæ, ex facto dupli primæ in alteram & ex quadrato partis alterius.*

DEMONSTRATIO.

Prodit enim numerus quadratus, ſi radix in ſeipſam ducitur (§. 246). Utraque vero pars radicis ſigillatim ducitur in utramque ſimul (§.111) Quare productum componi debet 1. ex facto partis primæ in ſeipſam, hoc eſt, ex quadrato partis primæ (§.246), 2 ex facto partis primæ in ſecundam & ex facto ſecundæ in primam, hoc eſt,

eſt, ex duplo facto primæ in ſecundam, ſeu ex facto dupli primæ in ſecundam (§.207.208), 3 ex facto partis ſecundæ in ſeipſam, hoc eſt, ex quadrato partis ſecundæ (§.246). *Q. e. d.*

SCHOLION.

262. *Demonſtratio ocularis, ſi in quocunque exemplo ſingulari multiplicatio non actu peragitur, ſed ſaltem indicatur: quo in caſu exempli univerſalis vices tuetur, id nimirum non infelicius quam figura in Geometria repræſentans, quod ſingularia in univerſum omnia commune habent. E. gr. ſit radix binomia* 34 *aut* 30+4; *erit*

30+4	*Radix binomia*
30+4	
16	*Quadratum partis II.*
120 ⎫	*Facta ex I in II.*
120 ⎭	
900	*Quadratum partis I.*
1156	*Quadratum totius.*

Egregium hoc artificium vires imaginationis mire extendit & intellectum juvat tam in demonſtrationibus concipiendis, quam in propoſitionibus inveniendis.

COROLLARIUM 1.

263. Cum pars dextra ſive ſecunda inter unitates, ſiniſtra ſive prima inter decades locum obtineat (§. 50); quadratum illius in loco dextimo, factum ex unius duplo in alteram in ſecundo, quadratum denique in tertio a dextimo terminari debet (§.49).

SCHOLION 2.

264. *Scilicet quadratum partis dextimæ nullam adjunctam habet cyphram; duplo facto ex parte una in alteram cyphra una, quadrato autem partis ſiniſtræ duæ adjunguntur, ut numeri ſolitarie poſiti juſtum locum nanciſcantur* (§.49).

COROLLARIUM 2.

265. Si radix multinomina fuerit; partes duæ aut plures ſiniſtimæ habeantur pro una, & extemplo patebit, quadratum numeri cujuſcunque componi ex quadratis ſingularum partium & factis ex duplo partis cujuslibet in omnes ipſa ſiniſteriores: ut adeo theorema unum compoſitioni omnium numerorum quadratorum ſufficiat.

SCHOLION 3.

266. *Sit radix* 346: *ſumatur* 340 *pro parte una & 6 pro altera; erit* (§.261)

340+6	
340+6	
36	*Quadratum partis* III.
2040 ⎫	*Facta ex parte* III *in* I *&* II *ſimul*
2040 ⎭	
1600	*Quadratum partis* II.
12000 ⎫	*Facta ex* I *in* II.
12000 ⎭	
90000	*Quadratum partis* I.
119716	*Quadratum totius.*

COROLLARIUM 3.

267. Quonam in loco ſingula producta terminentur, ex corollario primo & ejus ſcholio intelligitur (§. 263. 264). Habenda nimirum eſt ratio cyphrarum numeris in ſe invicem ductis adjungendarum, ſi ſolitarii ponantur, ut juſtum nanciſcantur locum (§.49).

SCHOLION 4.

268. *Extractio radicis quadratæ, alias tædii plena, facillima evadit, ubi quadratis per theorema præsens componendis operam prius impenderis.*

PROBLEMA 27.

269. *Ex numero quocunque dato radicem quadratam extrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Numerus propositus distinguatur in classes, binas notas classi unicuique assignando, initio a dextra facto. Tot enim erunt partes radicis, quot classes habentur (§. 265. 267). Notandum vero, quod classi sinistimæ interdum nonnisi nota unica relinquatur.
2. Jam cum in classe sinistima reperiatur quadratum notæ sinistimæ radicis (§. *cit.*); in Tabula radicum (§. 175) quæratur numerus quadratus ei, qui classem sinistimam occupat, vel æqualis, vel eodem proxime minor, & ex ipso subtrahatur; radix vero ejus post lunulam scribatur.
3. Quoti inventi duplum ponatur sub nota sinistima classis subsequentis & inde porro sinistrorsum, si ex notis pluribus constiterit. Investigetur novus quotus *per abacum Pythagoricum* (§. 109), inventusque post lunulam scribatur: est enim pars secunda radicis (§. 261. 210).
4. Idem quotus ponatur sub nota dextima illius classis & factum ex numero subscripto integro in divisorem (§. 263) subducatur, ut in divisione moris est.
5. Quodsi operatio juxta regulam tertiam & quartam in reliquis classibus iteretur; prodibit radix quæsita (§. 265. 267).

Ex.

```
11|56(34        11|97|16(346
 9|::            9|::|::
 -------       -----------
 2|56            2|97|::
   64             64|::
  256            256|::
 -------       -----------
    0              41|16
                    6|86
                   41 16
                 ---------
                     0
```

PROBLEMA 28.

270. *Radicem quadratam ex fractione data extrahere, cujus numerator & denominator est numerus quadratus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam numerum fractum per fractum multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius

terius & denominatorem pariter in denominatorem alterius ducit (§. 239), quadratum autem ex ductu ejusdem numeri in seipsum enascitur (§. 246); radicem quadratam extracturus eam sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahere tenetur.

Ita radix quadrata ex $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$, ex $\frac{49}{144}$ vero $\frac{7}{12}$

COROLLARIUM I.

271. Cum numeri integri ad fractionem denominatoris dati reducantur, si per hunc multiplicentur & facto tanquam numeratori denominator datus subscribatur (§. 224); si numerus datus, qui quadratus non est, ad fractionem reducatur, cujus denominator est quadratus & ex fractione extrahatur radix (§. 270): quæ prodit, fractio radicem prope veram exhibet in istiusmodi partibus, quas denominatoris quadrati radix indicat.

SCHOLION I.

272. *E. gr. Si ex 2. extrahenda radix prope vera, quæ non deficiat in partibus sextis; duc 2 in 36, ut prodeat fractio* $\frac{72}{36}$, *cujus radix* $\frac{8}{6}$ *sive* $1\frac{2}{6}$ *exhibet radicem a vera magnitudine parte sexta non differentem, seu cujus defectus minor est quam* $\frac{1}{6}$.

COROLLARIUM 2.

273. Quoniam numerum per articulum primarium, veluti 10, 100, 1000 &c. multiplicaturus eidem non nisi cyphras 0, 00, 000 &c. unitati adhærentes adjungere teneris (§. 112); radicem prope veram in fractionibus decimalibus desiderans numero, qui quadratus non est, 2, 4, 6 &c. cyphras junge dextrorsum & operationem continua: ita enim prodibit radix prope vera in partibus decimis, centesimis, millesimis &c.

SCHOLION 2.

274. E. gr. *Sit extrahenda radix quadrata ex 345; prodibit* $\frac{1857}{100}$.

3 | 45 ($18\frac{57}{100}$
1 | : :
―――――
2 | 45
(28)
224 |
―――――
2.1. | 0.0
(3 | 65)
1 8 2 5
―――――
27.5. | 00
(37 | 07)
―――――
259 49
―――――
1 5 5 1

SCHOLION 3.

275. *Si tabulis numerorum quadratorum pro radicibus ab* 1 *usque ad* 1000 *utaris; in iis evolvi potest numerus quadratus proxime minor eo, qui tres classes fini-*

```
8|69 7.5 (294 9/10
8|64|36 (
————
 539.|0.0
 (58|89)
 530 01
————
  899
```

finisteriores occupat. Ita sine ullo labore habentur tres notæ priores, e.gr. in nostro casu 294. Plures notæ una inveniuntur, si tabulæ longius extendantur.

THEOREMA 54.

276. *Numerus cubicus radicis binomiæ componitur ex numeris cubicis duarum partium, ex facto tripli quadrati partis primæ in secundam & ex facto tripli quadrati partis secundæ in primam.*

DEMONSTRATIO.

Numerus cubicus prodit, si quadratum per radicem multiplicetur (§. 248). Sed quadratum radicis binomiæ componitur ex quadratis partium & facto duplo ex parte una in alteram (§. 261). Quare cubus componitur ex cubo partis primæ, ex triplo facto quadrati partis primæ in secundam, ex triplo facto quadrati partis secundæ in primam, hoc est, ex facto tripli quadrati partis primæ in secundam, & facto tripli quadrati partis secundæ in primam (§. 207) atque ex cubo partis secundæ (§. 246. 248). *Q. e. d.*

SCHOLION 1

277. *Demonstrationem ocularem denuo sistit exemplum singulare, in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit e. gr. radix 34 seu 30 + 4, erit*

```
   30+4  Radix
————
     16  Quadrat. part. II.
    120 { Facta ex I in II
    120 {
    900  Quadrat. part. I.
————
     64  Cubus part. II
    480 { Facta ex quadrat. II in I.
    480 {
   3600  Factum ex quadrat. I in II.
    480  Fact. ex quadrat. II in I.
   3600 { Facta ex quadrat. I in II.
   3600 {
  27000  Cubus part. I.
————
  39304  Cubus totius.
```

COROLLARIUM 1.

278. Cum pars dextra inter unitates, sinistra inter decades locum obtineat (§. 50); numerus cubicus dextræ in loco dextimo, factum ex triplo quadrato ejus in sinistram in secundo, factum ex triplo quadrato sinistræ in dexteram in tertio, cubus denique partis sinistræ in quarto loco terminatur (§. 49).

COROLLARIUM. 2.

279. Si radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ dextimæ pro una habentur, ut binomiæ formam mentiatur; extemplo patet, quod cubus quicunque componatur ex cubis singularum partium radicis & ex factis tripli quadrati quarumlibet sinisteriorum in proxime dexte-

dexteriorem, itemque ex factis tripli quadrati cujuslibet dexterioris in omnes sinisteriores.

SCHOLION 2.

280. *Sit radix 346. Sume 340 pro parte una radicis, erit 6 pars altera, consequenter* (§. 276).

346

346

90000 *Quadrat. part.* I.

12000 } *Facta ex* I *in* II.

12000 }

1600 *Quadrat. part.* II.

115600 *Quadrat.* I *&* II *simul*

2040 } *Facta ex* III *in* I *&* II

2040 } *simul.*

36 *Quadrat. part.* III.

27000000 *Cubus part.* I.

3600000 } *Facta ex quadr.* I *in* II.

3600000 }

480000 *Fact. ex quadr.* II *in* I.

3600000 *Fact. ex quadr.* I *in* II.

480000 } *Fact. ex quadr.* II *in* I.

480000 }

64000 *Cubus part.* II.

693600 } *Facta ex quadr.* I *&* II

693600 } *simul in* III.

12240 *F. ex quad.* III *in* I *&* II *sim.*

693600 *F. ex quadr.* I *&* II *sim. in* III.

12240 } *Fact. ex quadr.* III *in* I *&*

12240 } II *simul.*

216 *Cubus part.* III.

41421736 *Cubus totius.*

Notandum scilicet, sectionem numeri in duas partes aquales arbitrariam esse, cumque theorema generaliter de radice utcunque in duas partes aequales divisa loquatur, idem quoque ad quamlibet sectionem applicari posse. E. gr. *numerus 346 non modo stante theoremate in 340 & 6, vel in 300 & 46, verum etiam in 195 & 151, in 89 & 257, & in duas quascunque alias partes dividi potest: id quod etiam tentanti palam fit. Ceterum idem valere in numeris quadratis, immo in genere in potentiis quibuscunque, me tacente intelligitur.*

COROLLARIUM 3.

281. In quibus autem locis singula terminentur facta, ex corollario primo (§. 278) colligitur: habenda nimirum & hic est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur. *Vide exemplum in schol. praec,* (§. 280).

PROBLEMA 29.

282. *Ex numero dato radicem cubicam extrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Numerus datus distinguatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto. Etenim ex tot notis radix componitur, quot classes emergunt (§. 278. 281). Notandum vero, non repugnare, ut classi sinistimae una, vel duae notae cedant.
2. In Tabula radicum (§. 257) quaeratur

ratur numerus cubicus eo proxime minor numero, qui in classe sinistima continetur, nisi ipse in eadem inveniatur, atque ab hoc subtrahatur; ejus vero radix post lunulam scribatur: est enim pars prima radicis (§. 274).

3. Quoti inventi quadratum triplum (§. 278. 281) scribatur sub nota sinistima classis subsequentis & inde porro sinistrorsum, si ex pluribus notis constiterit: quo facto quæratur quotus, qui erit pars secunda radicis (§. *cit.* & §. 210).

4. Divisor ducatur in novum quotum & productum sub eo deleto scribatur, sub nota vero media classis ejusdem terminetur factum ex triplo quadrato novi Quoti in præcedentem; sub dextima denique cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam summam collecta ex notis numeri cubici suprascriptis subtrahantur (§. *cit.*).

5. Quodsi operatio per reliquas classes juxta regulam tertiam & quartam continuetur; prodibit radix quæsita (§: 275).

E. gr 47|437|928 (362
27|
——|——
20|437|
Divisor (2|7)..
Fact. ex D. in Q. 16 2 ..
Fac. ex 3 □N. Q. in pr. 324.
Cubus N. Q. 216
Summa factor. 19656
781|928
Divisor (388|8)..
Fact. ex Div. in Q. N. 777 6 ..
Fact. ex 3 □N. Q. in pr. 4 3 2.
Cubus N. Q. 8
Summa factorum 781928
000000

PROBLEMA 30.

283. *Radicem cubicam ex fractione extrahere, cujus numerator & denominator cubus est.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Eodem, quo supra (§. 270), modo patet, radicem sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahendam esse.

Ita radix ex $\frac{27}{343}$ est $\frac{3}{7}$, ex $\frac{64}{729}$ vero $\frac{4}{9}$.

COROLLARIUM 1.

284. Hinc porro eodem, quo supra, (§. 271), modo consequitur, radicem prope veram in fractione dati denominatoris inveniri, si numerus, qui cubus non est, per hujus denominatoris cubum mul-

multiplicetur & radici cubicæ ex facto extractæ tanquam numeratori denominator datus subjiciatur.

SCHOLION 1.

285. E. gr. *Si ex 12 extrahenda radix cubica prope vera, defectu minore quam $\frac{1}{8}$; ducatur 12 in 512 cubum ipsius 8 & ex facto 6144 extrahatur radix cubica 18, erit $\frac{18}{8}$ s. $2\frac{2}{8}$ radix prope vera, cujus defectus est minor quam $\frac{1}{8}$.*

COROLLARIUM 2

286. Immo inde ulterius eodem, quo supra (§. 273), modo fluit, radicem prope veram in fractionibus decimalibus inveniri, si 3, 6, 9 &c. cyphræ numero non cubo dextrorsum pro decimis, centesimis, millesimis &c. partibus jungantur & operatio (§. 282) continuetur.

SCHOLION. 2.

287. E. gr. *Sit extrahenda radix cubica ex 3; eam reperies* $1\frac{44}{100}$.

```
 3( 1 44/100
 1(
 ----------
 2.|0.0.0
   |3. .
 1 2. .
   4 8.
     64
 ----------
   1744
 ----------
   256.|0.0.0
    58|8. .
   2 3 5 2. .
       6 7 2.
           64
 ----------
   2 4 1 9 8 4
 ----------
     1 4 0 1 6
```

(Wolffii Math. Tom. I.)

SCHOLION. 2.

288. *Si tabulis numerorum cubicorum utaris, idem operæ compendium facere licet, quod supra (§. 275) in extrahenda radice quadrata commendavimus.*

PROBLEMA 31.

289. *Examinare extractionem radicis quadratæ ac cubicæ.*

RESOLUTIO.

I. Radix quadrata inventa ducatur in se ipsam & facto residuum, si quod fuerit, addatur. Quodsi numerus prodeat, ex quo radix extracta; erit numerus inventus radix quadrata dati vel exacta, vel (si talem non habeat) prope vera (§. 246).

```
   18.57
   1857
 -------
   12999
   9285
  14856
  1857
 -------
 3448449
    1551
 -------
 3450000
```

E. gr. Radicem quadratam prope veram ex 345 supra (§. 274) reperimus $18\frac{57}{100}$. Duc radicem 18. 57 in seipsam & facto 3448449 adde residuum 1551: prodibit numerus 345, ex quo extractio fieri debebat, quatuor cyphris auctus: ut in extractione ad inveniendas centesimas factum fuerat.

II. Radix cubica inventa ducatur in seipsam, & factum denuo in eandem. Producto posteriori addatur, si quod fuerit, residuum. Quodsi numerus prodeat,

deat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta (§.248).

E. gr. Superius (§. 287) ex 3 extracta radix est $1\frac{44}{100}$. Duc hanc radicem 1.44 in seipsam & factum 20736 denuo in 1.44. Producto alteri 2985984 adde, quod supra residuum erat, 14016. Aggregatum est radix 3 sex cyphris aucta, ut in operatione factum fuerat.

```
   1.44
   1.44
 ------
    576
   576
  144
 ------
  20736
    144
 ------
  82944
 82944
20736
-------
2985984
  14016
-------
3000000
```

THEOREMA 55.

290. *Exponens rationis Quadratorum est quadratum, cuborum cubus & in genere potentiarum cujuscunque gradus potentia ejusdem gradus exponentis radicum.*

DEMONSTRATIO.

Quadrata enim habent rationem duplicatam, cubi triplicatam & in genere potentiæ cujuscunque gradus rationem multiplicatam suarum radicum (§.259) Quare cum exponens rationis compositæ sit æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium (§. 214), exponens vero rationum simplicium, ex quibus componuntur duplicatæ, triplicatæ & in genere multiplicatæ quæcunque, idem sit (§. 159); exponens rationis duplicatæ erit quadratum (§. 246), triplicatæ cubus (§. 248) & in genere multiplicatæ cujuscunque potentia exponentis radicum (§. 250). *Q. e. d.*

THEOREMA 56.

291. *Si ex divisione numeri quadrati per quadratum, cubi per cubum & in genere potentiæ cujuscunque per aliam similem, numerus integer prodit; etiam ex divisione radicis per radicem integer prodire debet.*

DEMONSTRATIO.

Quotus ex divisione numeri quadrati per quadratum, cubi per cubum & in genere potentiæ cujuscunque per aliam similem emergens est exponens rationis quadratorum, cuborum, vel in genere potentiarum similium se mutuo dividentium (§ 136), adeoque quadratum, cubus & in genere potentia exponentis rationis radicum (§.290). Quare cum idem sit numerus rationalis integer, *per hypoth.* erit idem numerus rationalis integer quadratus, cubus vel potentia alterius gradus: cujus quoniam radix itidem rationalis integer

integer esse debet (§.250); etiam exponens radicum numerus rationalis integer erit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

292. Quare si radix radicem non metitur, nec quadratum quadratum, nec cubus cubum, nec potentia quæcunque aliam similem metitur (§. 74), consequenter fractio integro major ex istiusmodi quadratis, cubis vel potentiis quibuscunque similibus composita ad numerum integrum irreducibilis (§.223).

THEOREMA 57.

293. *Si numeri integri non datur radix in integris, nec dabitur per fractos.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus dari numerum fractum, qui sit radix. Ex ejus itaque iterata multiplicatione per se ipsum produci debet numerus datus (§.250). Sed quotiescunque fractum per seipsum multiplicas, productum semper est fractus (§. 239) isque in præsente casu ad integrum irreducibilis (§ 292). Quare cum numerus datus sit integer, *ex hypoth.* fractus ejus radix esse nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

294. Jam cum numeri primi in se ex nullo alio numero in se aliquoties ducto oriantur (§.75); ex numeris primis in se nulla perfecta radix extrahi potest in integris (§.256), adeoque nec per fractos dari potest (§ 293).

HYPOTHESIS 13.

295. *Interdum utile est, extractionem radicis tantum indicari, præsertim si perfecta haberi nequit. Est autem signum radicale sequens* $\surd$: *cui in vertice jungitur exponens dignitatis, si altioris gradus, quam quadrata.* E. gr. $\surd 2$ denotat radicem ex 2; $\sqrt[3]{5}$ denotat radicem cubicam ex 5.

SCHOLION.

296. *In Geometria & Analysi demonstrabitur, tales radices, quæ actu dari non possunt, esse ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam, consequenter numeros* (§.10) *eosque irrationales, cum ex hypothesi rationales non sint. Dicuntur vulgo numeri* surdi: *quamvis olim hujus vocis significatus strictior fuerit*(b). *Et olim, & nunc interdum* radicales *nuncupari sueverunt.*

M 2 CAPUT

(b) Vid. Stifelius in Arithm. integra lib. 2. c. 12 p. 134.

CAPUT VI.
De
REGULIS PROPORTIONUM.

THEOREMA 58.

297. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum æquatur facto mediarum.*

DEMONSTRATIO.

6:3 = 8:4	A:B = C:D (*per hypoth.* & §. 152). Ergo AD: BC = CD: DC (§.185). Sed CD = DC (§.207). Igitur AD = BC (§.149). *Q. e. d.*
4 3	
24 = 24	

THEOREMA 59.

298. *Si fuerint tres quantitates continue proportionales; factum extremarum est æquale mediæ quadrato.*

DEMONSTRATIO.

6 : 12 = 12 : 24	Quoniam enim A:B = B:C (*per hypoth.* & §. 156. 152); erit AC = BB (§.297). Sed
12 6	
144 = 144	

BB est quadratum ipsius B (§.250). Ergo factum extremarum AC æquatur quadrato mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 60.

299. *Si quantitas AD producta ex duabus aliis se mutuo multiplicantibus A & D fuerit æqualis alteri BC ex duabus aliis B & C eodem modo productæ; erit A: B = C: D.*

DEMONSTRATIO.

6 8	AC : AD = C : D (§. 178). Sed AD = BC, *per hypoth.* Ergo AC : BC = C:D (§. 168), consequenter A : B = C : D (§.181). *Q. e. d.*
4 3	
24 = 24	
4:8 = 3:6	

COROLLARIUM.

300. Si ergo in serie quatuor quantitatum factum ex secunda in tertiam æquale facto ex prima in quartam; erunt quantitates istæ proportionales.

PROBLEMA 32.

301. *Inter duos numeros (8 & 72) medium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Datorum unus 72 multiplicetur per alterum 8 (§.111).
2. Ex facto 576 extrahatur radix quadrata 24 (§.269): quæ erit numerus quæsitus (§.298).

PROBLEMA 33.

302. *Datis tribus numeris 3, 12, 5 quartum; aut duobus, tertium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Secundus 12 ducatur in tertium

5, aut

5, aut in altero casu secundus in seipsum.

2. Factum 60 dividatur per primum 3. Quotus 20 est quartus, in altero casu tertius quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Si enim terminum secundum per tertium, aut in altero casu secundum per seipsum multiplicas; factum ex primo in quartum, in casu altero ex primo in tertium prodit (*§.297.298*). Quodsi ergo hoc per primum dividis; quotus est terminus quartus, in casu altero tertius (§.210). *Q. e. d.*

COROLLARIUM *1.*

303. Data quælibet fractio converti potest in aliam æqualem datæ denominationis. Quodsi enim *per probl. præs.* ad denominatorem & numeratorem fractionis datæ atque denominatorem desideratæ quæratur numerus quartus proportionalis; erit is numerator fractionis quæsitæ (§.225). E. gr. sit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in aliam cujus denominator 24, reperietur ea $\frac{16}{24}$.

3 — 2 — 24
2
———
48

COROLLARIUM. 2.

304. Quodsi numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur, pro denominatore assumitur; valor fractionis datæ in mensura vulgari reperitur. E. gr. Cum apud nos thalerus in 24 grossos dividatur, ex ante allato exemplo apparet, grossos æquivalere duabus tertiis unius thaleri.

COROLLARIUM 3.

305. Si vero denominator assumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita reperiemus $\frac{2}{3}$ — $\frac{666666}{1000000}$ &c. in infinitum; $\frac{4}{5}$ — $\frac{8}{10}$; $\frac{3}{7}$ — $\frac{42857}{100000}$ fere.

SCHOLION 1.

306. *In fractionibus decimalibus denominator omitti solet, quia ex meris cyphris & præfixa unitate constat. Ejus vero loco punctum* (.) *numeratori præfigitur & loca vacua replentur cyphra, ita ut e. gr. duæ cyphræ præponantur, si fractio millesimis incipiat. Ita loco* $\frac{23}{100}$ *scribimus* 0.23; *loco* 5$\frac{47}{10000}$ *scribimus* 5.0047. *Est vero harum fractionum non exiguus in Mathesi usus, quas primus in condendis Tabulis sinuum adhibuit* Johannes Regiomontanus.

SCHOLION 2.

307. *Resolutio hujus problematis vulgo* Regula trium *appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Usus ejus amplissimus tam in vita communi, quam in scientiis. Hinc* Regula aurea *vocatur. Facile autem apparet, hac regula nullibi esse utendum, nisi ubi de numerorum datorum proportione constiterit.* E. gr. *Sit vas ingens aqua repletum per exiguum in fundo foramen effluxura, si aperiatur. Ponamus, intra 2 minuta prima effluere 3 congios. Inveniri de-*

bet, quanto tempore 100 *congii effluant. Tres in hoc casu dantur numeri; quartus inveniendus. Enimvero vel ipsa experientia docet, aquam sub initium celerius, postea tardius effluere, consequenter quantitatem aquæ effluentis non esse tempori proportionalem. Quamobrem hæc quæstio per regulam trium solvi nequit.*

SCHOLION 3.

308. *Quæ in commercium veniunt, pretiis suis proportionalia sunt. Qui enim duplum mercis accipit, duplum; qui triplum accipit, triplum pretium solvit. Dato igitur pretio quantitatis cujusdam determinatæ mercis, per regulam trium invenitur pretium quantitatis cujuscunque alterius datæ, aut quantitas mercis dato cuicunque alteri pretio respondens. E. gr. pretium 3 librarum sunt 4 thaleri, quantum est pretium 17 librarum? Cum sit, ut 3 libræ ad 17 libras, ita illarum pretium (quod est 4 thalerorum) ad pretium harum; hoc quidem ita invenitur:*

3L. — 17L. — 4 Th.
4 2
68 ($22\frac{2}{3}$ th.
———
68 33

Item: 3 libræ veneunt 4 thaleris, quot $22\frac{2}{3}$ *thaleris? Cum sint ut 4 thaleri ad* $22\frac{2}{3}$, *ita 3 libræ ad quæsitas; harum numerus ita innotescit:*

4 Th. — $22\frac{2}{3}$ Th. — 3 L.
3 2
——— 68 (17 L.
68 44

Hinc simul patet, quomodo regula trium examinetur, hoc est, inveniatur, utrum operatio per eam rite peracta, nec ne.

SCHOLION 4.

309. *Similiter merces operariorum est tempori proportionalis, quo labore defunguntur, etiam quantitas laboris eidem tempori proportionalis, si æqualibus articulis æqualia pensa absolvuntur; eadem numero operariorum proportionalis, si pensa æqualia singuli absolvunt. E. gr. Intra 2 horas 4 libri folia perleguntur: Quanto horarum spatio 360 perlegi poterunt?*

6F. — 360 F. — 2 H.
2 1
——— 720 (120 H.
720 666

SCHOLION 5.

310. *Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, quam res ipsis respondentes: ad homogeneos igitur reducendi. Ita thaleri in grossos, grossi in nummos, libræ in semuncias, horæ in minuta &c. convertuntur. E. gr. 3 libræ & 4 semunciæ veneunt 2 thaleris & 4 grossis, quanti libræ 2? Calculus talis est*

3. L. 4 S. — 2 L. — 2 Th. 4. gr.
32 32 24
100 S. — 64 S. — 52 gr.
52
———
128
320 3328 ($33\frac{28}{100}$ seu $\frac{7}{25}$ g.
——— 1100
3328

Quod si

Quodsi nosse cupias, quot nummis conveniant $\frac{7}{25}$ *grossi, ita reperies* (§. 304)

```
25 — 7 — 12
      7      29 (
     ——      84   3 9/25 num.
     84      25
```

Si nummus ulterius divideretur, poterat quoque valor $\frac{9}{25}$ *unius nummi eodem modo reperiri: sed cum tanti non sit, ut inveniatur, fractio illa tuto negligitur.*

SCHOLION 6.

311. *In scriptis Arithmeticorum* Regula trium inversa *occurrit, qua terminus datorum primus duci jubetur in secundum & factum dividi per tertium, contraria nimirum ratione, qua in* Regula trium directa *usi sumus* (§. 302), *quia scilicet termini contra naturam proportionis ordinantur. Sed ea opus non est, si numeri dati, prout proportio exigit, ordinentur. E. gr. 125 milites operi exstruendo 6 menses impendunt: quantus requiritur militum numerus, ut intra 2 absolvatur. Evidens est, quod sit, ut spatium 2 mensium ad spatium 6 mensium, ita numerus militum, qui opus intra sex menses absolvunt, ad numerum militum, qui intra duos idem exstruunt. Quo minore enim temporis intervallo exstruitur, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum:*

```
2 M. — 6 M. — 125 Mil.
                6
              ———
 11           750
 750 (375 Mil.
 222 (
```

SCHOLION 7.

312. *Interdum gemina regulæ trium applicatione opus est, antequam numerus quæsitus innotescat. Ea vulgo pro peculiari regula venditatur & ab aliis* Regula de quinque, *ab aliis* Regula composita *appellatur. E. gr. 300 thaleri dant intra 2 annos usuram 36 thalerorum, quantam dabunt 20000 thaleri intra 12 annos. Hic per regulam trium primum invenitur, quanta sit usura a 20000 expectanda intra 2 annos. Dein per eandem investigatur, quanta eadem intra 12 annos existat:*

```
300 Th. — 20000 Th. — 36 Us.
          36
        ———         1
        720000    720000 (2400
                  33300  ( Us.
2 A. — 12 A. — 2400 Us.
                12
              ————
28800 (14400 Us.  4800
222   (           24
              ————
              28800
```

SCHOLION 8.

313. *Exemplis istiusmodi regula trium semel applicata satisfacere potest Cum enim in nostro casu bis 300 thaleri eandem dent usuram intra 1 annum, quam 300 intra 2, & duodecies 20000 tantam intra 1 annum, quanta 20000 intra 12; omissis temporis circumstantiis ita inferatur: bis 300, id est 600 thaleri dant usuram (intra annum scilicet) 36, quantam*

tam dabunt duodecies 20000 , *id est* 240000 *thaleri* (*itidem intra annum?*)

```
600 Th. — 240000 Th. — 36 uf.
     36
  -------
  1440000 22
  72          6840000 (14400
  -------     6666600 (
  8640000
```

Posterior hac methodus priori præfertur, quod in illa ad fractionum tædia sæpe prolabimur.

SCHOLION 9.

314. *Dantur & alii casus, in quibus iterata regulæ trium applicationi supersedere non licet. Ita, si commune sociorum lucrum vel damnum inter eos distribuendum, toties applicatur, quot sunt socii. Est enim ut summa collatorum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale ad lucrum vel damnum partiale ipsi respondens. E. gr. Lucrum commune trium personarum est* 2000 *thalerorum, collatum primi* 1000, *secundi* 500, *tertii* 300: *inveniri debent lucra partialia singulis convenientia. En typum calculi:*

```
Collatum primi   1000 Th.
         secundi  500
         tertii   300
         ----------
Summa Collatorum 1800 Th.
  1800 Th. — 1000 Th. — 2000 Th.
                 2   000
              ---------
               2000000
```

```
  111
 12222
 2000000 (1111 2/18 Lucrum primi.
 1888800 (
  111
  1800 Th. — 500 Th. — 2000 Th.
                2  000
             --------
              1000000

  111
  555
 1000000 (555 10/18 Lucrum secundi.
  188800 (
   11
  1800 Th. — 300 Th. — 2000 Th.
                2  000
             --------
              600000

  33
 3666
 600000 (333 5/18 Lucrum tertii.
 188800 (
  11
```

EXAMEN.

```
1111 6/18 Lucrum primi
 555 10/18       secundi
 333 6/18        tertii
---------
2000 Th. Lucrum commune.
```

SCHOLION 10.

315. *Non desunt alia exempla, quæ calculum eundem requirunt, ut cum in Medicina aut artibus aliis ex data ratione, quam pondera miscibilium inter se habent, inveniuntur pondera miscibilium requisita, ut mixtum integrum sit ponde-*

ponderis dati. E. gr. Tria simplicia compositionem alicujus medicamenti ingrediuntur, dosis unius est 4, alterius 5, tertii 2 unciarum: inveniri debent doses singulorum requisitae, ut pondus compositi sit 8 librarum. En calculi typum:

Pondus	primi	simplicis	4 Unc.
	secundi		5
	tertii		2
		Summa	11 Unc.

11 Unc. — 8 L. — 4 Unc.
16

128 Unc.
4

512 — $46\frac{6}{11}$ pond. simp. primi

11 Unc. — 128 Unc. — 5 Unc.
5
192

640 — $58\frac{2}{11}$ Pond. simp. secund.

11 Unc. — 128 Unc. — 2
2
33

256 — $23\frac{3}{11}$ Pond. simp. tertii.

EXAMEN.

Pondus simplicis primi		$46\frac{6}{11}$ Unc.
	secundi	$58\frac{2}{11}$
	tertii	$23\frac{3}{11}$
Pondus mixti		128 Unc. = 8 lib.

SCHOLION 11.

316. *Subinde compendiis locus datur, quae* Practicae Italicae *nomen ferunt. Ex iis utilissima commemoramus. Nimirum quoniam per regulam trium ad tres numeros datos invenitur quartus proportionalis* (§. 302), *primus & secundus* (§. 181) *vel etiam primus & tertius* (§. 183) *per eundem, si fieri potest, numerum exacte dividantur & quoti in ipsorum loca surrogentur: ceu ex subsequente apparet exemplo.*

Pretium 3 Lib. *est* 9 Thal. *quantum* 7 libr.
3) 1 3 3

Fac. 21 Thal.

Pretium 14 Lib. *est* 26 Thal. *quant.* 7 libr.
7) 2 2) — 1

Fac. 13 Thal.

SCHOLION 12.

317. *Si numerus primus vel tertius fuerit 1 & alter eorum non nimis magnus, medius autem heterogeneus, absque reductione in* schol. 5 (§. 310) *praescripta calculus initur, ut sequens exemplum docet.*

Pret. 1 Lib. *est* 3 th. 8 gr. 6 num. *quant.* 5 L.
5

16 th. 18 gr. 6 num.

Manifestum scilicet est, bis 6 nummos conficere grossum unum, adeoque quinquies 6 grossos 2, & nummos 6. Similiter ter 8 grossi thalerum 1, & insuper bis 8 grossos 16 efficiunt. Quod si ergo thalerus iste 15 reliquis, & 2 priores grossi 16 reliquis addantur; prodibit pretium quaesitum 16 th. 18 gr. 6 num.

SCHOLION 13.

318. *Si terminus primus vel secundus fuerit 1, & in priore casu secundus aut tertius, in posteriore primus in factores resolvi potest; integram saepe operationem sine scriptionis subsidio mens absolvit: id quod exempla, quae sequuntur, docent.*

Pretium 1 Libr. *est* 24 th. *quantum* 20 libr.

4 4
6 80
 6

Fac. 480 th.

Pretium 12 libr. *est* 18 th. *quantum* 1 libr.

3 2
4 ~~18~~6 ($1\frac{1}{2}$ th.
 ~~12~~4

Potest etiam numerus datus resolvi partim in factores, partim in partes componentes. E. gr. 1 *libra constat* 9 *grossis, quodnam est pretium* 35 *librarum?*

Quoniam	1 *libra constat* 9 *grossis*		
constabunt	3 *lib.*	1 *thal.*	3 *gr.*
	30 *lib.*	11 *thal.*	6 *gr.*
	5 *libr.*	1 *thal.*	21 *gr.*
	35 *lib.*	13 *thal.*	3 *gr.*

Hic nempe numerus 35, *per quem multiplicatio fieri debet, resolvitur in partes* 30 & 5, *pars vero altera* 30 *in factores* 3 & 10.

SCHOLION 14.

319. *Si numerorum datorum unus fuerit 1, multa compendia similia multiplicatio & divisio sine abaci Pythagorici subsidio peragenda* (§. 116. 120), *suppeditat. E. gr. pretium 9 librarum est 20 thalerorum, quantum est pretium unius? Statim hic apparet, haberi pretium desideratum, si parti decimae illius, id est 2 thaleris, addatur pars nona hujus decimae, id est,* $\frac{2}{9}$ *unius thaleri, ut adeo inveniatur* $2\frac{2}{9}$ *thal. Item: Pretium 5 librarum est 54 thalerorum, quantum erit pretium 1 librae? R. Quoniam pretium quaesitum est quinta pars dati, duplum partis decimae pretii dati* $10\frac{4}{5}$ *thal. erit quaesitum. Item: Pretium 1 librae est 18 grossorum, quantum erit librarum 19? R. Quoniam* 19 = 20 − 1, *a duplo pretii dati cyphra aucti 360 subducatur simplum 18, residuum erit pretium 342 grossorum quaesitum.*

SCHOLION 15.

320. *Si duo termini ejusdem denominationis unitate differant, singulari quodam compendio utimur, quod ex subjunctis exemplis manifestum. E. gr. Pretium 5 librarum est 30 thalerorum, quantum erit 4 librarum? R. Quoniam pretium 4 librarum una parte quinta deficere debet a pretio 5 librarum; pretium datum 30 dividatur per 5 & quotus 6 ab eodem subtrahatur, relinquitur quaesitum 24. Item: pretium 8 librarum est 24 thalerorum, quantum erit librarum 9? R. Quia pretium 9 librarum una parte octava excedit pretium 8 librarum, pretium datum 24 dividatur per 8 & quotus 3 eidem addatur, summa 27 erit quaesitum.*

SCHOLION 16.

321. *Nonnunquam compendiis pluribus una uti datur.* E. gr.

Pret. 100 libr. *est* 30 th. 4 gr. *quant.* 50 lib.
50) 2. 2) ——— 1
Fac. 15 th. 2 gr.

It: Pret. 60 libr. *est* 80 th. *quant.* 2520 lib.
60) 1 6 42
480 6
7 7
Fac. 3360 thal.

CAPUT VII.
De
QUANTITATIBUS ÆQUI-DIFFERENTIBUS.

DEFINITIO 61.

322. Si in serie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ secundæ ac tertiæ; eas *continue æquidifferentes* voco. Si vero in serie quatuor eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ tertiæ ac quartæ, *discretim æquidifferentes* appello. Ita 3, 6, 7 & 10 sunt numeri discretim æquidifferentes: 3, 6, & 9 numeri continue æquidifferentes.

SCHOLION.

323. *Dicuntur hæ quantitates vulgo* Arithmetice proportionales, *& vere proportionales, de quibus ante,* Geometrice proportionales *appellari solent, ut ab iis distinguantur: sed minus proprie, nec ad mentem veterum.*

COROLLARIUM 1.

324. Si termini semper crescunt, in continue æquidifferentibus terminus secundus est aggregatum ex primo & differentia; tertius summa ex secundo & differentia: si decrescunt, primus est aggregatum ex secundo & differentia; secundus aggregatum ex tertio & differentia (§. 106).

COROLLARIUM 2.

325. Similiter in discretim æquidifferentibus si termini crescunt, secundus est aggregatum ex primo & differentia, quartus ex tertio & differentia: si vero decrescunt, primus est aggregatum ex secundo & differentia; tertius ex quarto & differentia. (§. 106).

THEOREMA 61.

326. *Si fuerint tres quantitates continue æquidifferentes, summa primi & tertii est medii dupla.*

DEMONSTRATIO.

4. 7.	10
7	4
14 =	14

Si enim termini crescunt; secundus componitur ex primo & differentia, tertius ex secundo & differentia (§. 324), adeoque ex primo & differentia dupla. Quare si tertio addatur primus; summa primi & tertii constabit ex primo duplo & differentia dupla. Erit adeo secundi dupla. *Q. e. d.*

Eodem modo demonstratio procedit, si termini decrescunt.

SCHOLION.

327. *Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi:*

$$II = I + D$$
$$III = II + D$$

Ergo $III = I + 2D$

Hinc $III + I = 2I + 2D$
$= 2 II.$

THEOREMA 62.

328. *Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes, summa primi & quarti æqualis est summæ secundi & tertii.*

DEMONSTRATIO.

3—5 =	8—10
8	3
13 =	13

Si termini crescunt, secundus componitur ex primo & differentia; quartus ex tertio & differentia (§. 325). Quare si primus quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia constat: Si vero secundum tertio addas, aggregatum ex primo, differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter se æqualia (§. 88). *Q. e. d.*

Eodem modo demonstratio procedit, si consequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLION.

329. *Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi:*

$$II = I + D \qquad IV = III + D$$
$$III \quad III \qquad\qquad I \quad I$$

$$II + III = III + I + D \qquad IV + I = I + III + D$$

PROBLEMA 34.

330. *Inter duos numeros 9 & 13 medium æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Addantur numeri dati 9 & 13.
2. Summa 22 dividatur bifariam sive per 2. Quotus 11 erit numerus quæsitus (§. 326).

PROBLEMA 35.

331. *Datis tribus numeris 8, 5, 9, quartum æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Numerus secundus 5 addatur tertio 9.
2. A summa 14 subtrahatur primus 8. Residuus 6 est quartus quæsitus. (§. 328).

CAPUT

CAPUT VIII.

De LOGARITHMIS.

DEFINITIO 62.

332. Series quantitatum juxta eandem rationem crescentium vel decrescentium vocatur *Progressio Geometrica*. E. gr. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128, vel 729. 243. 81. 27. 9. 3. 1.

DEFINITIO 63.

333. Series quantitatum secundum eandem differentiam crescentium vel decrescentium dicitur *Progressio Arithmetica*. E. gr. 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30 vel 32. 28. 24. 20. 16. 12. 8. 4.

DEFINITIO 64.

334. Si numeris in ratione Geometrica progredientibus subscribantur totidem alii æquidifferentes; dicuntur hi illorum *Logarithmi*: *Stifelius* in Arithmetica sua (c) *exponentes* vocat. E. gr. sint duæ progressiones:

Geom. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512
Arith. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

erit 0 logarithmus termini primi 1; 5 logarithmus sexti 32; 7 logarithmus octavi 128 &c.

COROLLARIUM 1.

335. Si progressio arithmetica fuerit series numerorum naturalium & a cyphra incipiat, ut in exemplo allato; logarithmi designant distantias numerorum proportionalium ab unitate.

COROLLARIUM 2.

336. Cumque in progressione geometrica ab unitate incipiente termini sint dignitates ordine naturali se mutuo excipientes (§. 250. 332), si progressio arithmetica eadem sit, quæ in exemplo allato, logarithmi sunt exponentes dignitatum (§. 251). E. gr. 2 est dignitas prima ejusque exponens 1, 64 dignitas sexta ejusque exponens 6.

THEOREMA 63.

337. *Si Logarithmus unitatis sit 0; erit logarithmus facti æqualis aggregato ex logarithmis efficientium.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad factorem unum ita factor alter ad factum (§. 66). Quare logarithmus facti est æquidifferentium quartus ad logarithmum unitatis & logarith-

(c) lib. 3. c. 5. p. 249. b.

mos efficientium (§. 334) adeoque differentia inter logarithmum unitatis & summam logarithmorum efficientium (§. 331). Sed logarithmus unitatis est 0, *per hypoth.* Ergo summa ex logarithmis efficientium est logarithmus facti. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

338. Cum factores quadrati sint inter se æquales, hoc est, quadratum sit factum ex radice in seipsam (§. 246); logarithmus quadrati est duplus logarithmi radicis.

COROLLARIUM 2.

339. Eodem modo patet, logarithmum cubi esse triplum (§. 248); biquadrati quadruplum; potentiæ quintæ quintuplum; sextæ sextuplum &c. logarithmi radicis (§. 250).

COROLLARIUM 3.

340. Est ergo unitas ad exponentem dignitatis, ut logarithmus radicis ad logarithmum potentiæ seu ipsius dignitatis (§. 251. 255).

COROLLARIUM 4.

341. Quare logarithmus potentiæ prodit, si logarithmum radicis multiplices per exponentem ejus (§. 66); adeoque logarithmus radicis habetur, si logarithmus dignitatis per ejus exponentem dividitur (§. 210).

SCHOLION.

342. *E. gr. 3 summa logarithmorum 1 & 2 est logarithmus producti 8 ex 2 in 4. Similiter 7 summa logarithmorum 2 & 5 est logarithmus producti 128 ex 4 in 32. Porro 3 logarithmus radicis quadratæ 8 est dimidius logarithmi 6 quadrati 64, & 2 logarithmus radicis cubicæ 4 est subtriplus logarithmi 6 cubi 64.*

THEOREMA 64.

343. *Si logarithmus unitatis est 0, erit logarithmus quoti æqualis differentiæ logarithmorum divisoris & dividendi.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut divisor ad dividendum ita unitas ad quotum (§. 69). Quare logarithmus quoti est æquidifferentium quartus ad logarithmos divisoris & dividendi atque logarithmum unitatis (§. 334) adeoque differentia inter logarithmum divisoris & summam logarithmorum dividendi & unitatis (§. 331). Sed logarithmus unitatis est 0, *per hypoth.* Ergo differentia logarithmi divisoris a logarithmo dividendi est logarithmus quoti. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

344. *E. gr. 2 differentia inter 7 & 5 est logarithmus quoti 4 ex 128 per 32. Similiter 5 differentia inter 8 & 3 est logarithmus quoti 32 ex 256 per 8.*

SCHOLION 2.

345. *Progressiones arithmeticas cum geometricis confert, logarithmorum proprietates hactenus recensitas recenset, atque varios eorum usus monstrat* Stifelius

us (d): *qui tamen longe cedunt usui logarithmorum in Trigonometria a* Justo Byrgio *primum reperto* (e), *sed a* Johanne Nepero *supra laudato primum ostenso* (f).

PROBLEMA 36.

346. *Numeri cujuscunque logarithmum invenire ac Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus construere.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam 1. 10. 100. 1000. 10000 &c. Progressionem Geometricam constituunt (§. 332); eorum logarithmi arbitrario assumi possunt, modo sint numeri in progressione arithmetica progredientes (§. 334). Ut igitur intermediorum logarithmos per fractiones decimales exprimere liceat; assumantur 0. 00000000, 1. 00000000, 2. 00000000, 3. 00000000, 4. 00000000 &c.

2. Equidem manifestum est, (§. 334) numerorum, qui in scala progressionis geometricæ non continentur, logarithmos accuratos haberi non posse; adeo tamen veris propinquos reperire licet, ut, si usum spectes, accuratis æquipolleant. Quod ut appareat, ponamus inveniendum esse logarithmum novenarii seu 9. Inter 1. 0000000 & 10. 0000000 quæratur medius proportionalis C (§. 301) & inter eorum logarithmos 0. 00000000 atque 1. 00000000 medius æquidifferens (§. 330), qui erit logarithmus ipsius C (§. 334), hoc est, numeri ternarium superantis $\frac{1622777}{1000000000}$ adeoque a novenario multum distantis. Quæratur inter B & C alius medius proportionalis D, qui ad novenarium propius accedit, & inter B & D adhuc alius E & ita porro alii inter numeros novenario proxime majores & minores, donec tandem reperiatur 9. 0000000, hoc est, $9\frac{0000000}{10000000}$ (§. 305): qui cum a novenario ne unica quidem particula millionesima differat; ejus logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo novenarii habetur. Error enim semper minor esse debet unica millionesima. Quærantur itaque in quolibet casu logarithmi mediorum proportionalium & ita habebitur tandem loga-

(d) in Arithmet. lib. 1. c. 4. p. 35. & seqq. & lib. 3. c. 5. p. 249. b. & 50. (e) Keplerus in Tabulis Rudolphinis c. 3. f. 11. (f) in Mirifici Logarithmorum Canonis descriptione.

logarithmus novenarii prope verus 0. 95424251.

3. Si eodem modo inter A & C numeros medios proportionales quæras & convenientes logarithmos singulis assignes, invenietur tandem logarithmus numeri 2 & ita porro.

	Numeri medii proportionales.	Logarithmi		Numeri medii proportionales	Logarithmi
A	1.0000000	0.00000000	O	9.0021388	0.95434570
C	3.1622777	0.50000000	Q	9.0008737	0.95428467
B	10.0000000	1.00000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	Q	9.0008737	0.95428467
D	5.6234132	0.75000000	R	9.0002412	0.95425415
C	3.1622777	0.50000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95421889
D	5.6234132	0.75000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
F	8.6596432	0.93750000	T	9.0000831	0.95424652
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95423889
B	10.0000000	1.00000000	T	9.0000831	0.95424652
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
I	9.1398170	0.96093750	Y	8.9999845	0.95424217
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
I	9.1398170	0.96093750	V	9.0000041	0.95424271
K	9.0579777	0.95703125	Z	8.9999943	0.95424223
H	8.9768713	0.95312500	Y	8.9999845	0.95424217
K	9.0579777	0.95703125	V	9.0000041	0.95424271
L	9.0173333	0.95507812	a	8.9999992	0.95424247
H	8.9768713	0.95312500	Z	8.9999943	0.95424223
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
M	8.9970796	0.95410156	b	9.0000016	0.95424259
H	8.9768713	0.95312500	a	8.9999992	0.95424247

	Numeri medii proportionales.	Logarithmi		Numeri medii proportionales.	Logarithmi
L	9.0173333	0.95507812	b	9.0000016	0.95424259
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
O	9.0021388	0.95434570	d	8.9999998	0.95424250
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
O	9.0021388	0.95434570	c	9.0000004	0.95424253
P	8.9996088	0.95422363	e	9.0000000	0.95424251
M	8.9970796	0.95410156	d	8.9999998	0.95424250

4. Enimvero non opus eſt, ut omnium numerorum logarithmi tanto labore inveſtigentur: compoſiti enim cum per alios numeros dividi poſſint (§. 76), adeoque & ex aliis ſe mutuo multiplicantibus (§. 212) oriantur, eorum logarithmi *per theor. 63 & 64.* (§. 337 & *ſeqq.*) inveniuntur. E. gr. ſi logarithmus numeri 9 biſecetur, prodit logarithmus 0.47712125 numeri 3 (§. 338).

COROLLARIUM.

347. Characteriſtica igitur logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10 eſt 0, pro numeris a 10 ad 100 eſt 1, pro numeris a 100 ad 1000 eſt 2 &c.

SCHOLION.

348. *Canonem Logarithmorum pro numeris naturalibus ab* 1 *usque ad* 20000 *& a* 90000 *ad* 100000 *primus conſtruxit* Henricus Briggius, *Profeſſor Geometriæ Savilianus in Academia Oxonienſi, ex conſilio tamen primi inventoris* Neperi (g) *& methodum conſtruendi una expoſuit in ſua Arithmetica Logarithmica. Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox explevit* Adrianus Vlaccus (h). *In libellis vulgaribus habetur tantum Canon Logarithmorum pro numeris ab* 1 *usque ad* 10000.

PROBLEMA 37.

349. *Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in Canone continentur, minoribus tamen* 10000000.

RESOLUTIO.

1. Reſecentur 4 notæ ad ſiniſtram numeri dati & earum ex canone excerpatur logarithmus.
2. Characteriſticæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram reſiduæ (§. 347).

(g) vide præfat. ad Arithmeticam Logarithm.
(h) in altera editione Arithmeticæ Logarithmicæ Briggii.

3. Logarithmus inventus ſubtrahatur a proxime ſequente in canone.

4. Inferatur: ut differentia numerorum in canone evolutorum ad differentiam tabularem logarithmorum ipſis reſpondentium; ita notæ reſiduæ numeri dati ad differentiam logarithmicam *per probl. 33.* (§.302) inveniendam: quæ ſi

5. Addatur logarithmo *per n. 1 & 2* invento; ſumma erit logarithmus quæſitus.

E. gr. quæritur logarithmus numeri 92375. Reſeca quatuor notas 9237 & characteriſticam 3 logarithmi iis in tabulis minoribus reſpondentis 3.9655309 auge unitate. Hinc

e logarith. numeri	9238 =	3.9655780
ſubduc. log. num.	9237 =	3.9655309
relinquitur differ. tabul.	- -	471

Inferatur: 10 — 471 — 5

5) 2 —— 1 (§. 316).

235

Jam logarithmo	4.9655309
addatur different. inventa	235
Summa eſt logar. quæſ.	4.9655544

SCHOLION.

350. *Differentiæ equidem logarithmorum non ſunt differentiis numerorum proportionales: ad praxin tamen, ubi in minimis ſcrupuloſi non ſumus, methodus tradita ſufficit, ſi præſertim notæ reſiduæ numeri dati non fuerint adeo multæ. Certe in noſtro caſu adeo exactum reperimus, ut accuratior in tabulis majoribus* Briggii *non occurrat.*

PROBLEMA 38.

351. *Invenire logarithmum fractionis, cujus numerator minor denominatore.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus numeratoris ſubtrahatur a logarithmo denominatoris.

2. Reſiduo præfigatur ſignum ſubtractionis —.

E. gr. Quærendus eſt logarithmus fractionis $\frac{3}{7}$.

Logarithmus 7 =	0.8450980
Logarithmus 3 =	0.4771213
Logarithmus $\frac{3}{7}$ =	— 0.3679767

DEMONSTRATIO.

Cum fractio ſit quotus, ex diviſione numeratoris per denominatorem emergens (§. 238); logarithmus ejus eſt differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 343), adeoque ſi numerator minor denominatore, major logarithmus e minore ſubtrahendus, quo in caſu differentia evadit negativa (§. 105). *Q. e. d.*

SCHOLION.

352. *Logarithmum fractionis propriæ eſſe negativum, ſi unitatis ſit 0, jam notavit*

tavit Stifelius (i), *& mirum non est. Fractio enim minor unitate* (§. 221). *Sed unitatis logarithmus est* 0 (§. 346). *Ergo fractionis logarithmus est nihilo minor.*

COROLLARIUM 1.

353. Cum in fractione spuria $\frac{9}{5}$ numerator sit major denominatore; ejus logarithmus habetur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 238. 343).

Logarithmus 9 =	0.9542425
Logarithmus 5 =	0.6989700
Logarithmus $\frac{9}{5}$ =	0.2552725

COROLLARIUM 2.

354. Quoniam integra cum adhaerente fractione $3\frac{2}{7}$ ad fractionem spuriam $\frac{23}{7}$ reduci possunt (§. 224); eodem modo invenietur eorum logarithmus.

Logarithmus 23 =	1.3617278
Logarithmus 7 =	0.8450980
Logarithmus $3\frac{2}{7}$ =	0.5166289

PROBLEMA 39.

355. *Invenire numerum logarithmo respondentem, qui in tabulis accuratus non occurrit.*

RESOLUTIO.

I. Si numerus, cui convenit logarithmus, inter 1000 & 10000 cadit, hoc est, si characteristica fuerit 3 (§. 347).

1. Logarithmus proxime minor dato subtrahatur a proxime majore, itidemque a logarithmo dato.
2. Inferatur: ut differentia prior ad 100, ita secunda ad partes centesimas *per probl. 33.* (§. 302) inveniendas & numero, qui logarithmo proxime minori in tabulis respondet, addendas, ut habeatur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

E. gr. Quaeratur numerus respondens Logarithmo 3.7589982

Logarithmus proxime major	3.7590632
minor	3.7589875
Differentia prima	757
Logarithmus datus	3.7589982
proxime minor	3.7589875
Differentia secunda	107

757 — 100 — 107

```
   107          107.00 (14
   100          757
  -----         ----
  10700         313.0
                302 8
                -----
                  102
```

Cum numerus logarithmo minori conveniens sit 5741; quaesitus erit $5741\frac{14}{100}$.

II. Si numerus, cui convenit logarithmus datus, inter 1 & 1000 locum reperiat, hoc est, si characteristica fuerit 0, 1 vel 2 (§. 347), characteristica mutatur in 3 & logarithmus quaeritur inter 1000 & 10000.

(i) in Arithmet. integra lib. 3. c. 5. p. 249 b.

10000: qui enim ibi eidem respondet numerus, tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteristicæ unitates accessere (§. 346).

E. gr. Quæratur numerus logarithmo 1.9201662 conveniens. Cum in tabulis proxime minori respondeat numerus 83; logarithmus idem evolvitur sub characteristica 3 post 8300, ubi proxime minori respondet numerus 83.21. Est itaque quæsitus $83\frac{21}{100}$. Quodsi fractionibus his non fueris contentus per casum primum minores istis inveniri possunt.

PROBLEMA 40.

356. *Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis, qui in tabulis continentur.*

RESOLUTIO.

1. A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, donec relinquatur logarithmus ultimo tabulæ minor.
2. Quæratur numerus ei respondens (§. 355) &c.
3. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000.

Factum est numerus quæsitus (§. 346).

E. gr. Quærendus est numerus logarithmi 7.7589982. Subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui est, 4.0000000, ut relinquatur 3.7589982, cui respondens numerus $5741\frac{11}{100}$ ducatur in 10000 factum 57411100 erit numerus quæsitus.

SCHOLION.

357. *Facile apparet, subtrahi posse logarithmum numeri cujuscunque in tabula occurrentem, modo per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo residuo respondet. Sed operatio tædiosa evadit.*

PROBLEMA 41.

358. *Invenire numerum dato logarithmo defectivo respondentem.*

RESOLUTIO.

1. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus tabulæ sive numeri 10000, hoc est, ille ab hoc subtrahatur.
2. Logarithmo residuo conveniens numerus quæratur (§ 355).

Dico, hunc esse numeratorem fractionis, cujus denominator est 10000.

E. gr. Quæratur fractio respondens Logar. defectivo — 0.3679767. Hic ex 4.0000000 subd.

relinquit 3.6320233, cui convenit numerus $4285\frac{71}{100}$. Est ergo fractio quæsita $\frac{428571}{1000000}$.

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus ex divisione numeratoris per denominatorem

torem emergens (§.238); erit unitas ad fractionem ut denominator ad numeratorem (§. 69). Sed ut unitas ad fractionem dato logarithmo defectivo respondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo residuo convenientem (§. 337. 66): Ergo si 10000 sumatur pro denominatore, erit numerus iste numerator fractionis quaesitae (§. 305). *Q. e. d.*

PROBLEMA 42.

359. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus secundi addatur logarithmo tertii.
2. Ab aggregato subtrahatur logarithmus primi.

Residuus est logarithmus quarti quaesiti (§.302. 337. 343).

E. gr. Sint numeri dati 4, 68 & 3.

Logarithm. 68 =	1.8325089
Logarithm. 3 =	0.4771213
Aggregatum =	2.3096302
Logarithmus 4 =	0.6020600
Logarith. quaes.	1.7075702,

cui in Tabulis respondet numerus 51.

SCHOLION.

360. *Problematis hujus usus praestantissimus in Trigonometria elucet: cujus gratia pro numeris etiam naturalibus quaesiti sunt a* Briggio *&* Vlacco *Logarithmi, cum* Neperus *tantum canonem utut diversae indolis logarithmorum pro sinibus & tangentibus construxisset. Tyrones igitur hanc de Logarithmis doctrinam tantisper seponant, donec ad Trigonometriam pedem promoverint.*

CAPUT IX.

De

FRACTIONIBUS DECIMALIBUS.

DEFINITIO 65.

361. *Fractio decimalis* est, cujus denominator est *articulus* quidam *primarius* 10, 100, 1000, 10000 &c. (§.305).

COROLLARIUM 1.

362. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla.

SCHOLION 1.

363. E. gr. *Si fuerit fractio decimalis* $\frac{342857}{1000000}$, *eadem aequivalet huic seriei:*

$\frac{3}{1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$, *cujus denominatores* 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000 *in ratione decupla progrediuntur.*

COROLLARIUM 2.

364. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000 sunt 0. 1. 2. 3. 4. 5 (§. 346); si fractiones decimales sub forma numerorum integrorum scribantur, veluti in nostro casu loco $\frac{342857}{100000}$ aut $\frac{3}{1} + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$ scribatur 3. 42857 (§. 306), loco denominatorum numeratoribus solitarie positis opportune tanquam *apices* adjiciuntur logarithmi. Ita loco fractionis $\frac{342857}{100000}$ scribimus $3^{\circ}.4'2''8'''5^{IV}7^{V}$.

COROLLARIUM. 3.

365. Quoniam apices, qui sunt logarithmi denominatorum fractionum decimalium, in serie numerorum naturalium progrediuntur; sufficit notæ ultimæ adjici apicem convenientem, ceteris omissis, veluti in nostro casu 3.42857^{V}.

COROLLARIUM 4.

366. Cum logarithmus fractionis inveniatur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 351), denominator autem fractionis decimalis sit articulus primarius (§. 361), adeoque ejus logarithmus præter characteristicam nonnisi meris cyphris constet (§. 346): a characteristica logarithmi numeratoris fractionis decimalis nonnisi characteristica logarithmi denominatoris subtrahenda, ut habeatur logarithmus fractionis decimalis.

SCHOLION 1.

367. *E. gr. Si fractio decimalis fuerit* 8.735; *logarithmus numeratoris* 8735 *est* 3.9412629, *denominatoris* 1000 *vero* 3.0000000, *adeoque logarithmus fractionis decimalis datæ* 0.9412629. *Si fractio decimalis fuerit* 0. 324; *logarithmus numeratoris est* 2.5105456, *denominatoris* 1000 *vero* 3.0000000, *consequenter logarithmus fractionis decimalis* — 1. 5105456. *Iidem ergo sunt logarithmi fractionum decimalium, qui numerorum integrorum, nisi quod characteristica differant.*

COROLLARIUM 5.

368. Quia characteristica logarithmi denominatoris fractionis decimalis eadem est cum apice ultimæ notæ (§. 364); logarithmus fractionis decimalis prodit, si a logarithmi numeratoris characteristica apex ultimæ notæ subducitur (§. 366).

SCHOLION 2.

369. *E. gr. In fractione decimali* $8.735'''$ *apex ultima nota est* 3; *a logarithmi igitur numeri* 8735, *qui est*, 3. 9412629, *characteristica* 3 *subducitur ternarius, ut prodeat logarithmus fractionis decimalis* 0. 9412629. *Apex iste tot continet unitates, quot denominator habet cyphras, seu quot a puncto sequuntur notæ: unde patet, si nullus adscriptus fuerit apex, tot unitates a characteristica numeratoris subduci, quot denominator cyphras habet, seu quot notæ punctum sequuntur.*

DEFINITIO 66.

370. *Fractio decimalis exacta est,*

quæ

quæ veram exhibet rationem partis, quam designat, ad totum.

E. gr. 0. 8 = $\frac{8}{10}$ = $\frac{4}{5}$ exprimit rationem partis 4 ad totum 5 veram, cum sit 8 : 10 = 4 : 5 (§. 181).

DEFINITIO 67.

371. *Fractio decimalis approximans* est, quæ rationem partis, quam designat, ad totum exhibet prope veram, nempe vel vera minorem, vel majorem, defectu tamen vel excessu infra unitatem notæ ultimæ convenientem existente.

E. gr. $\frac{3}{7}$ > 0.42857, sed < 0.42858. Exprimit adeo fractio approximans $\frac{42857}{100000}$ rationem non nisi prope veram defectu scilicet existente minore, quam $\frac{1}{100000}$.

DEFINITIO 68.

372. *Notæ* fractionum decimalium *ejusdem ordinis* dicuntur, quarum iidem sunt denominatores vel apices.

E. gr. Si duæ fuerint fractiones decimales 0. 42857 & 0. 0047, notæ 8 & 4 ejusdem ordinis sunt, quoniam utrique respondens denominator est 1000 vel apex ‴: nam 8 designat $\frac{8}{1000}$ & 4 denotat $\frac{4}{1000}$.

PROBLEMA 43.

373. *Fractiones decimales addere, vel a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam fractiones decimales perinde ac numeri integri constant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur (§. 364); notis ejusdem ordinis sub se invicem scriptis additio & subtractio eodem modo peragitur ac in numeris vulgaribus (§. 98. 103), nisi quod in appoximantibus locus ultimus sit incertus (§. 371).

Vide exemplum

I. Additionis:

3. 5 0 7 8 2^{V}	0. 0 6 3 8^{IV}
0. 0 0 0 3	0. 0 0 5 6 2^{V}
5 1. 2 4 7	7. 1 3 8
5 4. 7 5 5 1 2	7. 2 0 7 4 2

II. Subtractionis.

2. 7 8 6 4^{IV}	0. 9. 5. 4 3 6^{V}
0. 1 5 8	0. 0 8 5 1 2
2. 6 2 8 4	0. 8 6 9 2 4

PROBLEMA 44.

374. *Fractiones decimales per se invicem multiplicare.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306), multiplicatio peragitur ut in integris (§. 111), hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denomina-

minatorum (§. 364), apex facti notarum in se invicem ductarum inveniatur, si earum apices addantur (§. 337).

E. gr. Si multiplicanda fuerit fractio decimalis $\frac{2.42857}{1\ 00000}$ per $\frac{4.7}{10\ 000}$ hoc est, 0.42857^{V} per 0.0047^{IV} multiplicatio peragitur communi more ducendo 42857 primum in 7 & deinde in 4 sive 40. Quoniam vero apex ultimus multiplicandi est 5 & multiplicatoris 4; summa 9 dat apicem ultimum producti: unde apparet a sinistris adjiciendas esse tres cyphras, quarum prima puncto notata designat locum integrorum.

```
     0.42857
      0.0047
 -----------
      299999
     171428
 -----------
 0.002014279
```

COROLLARIUM 1.

375. Quodsi factor unus fuerit fractio decimalis approximans, cum fieri possit, ut multiplum notae deficientis, quae ultimam 6 proxime sequitur, sit novenario major, consequenter multiplum notae ultimae 6 inde augeatur (§. 111); in facto numerus locorum, in quibus notae sunt incertae, numerum notarum in factore exacto unitate superat, veluti in nostro exemplo notae tres ultimae 584 sunt incertae, adeoque factum sumitur 0. 801.

```
   2.3576+
      0.34
 ---------
    943.04
   7072.8
 ---------
  0.801584
```

COROLLARIUM 2.

376. Si uterque factor fuerit approximans, eodem modo intelligitur, loca in factore incerta unitate excedere numerum notarum factoris longioris, veluti in adjecto exemplo, in quo numerus longior constat notis 5, loca incerta sunt numero 6, adeoque nonnisi duae notae dexteriores 11 certae sunt. In exemplo anteriore si factor 0. 34 ponatur quoque approximans, nulla prorsus nota certa est.

```
    18.357
      6.34
 ---------
     73428
    55071
   110142
 ---------
 116.38338
```

COROLLARIUM 3.

377. Quodsi nota deficiens, quae proxime sequitur, ultimae fuerit aequalis in multiplicando & multiplicator exactus; tum in multiplicatione apparet, quot unitatibus augeri debeat multiplum notae dextimae, ut nulla in facto nota incerta evadat. E. gr. in nostro exemplo, ubi nota deficiens est 6, facto ex 6 in 8 adjiciuntur 4 & alteri ex 6 in 6 adduntur 3.

```
  0.6666
     6.8
 -------
   53332
  39999
 -------
 4.53322
```

SCHOLION.

378. *Casus alios brevitatis gratia praetermittimus.*

PROBLEMA 45.

379. *Fractionem decimalem per decimalem dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducan-

ducantur (§.306), divisio peragitur ut in numeris integris (§.117), hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§.364), apex quoti inveniatur, si apex divisoris ab apice dividendi subtrahatur (§.343) & dividendo adjungantur cyphræ, si divisor major fuerit vel dividendum non metiatur.

E. gr. Si 0.002014279 dividatur per 0.0047, quotus est 0.42857 (§. 374. 210). Nimirum 2014279 dividitur per 47, ut obtineatur quotus 42857. Jam cum notæ divisoris 4 conveniat apex 3 & notæ dividendi 0 apex 4, differentia 1 est apex notæ primæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a partibus decimis, ut omnia loca compleantur eidem præfigitur cyphra, cum nullum fractioni adhæreat integrum. Similiter si 0.002014279 dividatur per 0.42857, quotus est 0.0047 (*§. cit.*). Nimirum 2014279 dividitur per 42857, ut obtineatur quotus 47. Jam cum notæ dividendi 0 conveniat apex 4 & notæ divisoris 4 apex 1, differentia 3 est apex notæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a particulis millesimis (§ 364), eidem præfigendæ sunt cyphræ 3, ut habeatur fractio completa 0.0047.

COROLLARIUM. 1.

380. Quodsi divisor fuerit fractio decimalis approximans, adeoque nota ultima vel justo major, vel minor (§.371); factum ex divisore in quotum duabus ultimis notis deficere potest. Quare cum a notis dividendi vel justo plus, vel minus subtrahatur; ubi divisor ad easdem fuerit promotus, notæ quoti incertæ evadent. E. gr. Si dividendus fuerit 21.3456 & divisor 3.82 fractio approximans, nonnisi unica nota quoti 5. certa est.

COROLLARIUM 2.

381. Si dividendus fuerit fractio decimalis approximans, divisor exactus; nonnisi notam quoti ultimam subinde incertam evadere posse patet.

COROLLARIUM 3.

382. Si & divisor, & dividendus fuerint fractiones approximantes, evidens est porro in determinandis locis certis respiciendum esse vel dividendum, vel divisorem, prout divisoris, vel dividendi nota deficiens propior fuerit primæ divisoris notæ. E. gr. Si divisor sit 2.5786, dividendus 3.067, adeoque cyphris augendus, ut divisio fieri possit; evidens est certitudinem expirare in nota tertia divisoris 6, consequenter junctis duabus cyphris divisionem eo usque continuari, ut prodeat quotus certus 1. 1.

PROBLEMA 45.

383. *Notas certas in multiplicatione & divisione fractionum decimalium approximantium accuratius determinare.*

RESOLUTIO.

Notæ factorum dextimæ sumantur nunc justo majores, nunc justo minores; in divisione nunc nota dextima in dividendo justo major, in divisore justo minor & con-

contra: quæ in utraque multiplicatione ac divisione eædem proveniunt notæ, eæ sunt accuratæ. Quodsi ergo in exemplo superiori multiplicationis, ubi notæ ultimæ factorum ponuntur justo minores, eorum loco sumantur 18.358 & 6.35; factum quod obtinetur 116.57330 convenit cum superiori 116.38338 quoad tres notas dextimas 116: eæ igitur solæ certæ sunt. Patet autem certam sic fieri notam tertiam 6, quæ per superiora in dubio relinquebatur (§.376). Similiter si in exemplo divisionis superiori (§.382) nunc 3068 dividas per 2.5786, nunc 3067 per 2.5787, quotus utrobique est 1.1: unde patet, nonnisi duas istas notas certas esse, quas superius tales agnovimus.

```
  18.358
    6.35
--------
   91790
  55074
 110148
--------
116.57330
```

SCHOLION.

384. *Ipsa praxis loquetur, nos subinde posse esse contentos, quod notas certas agnoscamus, quæ per superiora (§. 376. 382) tales deprehenduntur, ut adeo tædio repetitæ multiplicationis vel divisionis supersedere queamus.*

CAPUT X.

De FRACTIONIBUS SEXAGESIMALIBUS.

DEFINITIO 69.

385. *Fractiones sexagesimales* sunt, quarum denominatores crescunt in ratione sexagecupla. Dicuntur etiam *Minutiæ physicales*.

SCHOLION.

386. E. gr. *Si integrum sit* 1, *fractiones istiusmodi sunt* $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, $\frac{1}{216000}$ &c.

COROLLARIUM.

387. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1. 60. 3600. 216000. 12960000 &c. sunt 0. 1. 2. 3. 4 &c. (§. 334); si fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum scribendæ, numeratoribus solitarie positis perinde ac in fractionibus decimalibus tanquam apices adjiciendi sunt logarithmi. E gr. $\frac{3}{1}=3^{\circ}$, $\frac{35}{60}=35'$, $\frac{46}{3600}=46''$ &c.

DEFINITIO 70.

388. Pars sexagesima integri dicitur *Minutum* sive *scrupulum primum*; pars sexagesima minuti primi *Minutum* sive *scrupulum secundum*; pars sexagesima minuti secundi *Minutum* sive *scrupulum tertium* & ita porro.

CO-

COROLLARIUM.

389. Scrupuli adeo primi apex sive index est 1, secundi 2, tertii 3 & ita porro (§.387).

SCHOLION.

390. *Hac ratione fractiones reducuntur ad numeros integros, ut integrorum instar tractari queant.*

PROBLEMA 46.

391. *Fractiones sexagesimales addere.*

RESOLUTIO.

Additio eodem prorsus modo peragitur, quo numeri heterogenei in unam summam colliguntur (§.99).

E. gr.	35°	46′	8″	15‴
	17	20	15	40
		14	18	
	53 .	20 .	41 .	55

PROBLEMA 47.

392. *Fractiones sexagesimales a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

Subtrahuntur a se invicem eodem prorsus modo, quo numerorum heterogeneorum subtractio fieri solet (§.104).

E. gr.	28°.	15′.	4″.	20‴
	17	29	18	45
	10 .	45 .	45 .	35

Nimirum unitas mutuo petita a specie majore hic valet 60. Ita 1″ = 60‴, 1′ = 60″, 1° = 60′ (§.388).

PROBLEMA 48.

393. *Fractiones sexagesimales per sexagesimales multiplicare.*

RESOLUTIO.

Multiplicatio fractionum sexagesimalium coincidit cum multiplicatione decimalium (§.374), nisi quod ex specie minore abjiciatur toties sexagenarius, quoties fieri potest, & tot speciei proxime majori addantur unitates, quoties sexagenarius fuit abjectus (§. 388): id quod divisio per 60 prodit (§. 223).

E. gr. Si multiplicandus 3° 15′ 38″, multiplicator 2° 18′ 47″. Duc singulas partes multiplicandi 1. in 47, 2. in 18, 3. in 2: erit factum ex 38 in 47 = 1786 scr. quartis = 29‴. 46ᴵⱽ. Scribuntur adeo 46 pro specie minima infra lineam cum suo apice & 29‴ reservantur speciei proxime sequenti annumeranda. Cum igitur factum ex 47″ in 15′ = 705‴; additis 29 prodibunt 734‴ = 12″. 14‴. Scribuntur adeo 10 infra lineam & 12″ reservantur facto proxime sequenti ex 3° in 47″ addenda. Eodem modo ubi perrexeris, obtinebuntur tandem facta partialia, quæ in unam summam (§. 391) collecta exhibent factum quæsitum 7° 32′ 30″ 38‴ 46ᴵⱽ aut, si prope verum quæsiveris, 7° 32′ 31″, cum species proxime major dimidium illius superet, aut 30 fuerit major. Vide exemplum:

		3°	15'	38''	
		2	18	47	
	2	33	14	46^IV	
9	58	41	24		
6	31	16			
7°	32'	30''	38'''	46^IV	

SCHOLION.

394. *Ne tædia divisionis devoranda sint, constructus est* Canon hexacontadon, *qui facta in species resoluta exhibet, veluti factum ex* 38 *in* 47 = 29. 46. *Ratio constructionis ex operatione in problemate præcepta patet, modo notetur, perinde ac in abaco Pythagorico* (§. 109) *factorem unum a latere, alterum in fronte canonis describi.*

PROBLEMA 49.

395. *Fractiones sexagesimales per sexagesimales dividere.*

RESOLUTIO.

Divisio peragitur ut in fractionibus decimalibus, nisi quod in multiplicatione quoti per divisorem tenenda sint, quæ paulo ante in multiplicatione præcepimus (§. 393) &, ubi species dividendi prima fuerit minor specie divisoris prima, ista reducenda sit ad speciem proxime minorem & sequenti addenda, ut divisioni sit locus.

E. gr. Si 7° 32' 30'' 38''' 46^IV dividere jubeamur per 2° 18' 47''; quære quoties 2 in 7 contineatur, & quoti loco scribe 3°. Duc 3° in 2° 18' 47'' & factum 6° 56' 21'' subtrahe ex 7° 32' 30'', ut relinquatur 36' 9''. Junge residuo speciem sequentem 38 & divisionem eodem modo continua, donec ea tandem fuerit absoluta, quemadmodum ex typo exempli liquet:

2° 18' 47'')	7°	32'	30''	38'''	46^IV	(3° 15' 38''
	6	56	21	: :	: :	
		36	9	38	: :	
		34	41	45	: :	
		1	27	53	: :	
five			87	53	46	
			87	53	46	
				0		

SCHOLION.

396. *Non absimili modo algorithmus fractionum aliarum quarumcunque absolvitur, quorum denominatores in ratione quacunque data progrediuntur, veluti in duodecupla, quæ olim in divisione mensuræ linearum obtinuit.*

FINIS ARITHMETICÆ.

Pag.	Lin.	Errata	Corrigenda.
36.2	5	65	67
	7	64.66	67.68
53	15	112	212

ELEMENTA
GEOMETRIÆ.

PRÆFATIO.

PErexiguus eſt eorum numerus, qui Geometriæ pretium ſuum ſtatuunt: notatione enim deluſi cum arte agrimenſoria eam peſſime confundunt, nec ea animo ipſorum obverſatur idea, quæ nomen tam auguſtum excitare debebat. Omnis nimirum cognitionis diſtinctæ fundamenta jacit Geometria cum Arithmetica, ita ut non minor in ſcientiis, quam in artibus ejus ſit uſus. Equidem ob problemata, quorum reſolutionem trado, nonniſi ad locorum diſtantias variorumque objectorum altitudines, agrorum & camporum areas, corporumque molem dimetiendum conducere videtur; contrarium tamen luce meridiana clarius elucebit, cum ad reliquas Matheſeos partes inferius applicabitur. Non hic repeto, quæ de vi Geometriæ in perficiendo intellectu jam ſuperius (*) dicta ſunt. Ne vero hoc fructu careret Geometriæ ſtudium; a rigore in demonſtrando recedendum minime fuit. Hinc definio, quæ vulgo definiri non ſolent, & paſſim demonſtro, quæ ſine probatione ab aliis aſſumuntur. Equidem haud difficulter prævideo, fore ut imperitis improbetur hic auſus; ſed ſufficit eum probari peritis, & quod majus eſt,

(*) in Commentat. de methodo §. 52. 53. p. 16.

est, methodum nostram præstare, ne extra Mathesin ratiocinaturi in scopulos incidamus, in quos plerumque omnes hactenus incidisse, supra etiam (**) annotavimus. EVCLIDES & ejus exemplo hactenus omnes ex principio congruentiæ solo demonstrarunt omnia: sed cum ingeniosissimus LEIBNITIVS Similitudinis notionem mecum communicaret, atque moneret, multum ejus in Geometria esse usum, ego vero meditatus amplissimum deprehenderem; similitudinis principium in Geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo a me facillime demonstrata deprehendes, quæ alias ex principio congruentiæ nonnisi per ambages demonstrari solent. Nec injucundum arbitror, quod figurarum constructiones inter principia demonstrandi nunc obtineant locum, quæ alias praxi tantum inserviebant. Placuit tamen in nova hac editione mea similitudinis notione uti, cum Leibnitiana clarior sit. Tyrones definitionibus evolutis neglecta demonstratione problemata solvant. Hoc labore perfuncti ex theorematum hypothesibus figuras construant & demonstrationes empiricas superaddant, quarum in ipsa pertractatione fit mentio. (***) Tandem eo ordine elementa relegant, quo conscripta sunt. Qui vero mentis acie pollent, illamque diu possunt habere attentam; difficultates non sentient, etiamsi prima statim vice ad singula animum advertant.

ELE-

(**) l. c. §. 52. p. 15. (***) in schol. theor. 7. §. 158.

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIOR

Elementa Geometriæ planæ exhibet.

CAPUT I.

De

PRINCIPIIS GEOMETRIÆ.

DEFINITIO 1.

1. *Geometria* est ſcientia extenſorum, quatenus terminata ſunt, hoc eſt, Linearum, ſuperficierum & ſolidorum.

SCHOLION.

2. *Quemadmodum extenſio ex ſimultanea alicujus rei per locum diffuſione oritur; ita in mente repræſentatur, dum multa in uno continuo ſimul percipimus. Hinc notio extenſionis non modo totius ac partium notiones involvit* (§. 9. Arith.); *ſed eadem in rerum aliarum notiones irrepit, quæ ideo per lineas, ſuperficies ac ſolida repræſentari poſſunt. Unde eſt, quod Geometria rebus plurimis applicari poſſit, ejusque adeo quam latiſſime pateat uſus.*

DEFINITIO 2.

3. *Congruere* dicuntur, quorum iidem termini eſſe poſſunt. Nempe *Congruentia* eſt coincidentia terminorum.

SCHOLION.

4. *Ne definitio negotium faceſſat, vitanda eſt vocis* termini *æquivocatio: id quod in ſequentibus ſatis cavetur. A termini vero definitione conſulto abſtinemus, ne ad demonſtrationes metaphyſicas dilabamur.*

DEFINITIO 3.

5. *Eundem ſitum habere* dicuntur, inter quæ idem extenſum poni poteſt.

DEFINITIO 4.

6. *Punctum* eſt, quod quaquaverſum ſeipſum terminat, ſeu quod non habet terminos alios a ſe diſtinctos.

COROLLARIUM 1.

7. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (*§. 3*).

COROLLARIUM. 2.

8. Nec ullas in eo diſtinguere licet partes.

SCHOLION.

9. *Hinc* Euclides: *Punctum eſt, inquit, cujus pars nulla eſt. Nec ſine ratione punctum ut individuum concipiunt Geometræ, utut tale quid nec imagina-*

ginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipsa Geometrica summo cum studio cavendum, ne punctum pars linea habeatur, cujus terminus existit.

DEFINITIO 5.

Tab. I. Fig. 1. 10. *Linea* describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B movetur.

COROLLARIUM 1.

11. Termini igitur lineæ secundum longitudinem sunt puncta A & B; secundum latitudinem & profunditatem ipsa sui terminus est (§.6).

COROLLARIUM 2.

12. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 8), linea nec lata, nec profunda esse potest, sed in solam longitudinem extenditur.

SCHOLION 1.

13. *Quid ergo mirum, quod secundum latitudinem & profunditatem non habeat terminos a se distinctos*, vi Cor. 1. (§.11)?

SCHOLION 2.

14. *Quamvis corpus omne tribus dimensionibus præditum sit, nec una a reliquis actu separari queat; necessarium tamen ac perutile est, ut unam absque reliquis consideremus. Necessitatem intellectus finitudo injungit, qui ad multa una diffundi nequit & hinc per abstractionem divellere tenetur, quæ nexu indivulso natura conjunxit. Utilitatem hujus abstractionis casus innumeri persuadent, in quibus unam dimensionem neglectis ceteris cognoscere jubemur, e gr. altitudinem turris sine latitudine ac profunditate ipsius, latitudinem fluminis sine longitudine ac profunditate ejusdem.*

DEFINITIO 6.

15. *Distantia* est linea brevissima inter duo.

SCHOLION.

16. *Ita e.gr. distantia arboris a domo est linea brevissima, qua ab illa ad hanc duci potest.*

DEFINITIO 7.

17. *Linea recta* AB est, cujus pars quæcunque est toti similis. Tab. I. Fig. 1.

COROLLARIUM 1.

18. Lineæ igitur rectæ non differunt nisi quantitate (§. 26 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

19. Cum lineæ describantur, si punctum ab uno puncto ad alterum movetur (§.10); motus puncti describentis in omnibus lineæ partibus idem esse debet: secus enim diversitate hujus motus partes a se invicem distinguerentur, adeoque similes non forent (§. 24 *Arithm.*) contra definitionem (§.17). Quoniam itaque motus puncti differre nequit nisi celeritate ac directione, celeritas vero ad descriptionem rectæ nil confert; sola directionis habenda est ratio, consequenter recta describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B eadem directione movetur.

POSTULATUM 1.

20. *A quovis puncto A ad quodvis punctum B posse duci lineam rectam.* Tab. I. Fig. 1.

POSTU-

POSTULATUM 2.

21. *Lineam rectam terminatam AB utrinque produci posse.*

DEFINITIO 8.

22. *Linea curva* est, cujus partes toti dissimiles.

DEFINITIO 9.

23. *Metiri* idem est ac quantitatem aliquam pro unitate assumere ac aliarum homogenearum rationem ad eandem exprimere. Quantitas, quæ pro unitate assumitur, *Mensura* dicitur.

SCHOLION.

24. *Hæc definitio latior praxi respondet: strictius* Euclides *mensuram definit per quantitatem, quæ aliquoties repetita alteri fit æqualis: quam nos in Arithmetica partem aliquotam diximus.*

DEFINITIO 10.

25. Hinc *Mensura linearum* est linea recta arbitrariæ longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda & subdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in 10 partes æquales, qui *Pedes* vocantur: unde ipsa *decempeda* appellatur. Pes subdividitur in 10 *Digitos*; digitus in 10 *Lineas* & ita porro.

SCHOLION.

26. *Mensuræ longitudo & divisio non eadem est ubivis gentium. Varias differentias præter* Willebrordum Snellium (a) *exponunt* Ricciolus, (b) Malletus, (c) Cl. Eisenschmidius (d) *aliique. Aliquas celebrium mensurarum varietates repræsentat tabula sequens in particulis istiusmodi, qualium pes regius Parisinus est* 1440. *Continet is nempe* 12 *digitos, digitus* 12 *lineolas lineola,* 10 *particulas, adeoque pes integer particulas* 1440.

Pes Regius Parisinus	1440	Constantinopolitanus	3140
Rhenanus	$1391\frac{3}{10}$	Bononiensis	$1682\frac{2}{5}$
Romanus	1320	Argentorat.	$1282\frac{3}{4}$
Londin.	1350	Norimberg.	$1346\frac{3}{4}$
Suecius	1320	Dantiscanus	$1271\frac{1}{2}$
Danicus	$1403\frac{2}{5}$	Halensis	1320
Venetus	1540		

SCHOLION 2.

27. *Divisionem mensuræ decimalem primus introduxit* Stevinus, *teste ipsius Geometria practica, dubio procul exemplo* Regiomontani. *Indicem autem decempedarum constituit* 0, *pedum* 1, *digitorum* 2, *linearum* 3 *&c. tanquam denominatorum logarithmos* (§. 364 Arithm.) *quos circello inclusos numeris adscribit. Sed commodius* Johannes Bayerus *in Logistica decimali & Stereometria logarithmos characteribus Romanis expressos apicibus numerorum adscribit. E. gr. tres perticæ, quinque pedes, septem digiti & octo*

Q 2

a) in Eratosthene Batavo lib. 2. c. 1. usque ad 5. p. 121 & seqq. b) in Geogr. Reform. lib. 2. c. 7. f. 43 & seqq. c) Geometrie practique lib. 1. p. 108. d) in disquisit. nova de ponderibus & mensuris veterum Rom. Græc. & Hebr. Sect. 3. c. 1. p. 93. & seqq.

octo lineæ ita scribuntur: $3^{\circ}\ 5'\ 7''\ 8'''$. *Commodissimum sæpe accidit, si numeri integra sive decempedas designantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis, lineis &c. puncto separentur, uti monuimus in Arithmetica* (§. 306). *Ita loco* $3^{\circ}\ 5'\ 7''\ 8'''$ *scribemus* 3. 578. *Admodum R. P.* Franciscus Noël *autor est* (e), *divisionem decimalem non modo in mensuris, sed & ponderibus Sinicis adhiberi.*

DEFINITIO 11.

28. *Superficies* est magnitudo duabus dimensionibus prædita, seu in longitudinem & latitudinem extensa.

COROLLARIUM.

29. Termini secundum longitudinem & latitudinem sunt lineæ, secundum profunditatem ipsamet terminus sui existit.

SCHOLION.

30. *Nimirum in longitudine nullum assumi potest punctum, cui non respondeat aliqua linea secundum latitudinem & contra.*

DEFINITIO 12.

31. Per *Perimetrum* intelligimus continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO 13.

32. *Figura* est continuum perimetro terminatum.

SCHOLION.

33. *Dicitur tam de superficiebus, quam de solidis. In priori casu perimetri sunt lineæ; in posteriori superficies.*

DEFINITIO 14.

34. *Figura rectilinea* est, cujus perimeter ex lineis rectis; *Curvilinea*, cujus perimeter ex curvis; *Mixtilinea*, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis constat.

DEFINITIO 15.

35. *Latus* est linea, quæ est pars perimetri figuræ superficialis

DEFINITIO 16.

36. *Planum* seu *figura plana* est, si e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO 17.

37. *Circulus* est figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C, quod *Centrum* vocari solet, ductæ rectæ sunt inter se æquales. Linea illa *Peripheria* dicitur. Tab. I. Fig. 2.

DEFINITIO 18.

38. *Chorda* AB est recta a peripheria ad peripheriam ducta.

DEFINITIO 19.

39. *Diameter* AE est chorda per centrum C transiens. Ejus dimidium AC sive recta CD ex centro C ad

(e) in Observationibus Mathematico-Physicis in India & China factis c. 7. p. 104 & seqq.

C ad peripheriam ducta dicitur *Semidiameter*, item *Radius*.

COROLLARIUM.

40 Radii ergo unius circuli inter se æquales sunt (§. 37).

DEFINITIO 20.

41. *Arcus* est pars quantalibet peripheriæ AB: *Gradus* vero est pars ejusdem trecentesima sexagesima. Quilibet gradus in 60 *Minuta prima*; minutum quodlibet in 60 *secunda*; secundum unumquodque in 60 *tertia* &c. subdividitur. *Euclides* arcum quoque *peripheriam* vocat.

COROLLARIUM.

42. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus sunt majores gradibus minoris.

SCHOLION.

43. *Scrupula graduum sunt fractiones sexagesimales* (§. 385 Arithm.) *& apicibus suis notantur* (§. 387 Arithm.). *Gradui tanquam integro seu unitati cessit o, minuto primo 1, secundo 2, tertio 3 &c. consequenter gradus cum suis scrupulis eodem modo scribuntur, quo decempeda cum suis* (§. 27). *E. gr. 3 gradus, 25 minuta, 16 secunda ita scribis:* $3^{\circ}\ 25'\ 16''$. *Etsi autem Ægyptii veteres, quibus hanc divisionem acceptam ferunt, hoc artificio computum Astronomicum a fractionibus liberaverint, cum fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum tractari possint, nec sine prudenti consilio eundem in finem eum graduum numerum fecerint, qui per 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9 exacte dividitur, nec minus eum fecerint exponentem rationis, juxta quam scrupula decrescunt, quem 2. 3. 4. 5 & 6 metiuntur; non tamen sine ratione suaserunt post* Stevinum f) Oughredus g), Wallisius h) *aliique, ut sepositis fractionibus sexagesimalibus, decimales reciperentur: nulla enim in decimalibus reductione minorum fractionum ad majores, vel majorum ad minores opus est; sexagesimales vero non sine tædio reducuntur. Multiplicatio quoque & divisio decimalium facilior quam sexagesimalium* (§. 364 & seqq. 393 & seqq. Arithm.). *Id consilium secuti sunt* Henricus Briggius *in Canone triangulorum artificiali apud* Henricum Gellibrand *in Trigonometria Britannica*, Johannes Newton *in Astronomia pariter ac Trigonometria Britannica &* Nicolaus Mercator *in Institutionibus Astronomicis*. Stevinus i) *contendit, eandem circuli divisionem antiquitus, in* seculo sapiente, *quod adstruere conatur, obtinuisse.*

DEFINITIO 21.

44. *Circuli concentrici* sunt, qui idem centrum habent: *Eccentrici* vero, qui habent diversa.

DEFINITIO 22. Tab. I. Fig. 2.

45. *Segmentum circuli* est pars ipsius

f) in præf. ad Tractat de Logistica decimali. g) Clavi Mathemat. c. 1. p. m. 2.
h) Algebræ c. 9. f. 39. Vol. II. Oper. Math.
i) in Cosmographia lib. 1. def. 6. f. 109. Operum Gallice editorum.

ipsius AFBA arcu AFB & chorda AB comprehensa. Dicitur *Segmentum majus*, quod semicirculo majus est; *minus* vero, quod minus est.

DEFINITIO 23.

Tab. I. Fig. 2. 46. *Sector circuli* est pars ejus ACD duobus radiis AC & CD atque arcu AD comprehensa.

DEFINITIO 24.

Tab. I. Fig. 3. 47. Recta HI circulum in L *tangit*, si ipsi ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat. Fig. 5. Circulus vero circulum *intus tangit*, si huic occurrens totus intra Fig. 4. hunc; *extus vero tangit*, si eidem occurrens totus extra hunc cadit.

COROLLARIUM 1.

48. Recta CL ex centro C ad contactum L ducta est radius circuli (§ 39).

COROLLARIUM 2.

Fig. 4. 49. Circuli ergo se extus tangentes in L diversa centra C & c habent, adeoque eccentrici sunt (§. 44).

DEFINITIO 25.

Tab. I. Fig. 6. 50. Linea AB lineam CD *secat* in E, si eam dirimit in partes CE & ED cis & ultra ipsam sitas.

COROLLARIUM 1.

51. Cum etiam CD ipsam AB dirimat in partes AE & EB cis & ultra CD sitas; si AB secet CD in E, etiam vicissim CD secabit AB in eodem puncto E.

COROLLARIUM 2.

52. Si recta MN circulum in O secet, pars ejus ON intra circulum cadit (§. 37). Tab. I. Fig. 7.

COROLLARIUM 3.

53. Si circulus circulum secet, cum utriusque peripheria in se redeat (§. 37), pars peripheriae unius circuli intra alterum cadat necesse est.

DEFINITIO 26.

54. *Angulus* est duarum linearum AB & AC in uno puncto A concurrentium mutua inclinatio. Lineae AB & AC dicuntur *crura*; punctum concursus A *Vertex anguli*. Tab. I. Fig. 9.

SCHOLION.

55. *Angulus hic vel unica littera A vertici ejus adscripta, vel ad evitandam in casibus nonnullis confusionem tribus litteris BAC indigitatur, ita ut vertici adscripta medio loco ponatur. Sæpe nomen angulo imponit littera minor, veluti x, eidem inscripta. Utimur vero angulis ad linearum situm determinandum.*

DEFINITIO 27.

56. *Angulus insistere* dicitur lineae, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO 28.

57. *Mensura anguli* BAC est arcus DE ex vertice A radio prorsus arbitrario AE intra crura ejus AC & AB descriptus. Tab. I. Fig. 9.

COROLLARIUM.

58. Anguli ergo distinguuntur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam: distinguuntur

guuntur enim per illos arcus, arcus vero per rationem ad peripheriam distinguere licet (§.41. *Geom.* & §.132 *Arithm.*). Et eadem de causa quantitas anguli æstimatur ex ratione arcus istius ad peripheriam.

SCHOLION.

59. *Tot scilicet graduum & scrupulorum dicitur esse angulus, quot graduum & scrupulorum est arcus DE* (§.41).

DEFINITIO 29.

Tab. I. Fig. 10. 60. *Anguli contigui* FGH & HGI sunt, quorum idem est vertex G & crus unum commune GH.

DEFINITIO 30.

Tab. I. Fig. 6. 61. Rectæ lineæ AE & EB *in directum* Sitæ sunt, si ejusdem rectæ AB partes existunt.

DEFINITIO 31.

Tab. I. Fig. 6. 62. *Angulus deinceps positus* AEC dicitur, qui oritur, anguli AED latere uno ED in C producto.

COROLLARIUM 1.

63. Habent adeo anguli deinceps positi AEC & AED crus unum AE commune & crus alterum unius CE in directum situm est cruri alteri alterius ED (§.61).

COROLLARIUM 2.

64. Hinc anguli deinceps positi sunt contigui, sed non contra (§.60).

DEFINITIO 32.

Tab. I. Fig. 11. 65. *Angulus rectus* KLM est, cui deinceps positus KLN æqualis est.

DEFINITIO 33.

66. *Angulus obliquus* AEC est, cui deinceps positus AED inæqualis. *Angulus acutus* AEC est obliquus minor recto. *Angulus obtusus* AED est obliquus recto major. Tab. I. Fig. 6.

DEFINITIO 34.

67. *Anguli verticales* o & x sunt, si crura unius AE & EC in directum jacent cruribus alterius EB & ED. Tab. I. Fig. 6.

DEFINITIO 35.

68. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB a diversis plagis in diversis punctis A & B occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *x* & *y* dicuntur *alterni*. Tab. I. Fig. 12.

DEFINITIO 36.

69. Si vero lineæ ST duæ aliæ AP & PR itidem in diversis punctis A & B, sed ab eadem plaga occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *u* & *y*, item *z* & *y*, dicuntur *oppositi*: & quidem *u* dicitur *oppositus externus*, *z* vero *oppositus internus* ipsius *y*.

DEFINITIO 37.

70. *Angulus ad peripheriam* est angulus ABD, cujus vertex B & crura BA atque BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *Angulus in segmento*. Tab. I. Fig. 13.

CO-

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 13. 71. Intercipitur adeo a duabus chordis AB & BD (§. 38 & 54) atque arcui AD insistit (§. 56).

DEFINITIO 38.

72. *Angulus ad centrum* est angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C est, crura vero AC & CD in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

73. Angulus ad centrum a duobus radiis intercipitur (§. 39), adeoque arcui AD insistit (§. 41. 56) consequenter arcus AD ejus mensura (§. 57).

DEFINITIO 39.

Tab. I. Fig. 14. 74. *Angulus extra centrum* HKI est, cujus vertex K extra centrum est, crura vero HK & IK in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

75. Insistit argo arcui HI (§. 41. 56).

DEFINITIO 40.

Tab. I. Fig. 3. 76. *Angulus contactus* HLM est, quem arcus circuli ML cum tangente HL ad contactum efficit.

DEFINITIO 41.

77. *Angulus segmenti* MLH vel MLI est, quem chorda ML cum tangente HL vel LI ad contactum L efficit.

DEFINITIO 42.

Tab. I. Fig. 11. 78. *Linea* KL *perpendicularis* aut *normalis* est ad alteram LM, si cum ea efficit rectum.

COROLLARIUM.

79. Si igitur LK ad NM perpendicularis, anguli ad L deinceps positi æquales sunt (§. 65) & contra.

DEFINITIO 43.

80. *Linea* AB est ad alteram AC *obliqua*, si cum ea efficit angulum obliquum. Tab. I. Fig. 9.

DEFINITIO 44.

81. *Linea* OP *parallela* est alteri QR, si ubique eandem ab ea distantiam servat. Tab. I. Fig. 12.

COROLLARIUM.

82. Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.

DEFINITIO 45.

83. *Lineæ convergentes* TO & VQ sunt, quarum distantia continuo fit minor. Tab. I. Fig. 15.

DEFINITIO 46.

84. *Lineæ divergentes* TN & VP sunt, quarum distantia continuo fit major.

DEFINITIO 47.

85. *Opponi* dicuntur, e quorum uno ad alterum perpendicularem ducere licet.

SCHOLION.

86. Puncta absolute considerata *dicuntur* punctis opponi, *si fuerint termini ejusdem rectæ. Nimirum cum recta sit brevissima linea inter duos terminos* (§. 191), *qualis etiam est perpendicularis inter eas, quæ a puncto ad lineam vel super-*

superficiem duci possunt (§.224) *perpendicularis vicem in eo casu subit, ubi punctum alterutrum extra lineam vel superficiem sumitur.*

DEFINITIO 48.

87. *Triangulum* est figura tribus lineis terminata.

DEFINITIO 49.

Tab. I. Fig. 16. 88. *Triangulum æquilaterum* ABC est, cujus omnia latera inter se æqualia sunt. In genere *Figura æquilatera* dicitur, cujus latera singula inter se æqualia.

DEFINITIO 50.

Tab. I. Fig. 17. 89. *Triangulum æquicrurum* sive *Isosceles* DEF est, quod duo latera æqualia habet.

DEFINITIO 51.

Tab. I. Fig. 18. 90. *Triangulum scalenum* ACB est, cujus nullum latus alteri æquale, seu cujus singula latera sunt inter se inæqualia.

DEFINITIO 52.

Tab. I. Fig. 19. 91. *Triangulum rectangulum* KML est, cujus angulus unus K rectus est.

DEFINITIO 53.

Tab. I. Fig. 20. 92. *Triangulum obtusangulum* PNO est, cujus angulus unus N est obtusus.

DEFINITIO 54.

Tab. I. Fig. 16. 93. *Triangulum acutangulum* ACB est, cujus singuli anguli sunt acuti.

DEFINITIO 55.

94. *Triangulum obliquangulum* est, cujus singuli anguli sunt obliqui.

DEFINITIO 56.

95. *Hypothenusa* ML est latus in triangulo rectangulo angulo recto K oppositum. Tab. I. Fig. 19.

DEFINITIO 57.

96. *Catheti* sunt latera trianguli rectanguli MK & KL angulum rectum K intercipientes.

DEFINITIO 58.

97. *Figura quadrilatera* est, cujus perimeter ex quatuor lateribus constat. *Rectangula* dicitur, si anguli ejus singuli fuerint recti; *obliquangula*, si obliqui,

DEFINITIO 59.

98. *Quadratum* ABDC est figura quadrilatera, æquilatera, rectangula. Tab. I. Fig. 21.

DEFINITIO 60.

99. *Rhombus* EFHG est figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula, Tab. I. Fig. 22.

DEFINITIO 61.

100. *Rectangulum* sive *oblongum* MLKI est figura quadrilatera, rectangula, latera opposita ML & IK, item IM & LK æqualia habens. Tab. I. Fig. 23.

DEFINITIO 62.

101. *Rhomboides* NOPQ est figura Tab. I. Fig. 24.

gura quadrilatera, obliquangula, latera opposita OP & NQ, item ON & PQ, æqualia habens.

DEFINITIO 63.

102. *Parallelogrammum* est figura quadrilatera, cujus latera opposita sunt parallela.

DEFINITIO 64.

Tab. I. Fig. 25. 103. *Trapezium* RTVS est figura quadrilatera non parallelogramma. Quidam *Trapezium* appellant figuram quadrilateram, cujus duo tantum latera opposita sunt parallela, quæ alias *Trapezium parallelarum basium* dici solet: figura vero, cujus neutrum latus alteri parallelum, *Trapezoides* iisdem dicitur.

DEFINITIO 65.

Tab. I. Fig. 26. 27. 104. *Figura polygona* seu *multilatera* ABCED vel FGHKI est, cujus perimeter ex pluribus, quam quatuor, lateribus componitur. Quodsi latera fuerint quinque, *Pentagonum*; si sex, *Hexagonum*; si septem, *Heptagonum*; si octo, *Octogonum* &c. dicitur.

DEFINITIO 66.

105. *Figura æquiangula* est, cujus singuli anguli æquales sunt.

DEFINITIO 67.

106. *Figura regularis* est figura æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO 68.

107. *Figura irregularis* est, quæ non simul æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO 69.

108. *Figuræ inter se æquilateræ* dicuntur, si singula latera unius fuerint sigillatim æqualia singulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO 70.

109. *Figuræ inter se æquiangulæ* sunt, si singuli anguli unius singulis angulis homologis alterius æquales sunt.

DEFINITIO 71.

110. Dicuntur vero tam *anguli* quam *latera homologa*, si eundem ordinem a primo in utraque figura servent.

DEFINITIO 72.

111. *Diagonalis* PN est recta ex vertice anguli unius P in verticem alterius N ducta. Tab. I. Fig. 24.

DEFINITIO 73.

112. *Basis figuræ* est perimetri pars ima KL. Tab. I. Fig. 19.

COROLLARIUM.

113. Cum situs figuræ ipsi non sit essentialis, quamlibet perimetri partem seu latus figuræ quodlibet pro basi assumere licet.

DE-

DEFINITIO 74.

Tab. I. Fig. 19. 114. *Vertex figuræ* M est vertex anguli basi KL oppositus.

DEFINITIO 75.

115. *Altitudo figuræ* est distantia verticis a basi.

DEFINITIO 76.

Tab. VI. Fig. 107. 116. *Figura* ABCDE dicitur *circulo inscripta*, si peripheria per vertices singulorum angulorum ipsius transit: tuncque *Circulus* figuræ dicitur circumscriptus.

DEFINITIO 77.

117. *Figura* abcde dicitur *circulo circumscripta*, si singula ejus latera peripheriam tangant, tumque *circulus* figuræ dicitur *inscriptus*.

DEFINITIO 78.

118. *Mensura figuræ* est quadratum, cujus latus perticæ æquale, diciturque *pertica quadrata*, & in *pedes quadratos*, sicut pes quadratus in *digitos quadratos* dividitur.

DEFINITIO 79.

119. *Eodem modo determinari* dicuntur, si data, per quæ unum determinatur, fuerint similia datis, per quæ determinatur alterum, seu utrobique ex datis similibus per easdem regulas reliqua determinantur.

COROLLARIUM.

120. Quæ itaque eodem modo determinantur, in iis coincidunt ea, per quæ discerni debent, adeoque similia sunt (§. 24. *Arith.*)

CAPUT II.

De

PROPOSITIONIBUS QUIBUSDAM FUNDAMENTALIBUS.

PROBLEMA 1.

121. *A dato puncto A ad datum punctum B lineam rectam ducere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 28. I. In charta

Linea recta ducitur juxta regulam EF ad puncta data A & B applicatam graphio HI, penna aut plumbagine.

II. In ligno vel saxo

Recta delineatur etiam sine regula, si filum creta vel cerussa delibutum punctis datis A & B apprimatur & medio digitis pre-

prehenso sursum trahatur moxque iterum demittatur.

Tab. I. Fig. 29. III. In campo

Recta designatur per baculos LK in punctis datis beneficio libellæ M ad horizontem perpendiculariter defixos, quorum summitati muccinium aut folium chartæ mundæ alligatur, si e longinquo videri debeant.

SCHOLION 1.

122. *Cum regulæ orichalceæ & argenteæ chartam facile nigrent; iis præferuntur, quæ ex lignis Indicis parantur, ut ebenina. His enim accuratam politiem inducere licet, ne sordes facile adhærescant, nec fibræ exiguæ calami graphiique motum uniformem impediant: quod quernis, nuceis & his similibus familiare vitium.*

SCHOLION 2.

Tab. I. Fig. 29. 123. *Pennæ optimæ sunt, quæ ex corvorum alis evelluntur: propterea quod anserinis duriores lineis subtilioribus & purioribus ducendis inserviunt. Baculi vero LK cuspide ferrea K muniuntur, ut eo facilius in terra præsertim duriore defigi queant.*

SCHOLION 3.

124. *Utendum vero est atramento non communi, sed Sinico, tum quia commune ob corrosivitatem vitrioli, quod ipsum ingreditur, chalybeam graphii cuspidem arrodit; tum quia Sinicum facilius effluit, etiamsi atrius sit communi. Accedit, quod Sinico lineæ nitidiores ducantur, quam communi.*

PROBLEMA 2.

125. *Duobus baculis in solo defixis, tertium vel plures in eadem recta cum iis infigere.*

RESOLUTIO.

Baculus ita infigitur, ut oculo in unum directo ceteri non appareant.

Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in Opticis.

PROBLEMA 3.

126. *Lineam rectam metiri.*

RESOLUTIO.

Ad manus sit necesse est mensura (§. 23.). Nimirum pro lineis in Tab. I. Fig. 30.
charta datis abscindantur ex RT 10 partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes designent: intervallum vero 10 pedum RS in residuum lineæ transferatur, quoties fieri potest (§. 25). In campo vel catena, vel fune cannabino, vel pertica in digitos, pedes & decempedas legitime divisis utimur. Sufficit autem ultimam decempedam in pedes & pedem ultimum in digitos dividi. Quodsi ergo lineam rectam metiri jubearis.

I. In charta

1. Ponatur crus circini unum in A & eousque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.

2. Mox

2. Mox circini crus unum in fine decempedæ alicujus, e. gr. in 10. ponatur & notetur, quemnam pedem mensuræ alterum attingat, e. gr. 5. Erit linea AB 1°5'.

II. In Campo

1. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 121) &, si ea mensuræ longitudinem superet, constituantur cum iis alii in eadem recta (§ 125).

2. Funis cannabinus aut catena mensuram largiens ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos secet (§.234): quod perpendiculo appenso evidens redditur.

3. Decempedæ, pedes atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

SCHOLION 1.

127. *Si catena utrinque in annulos desinat, per quos baculos trajicere licet; lineam metimur, baculis hisce cum ceteris in eadem recta continuo collocatis*
Tab. I. Fig. 31. *(§. 125.). Notandum tamen, dum baculus ex A in B transfertur, non in vestigio baculi B, sed prope ipsum in Deundem infigi atque annulorum crassitiem longitudini mensuræ non accenseri debere. Quodsi tamen hæc sit pars mensuræ*
Tab. I. Fig. 32. *eaque subdupla diametri baculi; baculus ex A ablatus in ipso B defigi poterit. Parantur autem catenæ PQ ex filis ferreis pedalibus, earumque longitudo tres decempedas excedere vix debet, ne pondere fiant molestæ: quam ob rationem nec filis ferreis nimium crassis utendum.*

SCHOLION 2.

128. *Si pertica circa alterum sui extremum tanquam centrum per quadrantem circuli elevata & per alterum rursus demissa lineam metitur; crassities ejus longitudini lineæ repertæ toties addenda, quoties ad eam applicata fuit, aut longitudo perticæ particula crassitiei congruente imminuenda. Ceterum quia perticæ ab inæqualitate extensionis prorsus liberæ prærogativam quandam præ catenis & funibus habent; earum extremitates annulis ferreis instrui oportet, ut observantibus, quæ in scholio præcedente diximus, tanto minus periculi supersit, ne a recta dimetienda declinetur.*

SCHOLION 3.

129. *Funes cannabinos humor contrahit & vires diversæ inæqualiter tendunt.* Schwenterus (k) *autor est, cum aliquando exercitiis Geometricis in campo vacaret, longitudinem funis, quæ erat 16 pedum, cadente pruina, horæ unius intervallo, ad pedes 15 rediisse. Ut igitur hi navi tollantur, funiculi, ex quibus conficiuntur, in gyros contrarios contorquendi; ipse autem funis oleo ad ignem ferventi immittendus & postquam exsiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahendus, tandemque cerandus. Nullum longitudinis decrementum notabis, etiamsi funem istiusmodi per diem integrum*

(k) Geometr. pract. lib. 1. Tract. 1. p. 381.

Tab. I. Fig. 33. *grum sub aquis demersum detineas, Ne autem funis humum contingat, sustentaculum Z ipsi supponendum. Perpendiculum, quo ad funem horizontaliter extendendum utimur, ex filo & appenso globo vel pondere plumbeo constat.*

PROBLEMA 4.

130. *Data longitudine lineæ in mensura e. gr. Parisina, invenire eandem in mensura alia, e. gr. Londinensi, cujus ad priorem nota est ratio.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. linea data 186 pedum Parisinorum, quæritur quot eadem sit pedum Londinensium? Quoniam pes Londinensis est ad Parisinum ut 135 ad 144 (§. 26); inferatur (§. 311. *Arith.*):

```
135 : 144 = 186   26784 ( 198 54/135 ped.
         186      135::     Londin.
        ----     -----
         864      1328:
        1152      1215:
         144     -----
       -----      1134
       26784      1080
                 -----
                    54
```

PROBLEMA 5.

131. *Ex dato quovis centro C dato radio quocunque AC circulum describere.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 34.

I. In charta

1. Collocetur circini crus unum in centro dato C & aperiatur intervallo radii dati AC

2. Moveatur circinus circa centrum C: ita crus alterum peripheriam designabit (§. 37).

II. In solo & quotiescunque circini apertura tanta fieri nequit, quanta requiritur, radii vice fungitur filum, funiculus, aut virga sive lignea, sive ferrea.

SCHOLION 1.

132. *Si fune aut filo utimur, cavendum est, ne stylus FA, quo peripheria designatur, e situ perpendiculari dimoveatur: id quod impedit filum transversum FE, si fuerit AF = 3, AE = 4 & FE = 5. Ratio patet per theorema Pythagoricum infra demonstrandum.* Tab. II. Fig. 35.

SCHOLION 2.

133. *Circini, ut instrumenta Geometrica reliqua, ex orichalco parantur ob durabilitatem, tractabilitatem & nitorem hujus metalli. Cuspides tamen crurum ex chalybe fiunt: fert enim ejus durities, ut subtilius exacuantur. Circini, quo ad lineas metiendas & dividendas utimur, crura eadem sunt & invariata. Sed circini, qui peripheriis & arcubus describendis inservit, crus alterum variari potest, ut tam plumbagine, quam atramento Sinico uti detur, prout commodum visum fuerit. Plumbagine nempe utimur, quoties arcus delineantur absoluta operatione rursus delendi. Longitudo vel 3 vel 6 digitorum esse solet.* Tab. II. Fig. 37.

COROL-

COROLLARIUM.

134. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo determinatur, quo peripheria alterius cujuscunque (§. 119); omnes peripheriæ sunt inter se similes (§. 120). Eodem modo patet, omnes circulos & semicirculos esse inter se similes.

THEOREMA 2.

Tab. I. Fig. 2. 135. *Diameter AE dividit tam peripheriam, quam circulum ipsum in duas partes æquales.*

DEMONSTRATIO.

Partes peripheriæ ADE & ABE, itemque circuli ADECA & ABECA determinantur, recta AC circa centrum C mota, donec sibi in directum jaceat (§. 131). Sunt adeo arcus ABE & ADE partes peripheriæ, segmenta ABECA & ADECA partes circuli eodem modo determinatæ, adeoque similes (§. 120). Quamobrem illi ad peripheriam, hæc ad circulum eandem rationem habent (§. 170. *Arithm.*), consequenter tum illi, tum hæc inter se æquantur (§. 177 *Arithm.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

136. Super quavis igitur linea AE ex assumto in ea puncto C (producta, si opus sit, §. 21.) describi potest semicirculus.

THEOREMA 3.

Tab. II. Fig. 34. 137. *Si ex centro C duorum circulorum concentricorum ducantur radii CDA & CEB; tum arcus DE & BA ad peripherias, tum sectores DCE & ACB ad areas suorum circulorum eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Cum circuli concentrici *per hypoth.* idem centrum C habeant (§. 44), & arcus AB atque DE, itemque sectores ACB & DCE describantur radiis AC & DC a communi termino CDA ad communem terminum CEB motis (§. 131); arcus isti atque sectores eodem modo determinantur (§. 119), consequenter illi peripheriarum, hi circulorum partes similes sunt (§. 120.), adeoque illi ad peripherias, hi ad circulos eandem rationem habent (§. 170. *Arithm.*). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

138. Cum arcus DE & AB intra crura ejusdem anguli ACB ex ejus vertice C descripti sint arcus circulorum concentricorum (§. 44); ad suas quoque peripherias eandem rationem habent, consequenter inter se sunt ut peripheriæ (§. 173 *Arithm.*). Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent (§. 41); ipsi quoque eundem continere debent. Tab. II. Fig. 34.

COROLLARIUM 2.

139. Quia anguli quantitas æstimatur

tur per rationem arcus ex vertice intra crura descripti ad totam peripheriam (§. 58); perinde est, quocunque radio arcus iste describatur (§. 137).

COROLLARIUM 3.

140. Eadem ergo manet anguli quantitas, sive crura producantur, sive minuantur.

THEOREMA 4.

Tab. II. Fig. 46. 141. *Angulorum aequalium A & a mensurae BC & de sunt arcus similes, & contra si angulorum A & a mensurae BC & de similes sunt, anguli aequales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum anguli cujuscunque A vel a quantitas aestimetur per rationem arcus BC vel de ex vertice A vel a intra crura descripti ad integram peripheriam (§. 58); si A=a, ratio arcuum BC & de ad peripherias suorum circulorum eadem esse debet, consequenter cum sint partes suarum peripheriarum (§. 42), similes sunt (§. 170 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si arcus BC & de, mensurae angulorum A & a (§. 57), fuerint similes; ad peripherias, quarum partes sunt (§. 42), eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*). Quare cum quantitas angulorum A & a per eam rationem aestimetur (§. 58), eadem omnino esse debet, hoc est, anguli aequales sunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

142. Cum arcus similes eandem rationem habeant ad peripherias, quarum sunt partes (§. 170 *Arithm.*), si fuerint partes aequalium peripheriarum, aequales sunt (§. 177 *Arithm.*). Si ergo mensurae angulorum aequalium fuerint partes ejusdem peripheriae vel aequalium peripheriarum, aequales sunt (§. 141) & contra.

THEOREMA 5.

143. *Anguli recti KLM mensura est quadrans circuli.* Tab. I. Fig. 11.

DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N (§. 21); erit $x=o$ (§. 65). Sed cum ex L super recta NM describi possit semicirculus (§. 136); angulorum x & o mensurae AC & CB junctim sumtae conficiunt semicirculum (§. 57). Ergo unius mensura est dimidius semicirculus, hoc est circuli quadrans (§. 142), *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

144. Cum quadrans circuli 90° complectatur (§. 41); angulus rectus est 90° (§. 59):

COROLLARIUM 2.

145. Omnes adeo recti sunt inter se aequales (§. 141), & aequalis recto etiam rectus est.

COROLLARIUM 3.

146. Acutus igitur minor, obtusus major est quam 90° (§. 66).

THE-

THEOREMA 6.

Tab. I. Fig. 6. 147. *Duo anguli deinceps positi x & y, aut quotcunque ad idem punctum E super eadem recta CD constituti sunt æquales duobus rectis. Et contra si x & y fuerint duobus rectis æquales, CE sita est in directum ipsi ED.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam in casu priore anguli x & y sunt deinceps positi, *per hypoth.* EC cum ED eandem rectam constituit (§.62). In casu posteriore omnes anguli constituti sunt super eadem recta CD ad idem punctum E, *per hypoth.* Quare cum ex E super CD describi possit semicirculus (§. 136); in utroque casu mensura omnium angulorum simul est semicirculus (§. 57). Sed idem est mensura duorum rectorum (§. 143). Ergo anguli isti sunt duobus rectis æquales (§. 142). *Quod erat unum.*

Quodsi x & y fuerint duobus rectis æquales, nec tamen CE ponatur ipsi ED in directum sita, recta quædam alia veluti EA ipsi ED in directum jacebit (§.21), atque hinc o + y & x erunt deinceps positi (§.62), consequenter duobus rectis æquales, *per demonstrata*, adeoque o + y + x = y + x (§. 87 *Arith.* & §. 145 *Geom.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arith.*), CE ipsi ED in directum sita. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

148. Anguli, qui sunt deinceps, x & y, aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ constituti, si junctim summantur, conficiunt 180° (§. 144).

COROLLARIUM 2.

149. Angulorum deinceps positorum dato uno, alter itidem datur: relinquitur nimirum, si datus ex 180° subducatur.

COROLLARIUM 3.

150. Si in campo angulum inaccessum vel obtusum Quadrante metiri jubemur & eum, qui est deinceps, accedere licet; illius loco hunc metimur: ex 180° enim subductus quæsitum relinquit (§. 149).

COROLLARIUM 4.

151. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exacte dimensum esse, si finita operatione deinceps positos etiam metiaris & hos singulos illis singulis addas: quodsi enim ubique prodierit summa 180°, operatio rite peracta (§. 148).

PROBLEMA 6.

152. *Angulum metiri.* Tab. II. Fig. 36.

RESOLUTIO.

Cum anguli ACB mensura sit arcus DE ex centro C intra crura AC & CB descriptus (§.57), totum negotium huc redit, ut numerus graduum, qui arcui DE competunt, determinetur: id quod fit ope

ope semicirculi in 180° exactissime divisi. Nimirum

I. In charta

1. centrum Semicirculi ad verticem anguli C applicatur & radius ejus CE cruri BC admovetur.

2. Gradus in arcu DE inter crura anguli AC & CB intercepto numerantur.

Tab. II. Fig. 38. II. In Campo

1. Instrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus CG uni cruri anguli; centrum vero C vertici ejusdem immineat. Prius obtinetur collineando per dioptras F & G, seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, versus baculum in extremo cruris defixum; posterius vero perpendiculum ad centrum instrumenti applicando.

2. Regula HI circa centrum mobilis versus crus anguli alterum promovetur, donec per pinnulas ipsi affixas baculus in extremo ejus defixus collineanti occurrat.

3. Gradus, quem regula in instrumento indicat, notatur.

SCHOLION 1.

153. *Semicirculus minor, quo in charta utimur,* instrumentum transportatorium *vulgo appellatur. In campo quidam circulo integro; quidam nonnisi quadrante utuntur.*

SCHOLION 2.

154. *Diameter transportatorii est trium fere digitorum Rhenanorum; majorum vero instrumentorum goniometricorum unius pedis aut ad summum unius cum dimidio. Divisio accurata fieri debet. In transportatoriis gradus dimidii satisfaciunt; in majoribus dena prima. Angulos in campo instrumento majore captos, quantum fieri potest, accuratissime in charta designaturi, diametrum transportatorio non multo minorem diametro ejus instrumenti, quo in campo usi sunt, & regulam circa centrum mobilem indulgent.*

PROBLEMA 7.

155. *Data quantitate anguli, ipsum describere.* Tab. II. Fig. 36.

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ducatur recta CB &

2. Super alterum ejus extremum C ponatur centrum instrumenti transportatorii, ita ut radius ejus cum recta CB coincidat.

3. Numerentur gradus dati ab E versus D & ad gradum ultimum notetur punctum D.

4. Ducatur recta CA. Erit ACB angulus quaesitus (§. 141).

II. In campo Tab. II. Fig. 38.

1. Collocetur instrumentum go-

niome-

niometricum ut in probl. præc. (§. 152).

2. Regula HI circa centrum C ad gradum datum promoveatur.

3. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

THEOREMA 7.

Tab. I. Fig. 6. 156. *Si recta AB alteram CD secet in E, anguli verticales x & o, item y & E, sunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=180^\circ \\ y+o=180^\circ \end{array}\right\} (\S.\ 148)$$

Ergo $x+y=y+o$ (§. 87 *Arithm.*) adeoque $x=o$ (§. 91 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse $y=E$ *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

157. Quodsi in campo aut alio in casu angulum inaccessum *x* metiri jubeamur; accessum vero non neget verticalis *o*: hunc ejus loco metiri licet.

SCHOLION.

158. *Cum tyrones sub initium studii Mathematici sensibus atque imaginationi nimis adhuc indulgeant ratiociniis ex assumtis deductis minus adsueti; figuras per data ex hypothesibus theorematum assumta construere ac reliquarum linearum & angulorum per constructionem determinatorum quantitatem explorare* (§. 126. 152) *juvat, ita sensus & veritas propositionis elucescit, & animus ad demonstrationes genuinas percipiendas excitatur: cum enim sit scire avidus, rationes veritatis nosse desiderat. In demonstratione magis acquiescunt tyrones, examine ratiocinationis legitimæ sic facto, non secus ac theoriæ physicæ magis satisfaciunt, ubi factis experimentis decretoriis consonæ deprehenduntur.*

THEOREMA 8.

159. *Omnes anguli* x, y, o, E *&c. circa punctum aliquod E constituti sunt æquales quatuor rectis.* Tab. I. Fig. 6.

DEMONSTRATIO.

Describatur ex puncto E vertice communi angulorum x, y, o, E &c. (§. 45) intervallo quocunque Ea circulus (§. 131); evidens est mensuras omnium angulorum simul sumtas db, bc, ca, ad &c. conficere integram circuli peripheriam (§. 143). Mensura ergo angulorum *x, y, o, E* &c. junctim sumtorum est circulus integer (§. 55). Sed circulus est mensura quatuor rectorum (§. 143). Ergo omnes isti anguli æquales sunt quatuor rectis (§. 141). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

160. Omnes itaque anguli circa idem punctum constituti junctim 360° conficiunt (§. 144).

THEOREMA 9.

161. *Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quæ sibi mutuo congruunt, eo-

rum iidem esse possunt termini (§.3). Ergo unum in locum alterius salva quantitate substituere licet: consequenter æqualia sunt (§.15. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Porro quoniam, quæ sibi mutuo congruunt, eosdem terminos habere possunt (§. 3): quin eodem modo determinari queant dubitandum non est. Sunt igitur similia (§.120) *Quod erat alterum.*

THEOREMA 10.

162. *Quæ æqualia & similia sunt, ea sibi mutuo congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Similia differre nequeunt, nisi quantitate (§.26 *Arithm.*). Quamobrem si æqualia fuerint, prorsus non differunt (§.15 *Arithm.*). Jam si sibi mutuo superimposita non iisdem terminis continerentur, diversitate terminorum differrent: quod cum sit absurdum *per demonstrata*, iisdem terminis contineri debent, consequenter sibi mutuo congruunt (§.3). *Q. e. d.*

THEOREMA 11.

163. *Si linea lineæ congruit, singula puncta unius singulis punctis alterius congruere debent.*

DEMONSTRATIO.

Linearum enim, quæ sibi mutuo congruunt, iidem termini esse possunt (§.3.). Sed termini linearum secundum longitudinem sunt duo puncta; secundum latitudinem & profunditatem ipsæmet sui termini existunt (§.11). Ergo si lineæ congruunt, non modo puncta extrema, sed etiam omnia intermedia congruere debent. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

164. Si centra & radii duorum circulorum congruunt; etiam peripheriæ, in quibus radii terminantur (§.39), consequenter circuli ipsi congruere debent (§. 3).

COROLLARIUM 2.

165. Ex uno itaque puncto eodem radio circulus nonnisi unicus describi potest.

THEOREMA 12.

166. *Si fuerint duo anguli* BAC *& bac æquales, & vertex unius a ponatur super verticem alterius* A; *præterea crus illius* ac *super crus hujus* AC: *etiam crus alterum* ab *super alterum* AB *cadet.* Tab. II. Fig. 39.

DEMONSTRATIO.

Si negas, necesse est ut *ab* vel intra angulum BAC, vel extra eum cadat. Ducatur ex A radio AD arcus Df (§. 131): erit DE mensura anguli BAC, *De* vel *Df* mensura anguli *bac* (§.39); Ergo in casu priore *De* mensura anguli *bac* minor; in posteriore eadem mensura *Df* major foret mensura anguli BAC (§. 20 *Arithm.*). Quod utrumque cum sit

sit absurdum (§. 142); crus *ab* super AB cadit. *Q. e. d.*

THEOREMA 13.

Tab. I. Fig. 9. 167. *Si vertex & crura anguli unius DAE supra verticem & crura alterius BAC cadant; angulus unus DAE alteri BAC æqualis est.*

DEMONSTRATIO.

Describatur enim ex communi vertice A intra crura AD & AE arcus DE (§. 131): erit is mensura anguli DAE (§. 57). Sed quoniam crura DA & DE supra crura alterius anguli BA & AC cadunt, *per hypoth.* idem arcus DE inter crura AB & AC intercipitur. Est igitur & mensura anguli BAC (§. *cit.*), consequenter DAE = BAC (§. 142). *Q. e. d.*

THEOREMA 14.

Tab. II. Fig. 40. 168. *Lineæ rectæ æquales sibi mutuo congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Est ab = AB *per hypoth.* Est vero etiam recta ab similis rectæ AB (§. 17). Ergo ab ipsi AB congruit (§. 162). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

169. Ergo si recta *ab* alteri æquali AB ita applicetur, ut punctum *a* supra A & *a b* supra AB cadat; etiam *b* supra B cadet (§. 3. 11.)

COROLLARIUM 2.

170. Si rectarum extrema coincidunt, singula puncta unius erunt in recta altera (§. 162), atque hinc inter duo puncta nonnisi unica recta cadit.

COROLLARIUM 3.

171. Cum radii circulorum sint lineæ rectæ (§. 39), ubi æquales fuerint, sibi mutuo congruunt (§. 168), consequenter etiam circuli congruere debent (§. 164), atque adeo circuli æquales sunt, quorum æquales sunt radii (§. 161).

COROLLARIUM 4.

172. Quoniam non absimili modo patet, circulum, cujus minor est radius, congruere parti circuli radium majorem habenti; minor est circulus, cujus minor radius; major vero, cujus radius major (§. 20 *Arithm.*).

THEOREMA 15.

173. *Si centro circuli C applicetur lineæ rectæ CD, radio AC æqualis, extremum unum; alterum peripheriam attinget.* Tab. I. Fig. 2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta CD radio æqualis, *per hypoth.* ipsi congruet (§. 168) adeoque eosdem cum eo terminos habere debet (§. 3). Sed radius ex centro eductus in peripheria terminatur (§. 39). Ergo & recta CD ipsi æqualis, si alterum extremum in C hæreat, altero peripheriam attinget. *Q. e. d.*

THEOREMA 16.

174. *Anguli similes sunt etiam æquales.*

DEMONSTRATIO.

In angulis similibus ea coincidunt

dunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 24. *Arithm.*). Quare cum anguli distinguantur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam (§. 58), si anguli sunt similes, arcus isti ad suas peripherias eandem rationem habere, hoc est, & ipsi similes esse debent (§.141 *Geom.* & §.170. *Arith.*) Sunt igitur anguli æquales (§.141). *Q.e.d.*

THEOREMA 17.

175. *In figuris similibus anguli homologi sunt æquales & latera homologa proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

In figuris similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 24 *Arith.*). Quare cum figuræ nequeant distingui nisi per angulos & latera; illi æquales (§.174), hæc proportionalia esse debent (§.154 *Arith.*) *Q.e.d.*

SCHOLION.

176. *Sermo nobis tantum est de figuris rectilineis, quarum latera in se spectata omnia inter se similia sunt. Alias addendum foret, latera homologa debere esse insuper inter se similia & similiter posita, e. gr. arcus circulorum similes convexitatem centro figuræ obvertentes.*

THEOREMA 18.

177. *Figurarum sibi mutuo congruentium* RTVS & rtus *anguli & latera homologa inter se æqualia sunt.* Tab. I. Fig. 25.

DEMONSTRATIO.

Quoniam figuræ RTVS & *rtus* sibi mutuo congruunt, *per hypoth.* iidem utriusque termini esse possunt (§. 3). Quare cum termini earum sint perimetri (§. 31); una *rtus* supra alteram RTVS ita poni potest, ut *tu* ipsi TV, *tr* ipsi TR, *rs* ipsi RS &c. congruat. Ergo latera homologa sunt inter se æqualia (§.161). *Quod erat unum.*

Sunt vero T & *t*, R & *r*, S & *s* &c. vertices; TV, TR, RS, SV & *tu*, *tr*, *rs*, *sv* crura angulorum homologorum (§. 54). Quamobrem & anguli homologi æquales sunt (§.166). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

178. *Patet ex scholio præcedente, quomodo idem theorema ad figuras quoque non rectilineas extendatur.*

CAPVT

CAPUT III.

De

LINEARUM RECTARUM ET TRIANGULORUM SYMPTOMATIS.

THEOREMA 19.

Tab. I. Fig. 25. 179. *Si in duobus triangulis* ABC *&* abc *fuerit* A=a, AB=ab, AC=ac; *erit etiam* BC=bc, C=c, B=b *totaque triangula æqualia & similia erunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiamus triangulum *abc* ita poni super alterum ABC, ut punctum *a* super A & recta *ab* super AB cadat. Quoniam *ab*= AB, *a*=A & *ac*=AC, *per hypoth.* punctum *b* super B (§. 168), recta *ac* super AC (§. 166) & punctum *c* super C (§. 169), consequenter *bc* super BC (§. 170) cadit, adeoque △*abc* alteri ABC congruit (§. 3), consequenter *bc*=BC (§. 161), *c*= C & *b*=B (§. 167), totaque triangula æqualia & similia sunt (§. 161). *Q. e. d.*

PROBLEMA 8.

Tab. I. Fig. 41. 180. *Datis duobus lateribus* AB & AC *cum angulo intercepto* A, *triangulum construere.*

RESOLUTIO.

1. Assumto AB pro basi, in A constituatur angulus datus (§. 155).
2. In crus ejus alterum transferatur altera datarum AC.
3. Tandem ducatur recta BC.

Erit ABC triangulum desideratum (§. 179).

SCHOLION.

181. *Tyrones latera & angulos datos in numeris assumant: quod in aliquibus casibus ad demonstrationes empiricas distinctius percipiendas proderit, quas supra* (§. 158) *commendavimus.*

COROLLARIUM 1.

182. Determinatis adeo duobus lateribus cum angulo intercepto, tota triangula determinantur.

COROLLARIUM 2.

183. Quare si in duobus triangulis ACB & *acb* fiat *a*=A & *ab* : *ac*=AB AC; triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similia sunt (§. 120), consequenter etiam *c*=C & *b*=B, *ab* : *bc*=AB : BC &c. (§. 175).

THEOREMA 20.

184. *In triangulo æquicruro DFE* 1. *anguli ad basin* y *&* u *sunt æquales,* 2. *recta FG, quæ angulum DFE bifariam secat, basin quoque DE,* & 3. *triangulum ipsum bifariam secat: immo* 4. *FG ad basin DE perpendicularis.* Tab. II. Fig. 44.

DE-

DEMONSTRATIO.

Nam o = x, *per hypoth.* DF = FE (§. 89) & FG = FG (§. 81 *Arithm.*) Ergo 1. *y* = *u*, 2. DG = GE, 3. △ DFG = △ GFE (§. 179). Et quia etiam anguli ad G æquales, *per* §. *cit.* 4. FG ad DE perpendicularis normalis est (§. 79) *q. e. d.*

COROLLARIUM.

185. Cum triangulum æquilaterum sit etiam æquicrurum (§. 88. 89.); theorema præsens de æquilatero itidem verum est.

THEOREMA 21.

Tab. I. Fig. 16. 186. *In triangulo æquilatero ABC omnes anguli sunt inter se æquales.*

DEMONSTRATIO.

Est enim AC = CB (§. 88). Ergo A = B (§. 184). Est vero etiam AC = AB (§. 88). Ergo C = B (§. 184). Quare A = C (§. 87 *Arithm.*) *q. e. d.*

COROLLARIUM.

187. Triangulum itaque æquilaterum est etiam æquiangulum (§. 105).

THEOREMA 22.

Tab. III. Fig. 55. 188. *Si trianguli ABC latus unum AC continuetur in D; erit angulus externus DAB major quolibet interno opposito B vel C.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AB bifariam divisa in F ductaque recta CF producenda in G (§. 21), donec fiat GF = FC. Quoniam GC secat AB in F (§. 50), erit *z* = *y* (§. 156), consequenter o = x (§. 179). Sed DAB > o (§. 84 *Arithm.*). Ergo & DAB > x (§. 89 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur esse DAB, aut, quod perinde est (§. 156), ejus verticalem HAC > ACB. *q. e. d.*

THEOREMA 23.

189. *In omni triangulo ABC latus majus AC opponitur majori angulo B; minus AB minori C & contra.* Tab. III. Fig. 57.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB < AC. *per hypoth.* parti hujus AD æqualis est (§. 20. *Arithm.*), Ducatur recta BD (§. 121): erit BAD triangulum æquicrurum (§. 89), adeoque *o* = *x* (§. 184). Sed *o* > C (§. 188). Ergo *x* > C (§. 89 *Arithm.*), consequenter multo magis B > C. *Quod erat unum.*

Sit B > C, *per hypoth.* Si non sit AC > AB, erit vel AC = AB, vel AC < AB, adeoque in casu primo B = C (§. 184.), in altero B < C, *per demonstr.* Sed cum utrumque hypothesin evertat; absurdum est, consequenter si angulus B > C, etiam AC > AB. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 24.

190. *In omni triangulo ABD duo latera* Tab. III. Fig. 57.

latera AD & BD simul sumta sunt tertio AB majora.

DEMONSTRATIO.

Producatur AD in C (§. 21), donec fiat BD = DC, adeoque AC = AD + DB (§. 88. *Arithm.*): erit $\triangle$ BDC æquicrurum (§. 89) & hinc $y = C$ (§. 184), consequenter $C < x + y$ (§. 48. *Arithm.*). Quare AC seu AD + DB $>$ AB (§. 189.). *Q. e. d.*

THEOREMA 25.

Tab. I. Fig. 1.

191. *Linea recta AB est brevissima omnium, quæ intra eosdem terminos A & B continentur.*

DEMONSTRATIO.

Sit curva quæcunque ACB. Ducantur rectæ AC & CB: erit AC + CB $>$ AB (§. 190). Ducantur porro rectæ AD & DC, item C E & EB: erit AD + DC $>$ AC & CE + EB $>$ CB (§. *cit.*), consequenter AD + DC + CE + EB $>$ AC + CB (§. 90 *Arithm.*), adeoque multo magis AD + DC + CE + EB $>$ AB. Quodsi plures ducas subtensas; erit earum aggregatum denuo majus ipsa AB. Quare cum illæ subtensæ cum curva tandem coincidant, erit ea major recta AB intra eosdem terminos contenta. Est ergo recta AB minor curva quacunque intra eosdem terminos contenta, hoc est omnium linearum brevissima, quæ ab A usque ad B duci possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

192. Distantia ergo puncti A a puncto B in plano est linea recta (§. 15. 36): cumque inter duo puncta nonnisi unica linea recta contineri possit (§. 170); via in plano brevissima est numero unica.

COROLLARIUM. 2.

193. Singula itaque peripheriæ puncta a centro circuli æqualiter distant (§. 37).

PROBLEMA 9.

194. *Metiri distantiam duorum locorum A & B ex eodem tertio C accessorum.*

RESOLUTIO.

Tab. II. Fig. 42.

1. In loco C ad arbitrium electo defigatur baculus.
2. Linea AC transferatur ope funis & catenæ ex C in *a*, ita ut baculus in *a* defigendus sit cum C & A in eadem recta (§. 125).
3. Eadem ratione ex C in *b* transferatur linea CB.
4. Investigetur longitudo rectæ *a b* (§. 126). Dico, *a b* esse æqualem distantiæ quæsitæ.

DEMONSTRATIO.

Cum loca A & B punctorum instar in eodem plano sitorum conside-

ſiderentur, eorum diſtantia eſt recta AB (§.192). Quoniam vero A a & Bb ſunt lineæ rectæ *per conſtr.* & ſe mutuo ſecant in C (§. 50).

erit $x = y$ (§.156).

Præterea $aC = CA$, $bC = CB$ } *per conſtr.*

Ergo $ba = AB$ (§179). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. II. Fig. 42. 1. Collocato inſtrumento goniometrico in C inveſtigetur quantitas anguli x (§.152).

2. Quæratur porro longitudo rectarum AC & BC (§. 126).

3. Ex datis cruribus AC & CB cum angulo intercepto x conſtruatur juxta ſcalam geometricam modicam triangulum $a\,c\,b$ (§. 180).

4. Inveniatur in eadem menſura longitudo baſis $a\,b$ (§.126).

Iidem numeri indicabunt diſtantiam AB in ea menſura, qua in campo uſus es.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim $x = x$ & $ac : cb = AC : CB$, *per conſtr.* conſequenter $cb : ab = CB : AB$ (§.183). Ergo iidem numeri, qui reſpondent rectis $c\,b$ & $a\,b$ in menſura modica, etiam rectis CB & AB in majore reſpondent (§.155. *Arithm.*) *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. II. Fig. 43. 1. In menſula Geometrica in D horizontaliter collocata aſſumatur punctum c, & in eo acicula defigatur, ad quam

2. applicata regula cum dioptris tam diu huc illucque moveatur, donec per ea proſpicienti punctum B occurrat, ducaturque in hoc regulæ ſitu recta $c\,b$.

3. Similiter collineatio fiat in punctum A, ducaturque $c\,a$.

4. Inveſtigetur longitudo rectarum cA & cB (§. 126) &

5. Ex menſura modica transferantur lineæ iſtis proportionales ex c in a & b.

6. Tandem in eadem menſura inveniatur longitudo ipſius $a\,b$ (§. 126).

Iidem numeri indicabunt diſtantiam AB in menſura majore, qua in campo uſus es.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum proxime præcedente.

SCHOLION 1.

Tab. II. Fig. 42. 195. *Quodſi anguſtia ſpatii non permittit, ut integræ AC & BC in* a *&* b *transferantur; poterunt* a c *&* b c *fieri* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ *&c. ipſarum AC & BC: quo in caſu eodem modo ut in reſolutione ſecunda demonſtrabitur, eſſe* a b $= \frac{1}{2}$, *vel* $\frac{1}{3}$, *vel* $\frac{1}{4}$ *&c. ipſius AB.*

SCHOLION. 2.

196. *Notent tyrones artificium, quo demon-*

demonstrationes Geometricas non modo ad facillimam intelligentiam reducere, sed & proprio Marte invenire possunt. Nimirum quicquid vel ex constructione problematis aut hypothesi theorematis, vel ex conspectu figuræ utramque repræsentantis, distincte cognoscitur, per characteres distincte exprimatur, veluti in demonstratione prima præsentis, quod x $=$ y, a c $=$ AC & bc $=$ BC. *Quo facto dispiciatur, cujusnam theorematum antecedentium hypothesis in iis contineatur: thesis enim illius theorematis ostendit, quid ex iis consequatur, veluti in nostro exemplo, quod* a b $=$ AB. *Cum vero maxima demonstrationum pars ex paucis de congruentia & similitudine triangulorum theorematis derivetur; eorundem recordatio tandem familiarissima evadat opus est.*

THEOREMA 26.

Tab. I. Fig. 8. 197. *Si ex punctis extremis C & O rectæ alicujus radiis CP & PO, qui junctim sumti recta CO majores sunt, describantur circuli; ii se mutuo secabunt.*

DEMONSTRATIO.

Sit CP $<$ CO; erit parti hujus veluti CN æqualis (§. 20 *Arithm.*), adeoque ipsi congruit (§. 168). Quare si ex centro C radio CP circulus PNQP describatur (§. 131); erit punctum N in peripheria ipsius (§. 173.) Eodem modo ostenditur, si ex centro O radio OP describatur circulus; fore punctum M in peripheria ipsius. Cum ergo CN + NO $<$ CP + PO, *per hypoth.* & CP $=$ CN (§. 40); erit NO $<$ PO (§. 92 *Arithm.*). Sed PO $=$ MO (§. 40 & *per demonst.*), Ergo NO $<$ MO (§. 89 *Arithm.*), Quare punctum N peripheriæ circuli PNQP cadit intra circulum PMRP, consequenter circuli se mutuo secant (§. 52). *Quod erat unum.*

Nec absimili modo idem ostenditur, si fuerit CP $>$ CO, vel CP $=$ CO. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 10.

198. *Super data recta AB triangulum æquilaterum construere.* Tab. I. Fig. 16.

RESOLUTIO.

1. Ex A tanquam centro intervallo ipsius AB describatur arcus *y* &
2. Ex B eodem intervallo alius *x* (§. 131), qui priorem in C intersecabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AC & CB: erit ACB triangulum æquilaterum.

DEMONSTRATIO.

Etenim AC $=$ AB & BC $=$ AB (§. 40). Ergo AC $=$ BC (§. 87 *Arithm.*). Quare triangulum ABC est æquilaterum (§. 88). *Q. e. d.*

PROBLEMA 11.

199. *Data basi DE & crure DF,*

quod illa dimidia majus sit, triangulum æquicrurum construere.

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 17. 1. Ex uno basis extremo D intervallo cruris dati DF describatur arcus &

2. ex altero extremo E eodem intervallo arcus alius (§. 131), qui ob DF + EF > DE *per hypoth. & constr.* priorem in F intersecabit (§. 197).

3. Ducantur rectæ DF & EF (§. 121). Dico, DFE esse triangulum æquicrurum.

DEMONSTRATIO.

DF = FE, *per constr.* Ergo DFE est triangulum æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

200. Determinatis ergo basi DE & crure DF totum triangulum æquicrurum determinatur.

COROLLARIUM 2.

201. Duo igitur triangula æquicrura DFE & *dfe* eodem modo determinantur, si fiat DF : DE = *df* : *de* (§. 119), consequenter similia (§. 120), adeoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 175 & 109).

THEOREMA 27.

Tab. II. Fig. 45. 202. *Duo semicirculi* CLE *&* DGF *nonnisi in puncto unico* G *se mutuo secare possunt.*

DEMONSTRATIO.

Secent enim, si fieri possit, præterea se etiam in L. Ducantur ex centris A & B ad puncta intersectionum L & G rectæ AL, AG, BL, BG; puncta item intersectionum connectantur recta GL (§. 121). Quoniam BL = BG (§. 40); erit BGL = BLG (§. 184). Sed BGL > AGL (§. 84 *Arithm.*): ergo BLG > AGL (§. 89 *Arithm.*). Porro quia AL = AG (§. 40); AGL = ALG (§. 184). Quare BLG > ALG (§. 89 *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*); duo semicirculi nonnisi unico in puncto se mutuo secare possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

203. Ergo duo integri circuli non nisi duobus in punctis se mutuo secare possunt.

THEOREMA 28.

204. *Si in duobus triangulis* ACB *&* acb *fuerit* AC = ac, AB = ab, BC = bc; *etiam* A = a, B = b, C = c, *totaque triangula æqualia sunt & similia.* Tab. II. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Ex centro A radio AC descriptus concipiatur arcus *y* & ex centro B radio BC. alius *x* (§. 131). Concipiamus porro △ *acb* ita poni supra △ ACB, ut punctum *a* super A & recta *ab* super AB cadat. Quonium *ab* = AB, *per hypoth.*

pun-

punctum b super B cadet (§.169). Et quia ac = AC & bc = BC, *per hypoth.* recta ac in arcu y & bc in arcu x terminabitur (§.173), consequenter punctum c super C cadet (§.202) & rectæ ac, bc rectis AC, BC congruent (§.170). Quare a = A, b = B, c = C (§. 167); cumque △ acb alteri ACB congruat (§.3), △ acb = & ∽ △ ACB (§.161). *Q. e. d.*

PROBLEMA 12.

Tab. I. Fig 18. 205. *Datis tribus lateribus AB, BC, CA, quorum duo simul sumta AC & BC tertio AB majora sunt, triangulum construere.*

RESOLUTIO.

1. Assumta AB pro basi, ex A intervallo ipsius AC describatur arcus y &
2. ex B intervallo ipsius BC arcus alius x (§ 131), qui ob AC + BC > AB *per hypoth.* priorem in C secabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AC & BC (§. 121). Ita factum est, quod petebatur.

COROLLARIUM 1.

206. Cum ex tribus datis rectis nonnisi unicum triangulum construi possit (§. 204); determinatis tribus lateribus, totum triangulum determinatur.

COROLLARIUM 2.

207. Quare si in duobus triangulis ACB & acb fiat AC : AB = ac : ab, AC : BC = ac : bc; triangula eodem modo determinantur (§. 119), consequenter similia (§. 120), adeoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 175. 109).

PROBLEMA 13.

208. *Angulo dato DAE æqualem bac constituere.* Tab. II. Fig. 46.

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ex A intervallo AC describatur arcus BC, erit AB = AC (§. 40).
2. Ducatur recta ac = AC & ex a intervallo ipsius AB describatur arcus x, item
3. Ex c intervallo ipsius CB alius y, qui ob AB + BC > AC (§. 190), seu ab+bc > ac (§.190), priorem in b intersecabit (§. 197).
4. Ducatur recta ab (§. 121).

Dico esse a = A.

II. In Solo

1. Defigatur baculus in C cum A & E, itemque alius in B cum A & D in eadem recta (§.125).
2. In a & c defigantur baculi ea lege, ut sit ac = AC.
3. Ad eos funis vel catena ita applicetur, ut pars ipsius ab = AB & altera cb = CB fiat.
4. In b defigatur baculus.

Dico esse bac = BAC.

Interdum etiam in solo uti licet modo priore.

DEMONSTRATIO.

In utroque casu *ac* = AC, *ab* = AB, *cb* = CB, *per construct.* Ergo *bac* = BAC (§. 204). *Q. e. d.*

Tab II. Fig. 47.

PROBLEMA 14.

209. *Angulum datum HIK in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

1. Ex centro I ducatur radio quocunque arcus LM (§. 131).
2. Ex L & M intervallo dimidia LM majore ducantur arcus se mutuo secantes in N (§. 197).
3. Ducatur recta IN (§. 121).

Dico esse HIN = NIK.

DEMONSTRATIO.

Est enim IL = IM (§. 40), LN = MN *per constr.* IN = IN. Ergo HIN = NIK (§. 204). *Q. e. d.*

Tab. II. Fig. 50.

PROBLEMA 15.

210. *Lineam rectam AB in duas partes æquales dividere & in medio ejus perpendicularem erigere.*

RESOLUTIO.

I. In charta
1. Ex A & B intervallo dimidia AB majore ducantur arcus se mutuo in C secantes (§. 197).
2. Fiat similis intersectio infra lineam in D (§. *cit.*).
3. Ducatur recta DC (§. 121).

Dico esse AE = EB.

DEMONSTRATIO.

△ACB est æquicrurum (§. 198) & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§. 209). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E & ad AB in E perpendicularis (§. 184). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Ponatur circinus in A & eo usque aperiatur, donec medium lineæ attingere videatur in D. Tab. II. Fig. 51.
2. Intervallum AD transferatur ex B in E: quo facto
3. Non difficile erit determinatu punctum medium F.

II. In Solo.
1. Filum longitudini lineæ AB æquale complicetur, ut punctum medium inveniatur.
2. Hoc acicula infixa notetur & filum lineæ datæ rursus coextendatur.
3. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum est, quod petebatur.

SCHOLION.

211. *Duo modi posteriores equidem secandi rectam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi egregius est usus.*

PROBLEMA 16.

212. *Ex puncto G in recta ML dato perpendicularem GI excitare.*

RESOLUTIO.

I. In charta.

1. Po-

Tab. II. Fig. 49. 1. Posito circino in G arbitrario intervallo resecentur utrinque partes æquales GK & GH.

2. Ex punctis K & H intervallo dimidia KH majore fiat intersectio in I (§. 197).

3. Ducatur recta GI (§. 121), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam KG = GH & KI = IH, *per construct.* IG = IG. Ergo anguli ad G sunt æquales (§. 204), consequenter IG ad ML perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

RESOLUTIO alia.

Tab. II. Fig. 25. 1. Normæ, hoc est, instrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compositi crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex supra punctum datum G cadat.

2. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 121), quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Angulus normæ est rectus, *per hypoth.* sed ipsi æqualis est IGL (§. 167): ergo IGL est itidem rectus (§. 145), adeoque IG ad ML perpendicularis (§. 78).

Tab. II. Fig. 52. II. In solo

Normam utimur majore & juxta crus GI filum extenditur. Aut

Tab. II. 1. Filum KIH in duas partes æquales in I divisum ex punctis KIH extenditur & Fig. 49.

2. In I baculus defigitur, tandemque.

3. KH bifariam secatur in G (§. 210). Dico esse GI ad KH perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

Cum KI = HI, & KG = GH, *per construct.* GI = GI. Anguli ad G deinceps positi sunt æquales (§. 204), consequenter IG ad ML normalis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA 29.

213. *Ex uno puncto D super eadem recta AB nonnisi perpendicularis unica CD erigi potest in eodem plano.* Tab. III. Fig. 53.

DEMONSTRATIO.

Si fieri potest, sit præterea DE ad idem punctum D perpendicularis, quæ intra crura anguli ADC cadat: erit ADE angulus rectus (§. 78). Et quoniam CD perpendicularis ad AD, *per hypoth.* CDA similiter rectus est (§. *cit.*), consequenter ADE = ADC (§. 145): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*), ED ad AB perpendicularis esse nequit. *Q. e. d.*

THEOREMA 30.

214. *Si recta CD perpendicularis ad DB continuetur in F, erit etiam DF ad DB perpendicularis.* Tab. III. Fig. 53.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD perpendicularis ad DB *per hypoth.* angulus x rectus est (§.78). Ergo y similiter rectus est (§.65), consequenter DF perpendicularis ad DB (§.78). *Q. e. d.*

THEOREMA 31.

Tab. III. Fig. 54. 215. *Si duo puncta H & Q alicujus rectæ HI a duobus punctis K & L alterius rectæ MN utrinque æqualiter distent; erit HI ad MN perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam puncta H & Q utrinque a punctis K & L æqualiter distant, *per hypoth.* HK = HL & QK = QL (§.192). Est vero etiam QH = QH. Ergo $o = x$ (§.204), consequenter cum HI = HI, anguli ad I æquales (§.179), adeoque HI ad MN perpendicularis (§.79). *Q. e. d.*

PROBLEMA 17.

Tab. III. Fig. 54. 216. *A dato puncto H ad rectam MN perpendicularem HI demittere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Posito circino in H intervallo arbitrario, eodem tamen intersecetur MN in K & L.
2. Ex K & L fiat intersectio in Q (§.197).
3. Ducatur per Q recta HI (§.121). Hæc erit ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KQ = LQ *per construct.* puncta H & Q a punctis K & L utrinque æqualiter distant (§.192). Ergo HI ad MN perpendicularis (§.215). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Applicetur norma ad lineam datam ML; ita ut crus unum eandem stringat, alterum vero punctum datum I attingat. Tab. II. Fig. 52.
2. Ducatur recta GI (§.121), quæ ad ML perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ in casu simili problematis 16 (§.212).

II In solo

Aut utimur norma majore, ut in probl. 16. aut Tab. III. Fig. 54.

1. Fune ex H extenso designantur puncta K & L & in iis baculi defiguntur.
2. Intervallum KL dividitur bifariam in I (§.210).

Dico, baculos in H & I defixos perpendicularem HI designare.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KI = LI, *per construct.* HI = HI; anguli ad I sunt æquales (§.204), adeoque HI ad MN perpendicularis (§.79). *Q. e. d.*

THE-

THEOREMA 32.

Tab. III. Fig 56. 217. *Ab uno puncto H ad eandem rectam LM non nisi unica perpendicularis HI duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc alia HK ad LM itidem perpendicularis, erit o rectus (§.78). Quia HI ad LM perpendicularis, *per hypoth.* erit x quoque rectus (§. *cit.*). Est vero o $>$ x (§.188), adeoque unus rectus altero recto major: quod cum sit absurdum (§. 145), a puncto I ad LM nonnisi unica perpendicularis duci potest. *Q.e.d.*

THEOREMA 33.

Tab. III. Fig. 56. 218. *In omni triangulo rectangulo HIK angulus nonnisi* x *rectus est; reliqui H & K sunt acuti.*

DEMONSTRATIO.

Angulus *y* rectus est (§.79). Sed *y* $>$ *m*, item $>$ H (§. 188). Ergo K & H sunt recto minores, adeoque acuti (§.66). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

219. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus.

COROLLARIUM. 2.

220. In triangulo rectangulo latus maximum est hypothenusa (§ 95. 189.).

THEOREMA 34.

Tab. I. 221. *In triangulo obtusangulo P NO angulus obtusus nonnisi unicus est, reliqui P & O sunt acuti.* Fig. 20.

DEMONSTRATIO.

y + *x* = 2 rectis (§.147). Sed *y*, utpote obtusus *per hypoth.* major recto (§.66). Ergo *x* recto minor. Quoniam vero *x* $>$ O, item $>$ P (§.188); erunt O & P multo magis recto minores, adeoque acuti (§.66). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

222. In triangulo obtusangulo angulorum maximus est obtusus.

COROLLARIUM 2.

223. Ergo latus maximum, quod obtuso opponitur (§. 189).

THEOREMA 35.

224. *Linea perpendicularis HI est brevissima omnium, quae a puncto H ad eandem rectam LM duci possunt.* Tab. III. Fig. 56.

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI perpendicularis ad LM *per hypoth.* angulus x rectus est (§.78), adeoque HK hypothenusa, consequenter HK $>$ HI (§.220). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

225. Ergo distantia puncti a linea vel plano est recta ab illo puncto ad lineam vel planum perpendicularis (§. 15).

COROLLARIUM 2.

Tab. III. Fig. 58. 226. Quare si linea HI fuerit ipsi K L parallela, erunt perpendicula quaevis

ex illa in hanc demissa GE, AB, CD inter se æqualia & contra (§. 81).

COROLLARIUM 3.

227. Altitudo figuræ est perpendiculum ex vertice in basin demissum (§. 115).

COROLLARIUM 4.

Tab. I. Fig. 19. 228. In triangulo rectangulo angulus K rectus (§. 91) & hinc cathetus unus MK ad alterum KL perpendicularis (§. 78). Ergo si KL sumatur pro basi, erit M vertex (§. 114), adeoque MK altitudo (§. 227).

COROLLARIUM 5.

Tab. I. Fig. 21. 23. 229. Similiter in quadrato & oblongo latus unum cum altero efficit rectum C vel K (§ 98. 100), adeoque unum ad alterum perpendiculare (§. 78). Quod si ergo latus unum CD vel IK sumatur pro basi; erit A vel L vertex (§. 114), consequenter AC vel LK altitudo (§. 227).

THEOREMA 36.

Tab. III. Fig. 58. 230. *Si HI fuerit parallela & BA perpendicularis ad KL; erit eadem AB etiam perpendicularis ad HI.*

DEMONSTRATIO.

Fiat EB = BD & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 212); erit GE = CD (§. 225) & E = D (§. 78. 145), consequenter BG = BC & $y = u$ (§. 179). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL, *per hypoth.* ideo $u + x = o + y$ (§. 79). Ergo & $x = o$ (§. 91. *Arithm.*). Quare cum porro sit AB = AB; erit & m = n (§. 179), adeoque BA ad HI perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

231. Sunt ergo EG, AB, CD distantiæ tum rectæ KL a recta HI, tum rectæ HI a recta KL (§. 225), adeoque si HI parallela ipsi KL, etiam KL parallela est ipsi HI (§. 81).

THEOREMA 37.

232. *Parallelæ AB & EF eidem tertiæ CD sunt etiam parallelæ inter se, & parallelis parallelæ sunt inter se parallelæ.* Tab. III. Fig. 59.

DEMONSTRATIO.

Ducantur GI & KM perpendiculares ad CD (§. 216): erunt eædem perpendiculares ad EF (§. 214. 230). Ergo GH = KL & HI = LM (§. 226), consequenter GH + HI = KL + LM (§. 88. *Arithm.*) hoc est, GI = KM (§. 86. 87 *Arith.*) adeoque AB parallela ipsi EF (§. 225. 81). *Quod erat unum.* Posterius patet per prius.

THEOREMA 38.

233. *Si duas parallelas AB & CD secet transversa EF in G & H, erunt 1. anguli alterni y & u æquales; 2. angulus externus x æquatur interno opposito u; 3. duo interni oppositi o & u sunt æquales duobus rectis.* Tab. III. Fig. 60.

DE-

DEMONSTRATIO.

Si recta EF secet parallelas AB & CD ad angulos rectos, omnia manifesta sunt per theorema 36 (§. 230). Si vero oblique secet; ducantur perpendiculares GI & HK (§. 212). Producatur GI in M & HK in L (§. 21), donec fiat IM = GI & KL = HK.

1. Quoniam GI perpendicularis ad CD *per construct.* erunt anguli ad I æquales (§. 79). Porro GI = IM *per constr.* & HI = IH. Ergo HG = HM & $u = z$ (§. 179). Eodem modo ostenditur esse HG = GL & $y = t$. Quamobrem & GL = HM (§. 87. *Arithm.*). Est vero etiam HK = GI (§. 226) & hinc HK + KL = GI + IM (§. 88. *Arithm.*), hoc est, HL = GM (§. 86 *Arithm.*) & GH = GH: Unde $t + y = u + z$ (§. 204). Cum itaque $t = y$ & $u = z$ *per demonstrata*: erit $y + y = u + u$ (§. 15 *Arithm.*), hoc est $2y = 2u$, consequenter $y = u$ (§. 94 *Arithm.*): *Quod erat primum.*

2. $x = y$ (§. 156) & $u = y$ (*per n. 1.*). Ergo $x = u$ (§. 87 *Arithm.*): *Quod erat alterum.*

3. $x + o = 180°$ (§. 148). Sed $x = u$ (*per num. 2.*). Ergo $u + o = 180°$ (§. 15. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

PROBLEMA 18.

234. *Datis duobus lateribus AB & BC cum angulo A uni eorum BC opposito, triangulum ABC construere.* Tab. II. Fig. 41.

RESOLUTIO.

1. Ducta recta AB, in puncto A excitetur angulus dato æqualis (§. 208), factaque AB uni datorum laterum æquali,
2. Ex B intervallo alterius lateris dati BC crus anguli AC intersecetur in C.
3. Puncta B & C connectantur recta (§. 121). Sic factum est, quod petebatur.

COROLLARIUM 1.

235. Cum ex duobus lateribus atque angulo uni eorum opposito triangulum construi possit, iis datis trianguli reliqui anguli & crus reliquum una determinatur. Quare si in duobus triangulis ABC & abc fuerit AB = ab, BC = bc & A = a; erit etiam AC = ac, B = b, C = c & △ ABC = △ abc: nulla enim subest ratio, cur triangula ex æqualibus datis constructa inæqualia forent.

SCHOLION.

236. *In genere liquet, æqualia esse, quæ per æqualia determinantur seu, quod perinde est, figuras esse æquales, quæ ex æqualibus datis construuntur. Unde non solum triangulorum, verum etiam reliquarum figurarum congruentia ex hoc principio demonstrari potest.*

COROLLARIUM 2.

237. Quodsi in duobus triangulis ABC & abc fuerit A = a & AB : BC = ab : bc, triangula eodem modo determinantur (§ 119), adeoque similia sunt (§. 120), consequenter etiam B = b, C = c, BC : CA = bc : ca & CA : AB = ca : ab (§. 175).

THEOREMA 39.

238. *Perpendicula KH & GI aequales parallelarum partes KG & HI intercipiunt.*

DEMONSTRATIO.

KH = GI (§. 230. 226), u = y (§. 233) & GH = GH. Ergo KG = HI (§. 235). *Q. e. d.*

THEOREMA 40.

Tab. III. Fig. 61. 239. *Si trianguli cujuscunque* ACB *latus unum* AC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DCA *aequalis duobus internis oppositis y & z simul sumtis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur CE basi AB parallela, erit $x = y$ & $o = z$ (§. 233), consequenter $x + o = y + z$ (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 41.

Tab. III. Fig. 61. 240. *In quovis triangulo ACB tres anguli* y, u, z *junctim sumti sunt aequales duobus rectis seu* 180°.

DEMONSTRATIO.

Nam $o + x = y + z$ (§. 239). Ergo $o + x + u = y + z + u$ (§. 88 *Arithm.*). Sed $o + x + u = 180°$ (§. 147): ergo $y + z + u = 180°$ (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

241. In triangulo igitur rectangulo MKL duo anguli obliqui M & L junctim sumti efficiunt rectum seu 90°, adeoque semirecti sunt, si fuerit aequicrurum (§. 184). Tab. I. Fig. 19.

COROLLARIUM 2.

242. Si unus angulus est obtusus, duo reliqui simul sumti sunt recto minores (§. 66).

COROLLARIUM 3.

243. In triangulo aequilatero ACB quilibet angulus est 60°, nimirum 180 : 3 (§. 186). Tab. I. Fig. 16.

COROLLARIUM 4.

244. Cum itaque in triangulo rectangulo necessario angulus unus sit rectus (§. 91); triangulum rectangulum aequilaterum esse nequit.

COROLLARIUM 5.

245. Si unus trianguli angulus ex 180° subtrahitur, summa duorum reliquorum relinquitur; &, si summa duorum ex 180° aufertur, residuus fit tertius.

COROLLARIUM 6.

246. Si duo anguli unius trianguli aequentur duobus alterius sive sigillatim, sive junctim; etiam tertius unius aequalis est tertio alterius (§. 91 *Arith.*).

COROLLARIUM 7.

247. In quovis triangulo anguli ad basin y & z junctim sumti sunt duobus rectis minores. Tab. III. Fig. 61.

COROLLARIUM 8.

248. Quoniam in triangulo aequicruro DFE

Tab. I. Fig. 17. ro DFE anguli ad basin y & u æquales sunt (§. 184); si angulus ad verticem F subtrahitur a 180° & residuum bisecatur, unus angulorum æqualium y vel u prodit. Similiter si duplum anguli unius ad basin y a 180° subtrahitur, angulus ad verticem F relinquitur.

PROBLEMA 19.

Tab. III. Fig. 62. 249. *In extremitate F lineæ FG perpendicularem FH excitare.*

RESOLUTIO.

1. Super FG construatur △ æquilaterum FIG (§. 189).
2. Producatur GI in H (§. 121), donec fiat HI = GI.
3. Ducatur recta HF (§. 121): quæ erit ad FG perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam △ FIG est æquilaterum, *per constr.* $o = 60°$ & $u = 60°$ (§. 243). Ergo $y = 120°$ (§. 234), consequenter ob FI = HI *per constr.* $x = 30°$ (§. 248). Cum adeo $x + o = 90°$; angulus ad F rectus (§. 144) & HF ad FG perpendicularis est (§. 78). *Q. e. d.*

THEOREMA 42.

Tab. III. Fig. 63. 250. *Si recta DE secet rectam AB in C; non alibi eandem denuo secabit.*

DEMONSTRATIO.

Occurrat enim, si fieri potest, recta DE alteri AB in alio adhuc puncto, e. gr. in A: erunt rectæ ADCE puncta duo A & C in recta altera AB, consequenter recta ADCE tota supra AB cadit (§. 170) atque adeo eam non secat (§. 50): quod cum hypothesi repugnet, DE non alibi, quam in C, ipsam AB secare potest. *Q. e. d.*

THEOREMA 43.

251. *Si in duobus triangulis* AB C & abc *fuerit* AB = ab, A = a & B = b; *erit etiam* AC = ac, BC = bc, C = c & △ ACB = ∽ △ acb. Tab. II. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus △ *abc* poni supra alterum ABC, ita ut punctum *a* super A & recta *ab* super AB cadat. Quoniam *ab* = AB, *a* = A & *b* = B, *per hypoth.* punctum *b* super B (§. 169), recta *ac* super AC & *bc* super BC (§. 167), consequenter *c* super C (§. 250) cadit. Cum adeo △ *abc* alteri ABC congruat (§. 3); erit *ac* = AC, *bc* = BC, c = C (§. 177) & △ *abc* = & ∽ △ ABC (§. 161). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

252. Si in duobus triangulis ACB & *acb* fuerit A = *a*, B = *b* & BC = *bc*; erit etiam C = *c* (§. 246), consequenter AC = *ac*, AB = *ab* & △ ACB = △ *acb* (§. 251).

THEOREMA 44.

253. *Si in triangulo DFE anguli ad basin y & u æquales; triangulum est æquicrurum.* Tab. II. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Secet FG angulum F bifariam (§. 209); erit DF = FE (§. 252). Est ergo △ DFE æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

254. Si ergo tres anguli fuerint æquales; æquilaterum est (§. 88).

THEOREMA 45.

Tab. III. Fig. 60. 255. *Si duas lineas AB & CD secet transversa EF in G & H, ita ut vel* 1. y = u; *vel* 2. x = u; *vel* 3. o + u = 180°; *erunt lineæ istæ inter se parallelæ.*

DEMONSTRATIO.

1. Demittantur ex H & G perpendiculares HK & GI (§. 212); erit K = I (§. 78. 145). Est vero & *y = u, per hypoth.* & HG = HG. Quare HK = GI (§. 252), consequenter cum HK & GI sint distantiæ linearum AB & CD (§. 225); lineæ AB & CD sunt inter se parallelæ (§. 81). *Quod erat primum.*

2. *x = u per hypoth. x = y* (§. 156). Ergo y = u (§. 87 *Arithm.*), consequenter AB & CD sunt inter se parallelæ, *per num. 1. Quod erat secundum.*

3. o + u = 180°, *per hypoth.* Sed o + x = 180° (§. 147). Ergo u = x (§. 87 *Arithm.*), consequenter AB & CD sunt inter se parallelæ, *per num. 2. Quod erat tertium.*

THEOREMA 46.

256. *Si duæ lineæ CG & AB fuerint perpendiculares ad eandem tertiam HI: erunt inter se parallelæ.* Tab. III. Fig. 58.

DEMONSTRATIO.

Fiat AB = EG ducaturque recta KL; erit HI ipsi KL parallela (§. 81), consequenter EB = GA (§. 238), Quare cum etiam sit GB = GB; erit y = u (§. 204), consequenter EG ipsi AB parallela (§. 255.) *Q. e. d.*

THEOREMA 47.

257. *Parallelæ DF & GA inter easdem parallelas FA & DG sunt æquales. Et contra si DF & GA fuerint parallelæ & æquales: erit etiam FA ipsi DG parallela & æqualis.* Tab. III. Fig. 64.

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta DA (§. 121): erit *x = y* & *o = u* (§. 233). Quare cum AD = AD, erit DF = GA (§. 251). *Quod erat unum.*

DF = AG, *per hypoth.* & cum eædem lineæ sint parallelæ *per hypoth. o = u* (§. 233). Quare cum etiam sit DA = DA, erit *x = y* (§. 179), consequenter FA ipsi DG parallela (§. 255), adeoque etiam æqualis *per num. 1. Quod erat alterum.*

PRO-

PROBLEMA 20.

Tab. III. Fig. 65. 258. *Per datum punctum V parallelam rectæ RS ducere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

1. Ex V demittatur perpendicularis IK (§.216).
2. Ex puncto quolibet T erigatur perpendicularis TA = KV (§.212).
3. Per V & A ducatur recta MN, quæ erit ipsi RS parallela (§. 81).

Aliter.

1. Regula ad rectam RS applicetur & circinus intervallo VK aperiatur.
2. Crus unum circini juxta ductum regulæ ab R versus S promoveatur.

Ita crus alterum per V parallelam ipsi RS describet (§. 81.)

Aliter.

1. Per datum punctum V ducatur utcunque recta RG.
2. In V fiat o = x (§.208).

Erit VN seu MN parallela ipsi RS (§.255).

Aliter.

Tab. III. Fig. 66. Ex modo præcedente enatus est sequens.

1. Triangulum rectangulum AVN ex ligno ebenino aut alio Indico paratum ita applicetur ad rectam RS, ut basis ejus VN parti ipsius congruat.
2. Hypothenusæ ejusdem Trianguli AV applicetur regula RG, quæ altera manu in hoc situ immota detineatur.
3. Triangulum AVN juxta ductum regulæ promoveatur, donec basis punctum V attingat.

Erit enim in quovis situ basis VN ob $y = x$ ipsi RS parallela (§. 255.) *Q. e. d.*

Aliter.

Utimur interdum *Parallelismo*, ex duabus regulis ligneis potius, quam orichalceis (§. 122) AB & CD composito, quæ ejusdem ubique latitudinis retinaculis EF & GH inter se æqualibus ita conjunguntur, ut retinacula intervallis æqualibus EG & FH a se invicem distent, ipsæ autem regulæ variis intervallis diduci queant. Nimirum Tab. III. Fig. 67.

1. Regula una debite applicetur ad rectam RS.
2. Altera ad datum punctum V adducatur &
3. Juxta hujus ductum recta AB per V ducatur: quæ erit ipsi RS parallela.

DEMONSTRATIO.

Ducatur obliqua linea EH (§. 121). Quoniam EG = FH, EF = GH per

per constr. & EH = EH, erit $o = u$ (§. 204) adeoque FH parallela ipsi EG (§. 255). Sed AB ipsi EG & RS ipsi FH parallela, *per constr.* Ergo AB parallela ipsi RS (§. 232) *Q. e. d.*

Tab. III. Fig. 68. II. In campo

Commode utimur modo primo antecedentium, vel

1. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).
2. Ad V fiat $o = x$ (§. 208).

Erit MU, quae facile produci potest in N (§. 125), ipsi RS parallela (§. 255).

Aliter.

Tab. III. Fig. 68.

1. In punctis K & T defigantur baculi cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).
2. Fiat $u = x$ (§. 208) & TA = VK.
3. In M & N defigantur baculi cum aliis in V & A defixis in eadem recta (§. 125).

Erit MN parallela ipsi RS.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $x = u$ *per constr.* erit TA parallela ipsi KV (§. 255), consequenter $z = y$ (§. 233). Est vero etiam TA = KV, *per construct.* & TV = TV. Ergo $m = n$ (§. 179), consequenter MN parallela ipsi RS (§. 255). *Q. e. d.*

SCHOLION.

259. *Si parallelismis crebro utaris, retinacula continuo affrictu nimis efforantur & a rectitudine cito recedunt ipsi parallelismi. Huic malo praesens remedium attulit* Jacobus Leupoldus, *artifex insignis, qui retinacula ex geminis lamellis orichalceis elasticis, in medio firmiter connexis, & capita clavorum, quibus regulis affiguntur, conica parare solet. Notum vero est, orichalcum ad elasticitatem usque vehementi contusione indurari.*

THEOREMA 48.

260. *Per idem punctum C eidem rectae DE parallela nonnisi unica AB duci potest.* Tab. III. Fig. 69.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim, si fieri potest, adhuc alia HG, priorem secans in C, cujus adeo pars GC efficit cum parte alterius CB angulum BCG. Ex I erigatur perpendicularis IL (§. 212); erit tum IK ad CG, tum IL ad CB perpendicularis (§. 230), consequenter anguli CKL (§. 214) & CLK recti (§. 78): quod cum sit absurdum (§. 218), per C nonnisi AB ipsi DE parallela duci potest. *Q. e. d.*

Aliter.

Angulus NCH = NQD & NCA = NQD (§. 233). Ergo NCH = NCA (§. 87 *Arithm.*): quod cum sit

ſit abſurdum (§. 84 *Arithm.*), HG & AB non ſunt ſimul ipſi DE parallelæ. *Q. e. d.*

THEOREMA 49.

Tab. III. Fig. 69. 261. *Si recta NO ſecet duas rectas alias HG & DE in C & Q ita ut duo anguli interni oppoſiti HCO & DQN fuerint ſimul ſumti duobus rectis majores; lineæ HG & DE verſus eam plagam divergunt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur ACB parallela ipſi DE per C (§. 258); tum angulus ACO cum angulo DQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed HCO & DQN ſimul ſunt duobus rectis majores, *per hypoth.* Ergo HCO > ACO (§. 90 *Arithm.*), conſequenter AC intra ſpatium HCQD cadit. Erigatur perpendicularis PS (§. 212): erit PR = CF (§. 226), conſequenter PS > PR (§. 84 *Arithm.*) > CF (§. 89 *Arithm.*). Diſtantiæ igitur rectarum HC & DQ verſus H & D creſcunt (§. 225), adeoque lineæ HC & DQ verſus eam plagam divergunt (§. 84). *Q. e. d.*

THEOREMA 50.

Tab. III. Fig. 69. 262. *Si duas rectas HG & DE ſecet transverſa NO in C & Q, ita ut Anguli GCO & EQN ſimul ſumti ſint duobus rectis minores; lineæ CG & QE verſus eam plagam convergunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CG ipſi QE parallela eſſe nequit (§. 233), ducatur AB parallela ipſi DE per C (§. 258): tum angulus BCQ cum angulo EQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed GCO & EQN ſimul ſumti ſunt duobus rectis minores *per hypoth.* Ergo GCO < BCQ, (§. 90 *Arithm.*), conſequenter CB extra ſpatium GCQE cadit. Demittantur perpendiculares LI & CF (§. 216); erit CF = IL (§. 226), conſequenter IK < IL (§. 84 *Arithm.*) < CF (§. 89 *Arith.*). Diſtantiæ igitur rectarum CG & QE decreſcunt verſus G & E (§. 225), adeoque lineæ CG & QE verſus eam plagam convergunt (§. 83). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

263. Si anguli GCQ & EQN ſimul ſumti fuerint duobus rectis minores; erunt ipſi deinceps poſiti duobus rectis majores (§. 147). Quare lineæ, quæ verſus unam plagam convergunt (§. 262), verſus oppoſitam divergunt (§. 261).

PROBLEMA 21.

264. *Datis recta AB & angulis adjacentibus, A & B, qui junctim ſumti* Tab. I. Fig. 18.

sumti duobus rectis minores sunt, triangulum ABC describere.

DEMONSTRATIO.

1. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B (§. 155).
2. Crura AC & BC continuentur, donec sibi mutuo occurrant in C (§. 250. 262). ABC triangulum erit desideratum.

COROLLARIUM 1.

265. Data ergo linea una datisque duobus angulis, triangulum determinatur.

COROLLARIUM 2.

266. Quare si in duobus triangulis
Tab. fiat $A = a$ & $B = b$; triangula eodem
II. modo determinantur (§. 119), adeo-
Fig. que similia sunt (§. 120).
41.

COROLLARIUM 3.

267. Si in duobus triangulis fuerit $A = a$ & $B = b$; consequenter in rectangulis unus obliquorum in uno aequalis uni in altero (§. 145); erit etiam $C = c$ (§. 246), hoc est, △△ ACB & *acb* sibi mutuo aequiangula (§. 109). Quare △△ sibi mutuo aequiangula similia sunt (§. 296) & hinc latera homologa seu aequalibus angulis opposita proportionalia habent (§. 175).

THEOREMA 51.

268. *Si in Triangulo ABC recta DE basi AC parallela ducatur, se-*
Tab. *gmenta crurum cruribus propor-*
III. *tionalia sunt, hoc est, BA : BC =*
Fig. *BD : BE = AD : EC & BA : AC =*
70. *BD : DE, atque △ BDE ∽ △ BAC.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam DE parallela ipsi AC, erit $x = y$ & $u = o$ (§. 233), adeoque △ BDE ∽ △ BAC & BA : BC = BD : BE & BA : AC = BD : DE (§. 267). Ergo & BA : BD = BC : BE (§. 173 *Arithm.*) consequenter AD : BD = EC : BE (§. 193 *Arithm.*) seu BD : AD = BE : EC (§. 169 *Arithm.*), vel denique BD : BE = AD : EC (§. 173 *Arithm.*) *Q. e. d.*

THEOREMA 52.

269. *Recta FH angulum GFE bifariam secans basin GE cruribus* Tab.
adjacentibus EF & GF proportio- III.
naliter secat. Fig.
71.

DEMONSTRATIO.

Producatur EF in I (§. 21), donec fiat FI = GF, erit $o + x = y + u$ (§. 239). Sed $o = x$ *per hypoth.* & $y = u$ (§. 184), adeoque $2y = 2o$ (§. 15 *Arithm.*). Ergo $o = y$ (§. 94 *Arithm.*); consequenter HF ipsi GI parallela (§. 255). Quare EF : EH = FI : GH (§. 268) = GF : GH (§. 168 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

270. Est ergo & EF : GF = EH : GH (§. 173 *Arithm.*), consequenter EF + FG : EF = GE : EH (§. 190 *Arithm.*). seu EF + FG : GE = EF : EH (§. 173 *Arithm.*) hoc est, ut summa crurum ad basin integram, ita crus unum ad segmentum hujus adjacens. *Q. e. d.*

PRO-

Tab. III. Fig. 72.

PROBLEMA 22.

271. *Datis tribus lineis* AB, AC *&* BD, *invenire quartam proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.
3. Ducatur recta BC (§. 121).
4. In D constituatur angulus ipsi ABC aequalis (§. 208).

Dico, esse AB : AC = BD : CE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam o = x, *per constr.* erit BC ipsi DE parallela (§. 255). Quamobrem AB : AC = BD : CE (§. 268). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

272. Quodsi duabus lineis AB & AC datis tertia inveniri debet; etiam BD ipsi AC aequalis fieri, hoc est, AC bis poni debet. Erit nimirum AB : AC = AC : CE.

COROLLARIUM. 2.

273. Si DB sumatur pro unitate; respondebit CE exponenti rationis AC : AB (§. 140 *Arithm.*).

Tab. IV. Fig. 73.

PROBLEMA 23.

274. *Datam rectam* AB *in quotcunque partes aequales dividere.*

RESOLUTIO.

1. Ex recta CD pro arbitrio assumta resecentur tot partes aequales, in quot data AB dividenda, e. gr. 5.
2. Super harum partium intervallo construatur triangulum aequilaterum CED (§. 198).
3. Ex E in *a* transferatur recta AB, itidemque ex E in b.
4. Ducatur recta ab: ducantur itidem aliae ex E in 1. 2. 3. &c.

Dico esse *ab* = AB, *a* 1 = $\frac{1}{5}$ AB, a 2 = $\frac{2}{5}$ AB &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam E *a* = E *b* & EC = ED, *per construct.* erit E *a* : E *b* = EC : ED. (§. 168 *Arithm.*). Quare cum angulus E utrique triangulo ECD & E *ab* communis sit: erit EC : CD = E *a* : *ab* & *o* = *x* (§. 183). Sed EC = CD, *per construct.* Ergo E *a* = *ab* (§. 151 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam *o* = *x*, *per demonstr.* erit *a* 1 parallela ipsi C 1 (§. 255), consequenter EC : C 1 = E a : a 1 (§. 268), hoc est, ob EC = CD, *per construct.* & E a = a b, *per demonstr.* CD : C 1 = *a b* : *a* 1 (§. 168 *Arithm.*). Sed C 1 = $\frac{1}{5}$ CD, *per construct.* Ergo *a* 1 = $\frac{1}{5}$ a b (§. 151 *Arithm.*) *Quod erat alterum.*

Eodem modo ostenditur, esse $a2 = \frac{2}{5}$ AB, consequenter $1.2 = \frac{1}{5}$ AB, & ita porro.

COROLLARIUM.

Tab. IV. Fig. 74. 275. Quodsi ergo CD fuerit utcunque divisa in 1 & 2; eodem modo recta *ab* secabitur in eadem ratione. Est nempe CD : C1 = *ab* : *a*1, CD : C2 *ab* : *a*2 &c. (§. 274).

SCHOLION.

276. *Corollarii hujus usus amplissimus est in architectura tam civili, quam militari, praesertim ubi ichnographia vel amplianda, vel contrahenda.*

PROBLEMA 24.

Tab. IV. Fig. 75. 277. *Scalam Geometricam construere.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AF & in eam transferantur partes 10 aequales B1, 1.2, 2.3, 3.4 &c. intervallum vero 10 partium AB totidem ex B in E, ex E in F &c. quoties libuerit.
2. In A excitetur perpendicularis AC, arbitrariae longitudinis, in partes 10 aequales divisa (§. 249).
3. Per puncta divisionum 1. 2. 3. 4. 5 &c. agantur parallelae cum AF (§. 258).
4. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipsius AB aequales.
5. Tandem puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7 &c. lineis transversis connectantur (§. 121).

Dico, si AB fuerit decempeda, fore B1, 1.2, 2.3, 3.4 &c. pedes, 9.9 digitum unum, 8.8 digitos duos, 7.7 tres, 6.6 quatuor &c.

DEMONSTRATIO.

B1 = 1.2 = 2.3 &c. = $\frac{1}{10}$ AB, *per construct.* Sed pes est decempedae pars decima (§. 25). Ergo cum AB sit decempeda, *per hypoth.* erunt B1, 1.2, 2.3 &c. pedes. *Quod erat unum.*

Porro quia 9.9 est parallela ipsi A9, *per construct.* C.9 : CA = 9.9 : A9 (§. 268). Sed C9 = $\frac{1}{10}$ CA, *per construct.* Ergo 9.9 = $\frac{1}{10}$ A9 (§. 151 *Arithm.*). Quare cum A9 sit pes, *per demonstr.* erit 9.9 digitus (§. 25). Eodem modo ostenditur esse 8.8 duos, 7.7 tres &c. digitos. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

278. *Quemadmodum hic linea exigua A9 in 10 partes aequales dividitur; ita eadem in quotcunque alias eodem artificio dividi potest. Neque opus est, ut angulus A sit rectus; sed idem obliquus esse potest.*

COROLLARIUM.

279. Quodsi ergo circini crus unum collocatur in I & alterum in K, erit intervallum IK = 1° 4′ 5″ & ita porro.

CO-

PROBLEMA 25.

Tab. IV. Fig. 76. 280. *Invenire distantiam duorum locorum AB, quorum unus B tantum accedi potest.*

RESOLUTIO.

1. Baculo ad arbitrium in E defixo, recta BE transferatur ex E in C, ita ut baculus in C defixus sit cum E & B in eadem recta (§. 125).
2. In C constituatur angulus ECF ipsi B æqualis (§. 208).
3. Tandem ex C progrediendum versus D, donec baculus in D defixus sit cum F & C, itemque cum E & A in eadem recta (§. 125).

Dico esse DC = BA.

DEMONSTRATIO.

Nam BE = EC, o = x, *per construct.* & y = u (§. 156). Ergo AB = DC (§. 251). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 77.

1. Defigatur baculus in I cum B & A in eadem recta (§. 125), itidemque alius utcunque in K.
2. Ex K in L transferatur IK, in M vero KB.
3. Denique ex K progrediendum in N, donec baculus ibi defixus sit cum M & L, itidemque cum K & A in eadem recta (§. 125).

Dico esse MN = BA.

DEMONSTRATIO.

BK = KM & IK = KL, *per construct.* o = u, (§. 156). Ergo IB = ML & y = x (§. 179). Quare cum sit o + m = u + n (§. 156), & IK = KL *per constr.* erit IA = NL (§. 251), consequenter AB = NM (§. 91 *Arith.*) *Q. e. d.*

Aliter.

1. Mensula Geometrica in C collocata per dioptras collineetur in A & B, ducanturque rectæ *ac* & *cb*. Tab. IV. Fig. 78.
2. Quæratur distantia stationis a loco accesso AC (§. 126) &
3. Ex scala Geometrica in *a c* transferatur (§. 277).
4. Translocetur mensula in A, ita ut punctum *a* ipsi A immineat & per dioptras regulæ ad *a c* applicatæ baculus in prima statione C defixus conspiciatur.
5. Mox collineatio in B fiat, ducaturque *ab*.
6. Denique in Scala Geometrica capiatur intervallum ipsius *ab* (§. 277).

Ita distantia quæsita AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam *c* = C & *a* = A (*per construct.* & §. 167), erit *ac* : *ab* = AC : AB (§. 267), hoc est, iidem

numeri rationes *ac* : *ab* & AC : AB indigitant (§.149 *Arithm.*) *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 78. 1. Baculo in C defixo investigetur quantitas angulorum A & C (§. 152), itemque longitudo ipsius AC (§. 126).

2. Ope instrumenti transportatorii & scalæ Geometricæ construatur triangulum *acb* (§. 264).

3. Ad scalam Geometricam applicetur recta *ab* (§. 277).

Ita distantia AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ proxime præcedens.

PROBLEMA 26.

281. *Metiri distantiam duorum locorum inaccessorum* AB.

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 76. Sine instrumentis tædiosior est problematis resolutio, quam ut commendari possit. Cui tamen volupe fuerit eandem experiri, is

1. Statione in E assumta rectas BE & AE inveniat (§. 280).

2. His datis reperiet DC ipsi BA æqualem (§. 194).

Aliter.

Tab. IV. Fig. 79. 1. Duabus stationibus in C & D electis in prima C collocetur mensula & per dioptras collineetur in D, B & A, ducanturque juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ *cd*, *cb*, *ca*.

2. Quæratur distantia stationum CD (§. 126) &

3. Ex scala Geometrica transferatur in *cd* (§. 279).

4. Baculo in C defixo mensula collocetur in D ea lege, ut punctum *d* ipsi D, hoc est puncto, in quo defigebatur ante baculus, immineat & per dioptras regulæ ad *cd* applicatæ respicienti baculus in C occurrat.

5. Hinc porro collineatio fiat in A & B ducanturque rectæ *da* & *db*.

6. Tandem distantia punctorum *a* & *b* investigetur in scala Geometrica (§. 279).

Dico esse *cd* : *ab* = CD : AB.

DEMONSTRATIO.

Est enim *cdb* = CDB & *bcd* = BCD (*per construct.* & §. 167). Ergo *dc* : *cb* = DC : CB (§. 267). Similiter cum sit acd = ACD & adc = ADC (*per construct.* & §. 167), erit *dc* : *ac* = DC : AC, adeoque *bc* : *ac* = BC : AC (§. 196 *Arithm.*), consequenter ob *acb* = ACB (*per construct.* & §. 167) *ac* : *ab* = AC : AB (§. 183) & ob *dc* : *ac* = DC : AC *per demonstr.* *dc* : *ab* = DC : AB (§. 197 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Aliter.

Tab. IV. Fig. 80. 1. Electis duabus stationibus C & D investigetur quantitas angulorum *y* & *x*, item *z* & *w* (§. 152), quorum summæ dant angulos C & D (§. 86 *Arithm.*).

2. Quæratur porro distantia stationum CD (§. 126) &

3. Ducatur in charta linea recta, in quam ex scala Geometrica transferatur recta *cd* ipsi CD respondens (§. 279).

4. Super ea ope angulorum *x* & D construatur triangulum *bcd* & ope angulorum *z* & C alterum *acd* (§. 264).

5. Tandem in scala Geometrica investigetur distantia punctorum *a* & *b* (§. 279).

Dico esse *ab* : *cd* AB : CD.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum proxime præcedente.

SCHOLION 1.

282. *Levi attentione patet, non absimili methodo ex duabus stationibus reperiri distantias plurium locorum.*

SCHOLION 2.

Tab. IV. Fig. 81. 283. *Nec minus manifestum est, mensula situm in istiusmodi operationibus horizontalem esse debere: id quod obtinetur ope perpendiculi Q.*

PROBLEMA 27.

284. *Altitudinem accessam AB metiri.*

RESOLUTIO.

1. Baculus DE tantæ longitudinis sumatur, ut terræ perpendiculariter infixus altitudinem oculi adæquet. Tab. V. Fig. 82.

2. Humi prostratus baculum ad calces pedum perpendiculariter terræ infigi cura (§. 121).

3. Quodsi contingat, ut E & B sint cum oculo C in eadem recta; erit CA = AB; sin punctum inferius F cum E & oculo in eadem recta fuerit, propius cum baculo ad altitudinem AB provolvaris opus est; sin punctum superius, procul recedendum, donec prædicta conditio adimpleatur.

4. Tandem distantiam oculi C ab altitudine AB metiaris necesse est (§. 126).

Dico esse CA = AB.

DEMONTSRATIO.

Quoniam enim AB (§. 227) & ED *per construct.* ad AC perpendiculares; inter se parallelæ sunt (§. 256), adeoque CD : DE = CA : AB (§. 268) Sed CD = DE, *per hypoth.* Ergo CA = AB (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In distantia plurium e. gr. 30, 40 & amplius pedum defigatur Tab. V. Fig. 83.

per-

perpendiculariter baculus DE & aliquo hinc intervallo in C alius minor, ita ut cum oculo in F constituto E & B sint in eadem recta.

2. Investigetur distantia baculorum GF & baculi minoris ab altitudine quæsita HF, itemque differentia altitudinum baculorum GE (§. 126).

3. Quæratur ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 302 *Arithm.*).

4. Huic addatur altitudo baculi minoris FC vel pars AH.

Dico summam esse altitudinem AB.

E. gr. Sit HF = 48′, GF = 20′, GE = 16′, FC = 5″.

$$\begin{array}{llll} 20 - 16 - 48 & 5)\ 192\ (38\tfrac{2}{5} = BH \\ 5 \quad 4 \quad 4 & 15 \quad 5 = FC \\ \hline 192 & 42 \quad 43\tfrac{2}{5} = AB \\ & \underline{40} \\ & 2 \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum HF ipsi AC parallela supponatur, sintque BA (§. 227) & ED *per constr.* ad AC perpendiculares; erunt eædem perpendiculares ad HF (§. 230) adeoque GE & BH parallelæ (§. 256), consequenter GF : GE = HF : AB (§. 268). *Quod erat unum.*

Porro cum HA & FC sint perpendiculares inter easdem parallelas HF & AC (*per constr.* & §. 227); erit FC = HA (§. 226). Quare BH + FC = BH + HA (§. 88 *Arithm.*) = BA (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter. Tab. V. Fig. 84.

1. Mensula in D verticaliter erigatur, ita ut latus ipsius FE sit horizonti parallelum: id quod obtinetur ope perpendiculi Q. Tab. IV. Fig. 81.

2. Ducatur recta *ef* lateri mensulæ parallela, & regula cum dioptris ad hanc applicata vertatur mensula, donec collineatio in altitudinem quæsitam fiat.

3. Circa punctum *e* vertatur regula, donec oculo per dioptras transpicienti apex altitudinis A occurrat, ducaturque recta *eb*.

4. Quæratur distantia stationis ab altitudine *c*C (§. 126) &

5. Ex Scala Geometrica minore transferatur ex *e* in *c* (§. 279):

6. Ex *c* erigatur perpendiculum *bc* (§. 212), quod

7. Ad Scalam Geometricam applicatum (§. 279) partem altitudinis AC manifestat.

8. Addatur altitudo BC.

Dico, summam esse altitudinem AB.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC perpendicularis ad BD (§. 227) & Ce ipsi BD parallela *per constr.* erit eadem AC perpendicularis ad CE (§. 230). Sed ad eandem etiam *bc* perpendicularis, *per constr.* Ergo *bc* ipsi AC parallela (§. 256), consequenter *ec* : *cb* = EC : CA (§. 268).

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli e (§. 152) & distantia stationis eC (§. 126).
2. Super *ec* in Scala Geometrica minore assumta (§. 279) construatur triangulum ad *c* rectangulum *cbe* (§. 264).
3. Reliqua fiant ut ante.

DEMONSTRATIO.

Est enim *c* = C & *e* = E, *per construct.* Ergo *ec* : *cb* = EC : CB (§. 267). *Q. e. d.*

SCHOLION.

285. *In omnibus istis resolutionibus supponitur planities perfecte horizontalis: quæ cum rarissime in praxi occurrat, si notabilis fuerit declivitas, non tam instrumenti altitudo, quam ipsa CB addenda, in altitudine accessa facile investiganda. Necesse etiam est, ut baculi, quantum fieri potest, exactissime ad horizontem perpendiculariter infigantur & in instrumentis præscripta ratione collocandis cura maxima adhibeatur: imo altitudo BC eodem modo investigari potest, quo ipsam AC invenimus.*

PROBLEMA 28.

286. *Altitudinem inaccessam AB metiri.* Tab. V. Fig. 83.

RESOLUTIO.

Sine instrumentis prolixa est operatio. Nimirum

1. Distantia stationis CA vel FH quæritur per problema 25 (§. 280).
2. Reliqua fiunt, ut in problemate præcedente (§. 284.).

Aliter.

1. Statione in D electa mensula collocetur ut in problemate præcedente (§. 284). Tab. V. Fig. 85. n. 1.
2. Ducantur ut ibidem rectæ *ef* & *af*.
3. Baculi in G defixi, ut sit in recta *f*C, quæratur distantia a puncto *f* (§. 126) &
4. Ex scala Geometrica transferatur in *fe* (§. 279).
5. Sub puncto *f* in D defigatur baculus & mensula ita collocetur in G, ut punctum *e* ipsi G immineat & per dioptras regulæ ad *ef* applicatæ respicienti baculus in D occurrat.
6. Vertatur regula circa punctum *e*, donec per dioptras prospiciens

ens apicem A videat, ducaturque recta *e a*.

7. Ex puncto *a* demittatur *ac* ad *fc* perpendicularis (§. 216): quæ

8. Ad Scalam Geometricam (§. 279) applicata prodit altitudinem AC.

9. Quodsi puncta B, E, D fuerint in eadem recta, addatur altitudo puncti *f* ut habeatur AB; sin minus, regula circa *e* vertatur, donec per dioptras despiciens videat B, ducatur *e b*, perpendiculum *ac* continuetur, donec ipsi *eb* in *b* occurrat. Etenim *a b* in Scalam Geometricam translata manifestabit AB. Tab. V. Fig. 85. n. 2.

DEMONSTRATIO.

In △△ enim *fe a* & F e A est angulus a f e = AFC & *a e f* = A e F *per construct.* Ergo *fe* : *e a* = F e : eA (§. 267). Porro AC & *ac* perpendiculares ad FC (per §. 227 & *constr.*) adeoque inter se parallelæ (§. 256). Quare a e : a c = Ae : AC (§. 268), consequenter *fe* : *ac* = Fe : AC (§. 194 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam *ab* parallela ipsi AB *per demonstrata*: erit *ae* : *ab* = Ae : AB (§. 268), consequenter *fe* : *ab* = Fe : AB (*per demonstr.* & §. 194 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter. Tab. V. Fig. 85.

1. Investigetur quantitas anguli AFC in D & anguli AeC in G itemque CeB in eadem statione G (§. 152).

2. Quæratur distantia Fe (§. 126).

3. Construatur ex his datis juxta Scalam modicam triangulum a e f (§. 279).

4. Demittatur ex vertice *a* in basin continuatam perpendicularis *a c* (§. 216) indefinite producenda.

5. Fiat angulus c e b ipsi CeB æqualis (§. 208) & producatur crus *eb*, donec perpendiculari *a b* in *b* occurrat (§. 21).

Dico esse *fc* : *ab* = FC : AB.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

CAPUT IV.

De

CIRCULI SYMPTOMATIS.

THEOREMA 53.

Tab. I. 287. *Circuli se intus tangentes sunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus unus alterum Fig. 5.

rum intus tangit, *per hypoth.* ille totus intra hujus peripheriam continetur (§. 47). Quare si ex centro ejus C ducatur in peripheriam majoris recta CN (§. 121); ea peripheriam minoris in M secabit (§. 50), eritque adeo radius minoris CM pars ipsius CN (§. 9 *Arithm.*). Quodsi jam C ponatur centrum commune circulorum; erit CL = CM & CL = CN (§. 40), adeoque CM = CN (§. 87 *Arithm.*), quod cum sit absurdum (*per demonstr.* & §. 84 *Arithm.*); circuli idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

Tab. V. Fig. 86.

THEOREMA 54.

288. *Duo circuli se mutuo secantes sunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus x alterum z secat, *per hypoth.* pars illius intra hunc cadit (§. 53). Ducatur itaque ex C centro circuli x radius CB, qui continuatus ad peripheriam circuli z secabit peripheriam illius in B (§. 50) eritque CB pars ipsius CE (§. 9 *Arithm.*). Quodsi C ponatur centrum etiam circuli z; erit CB = AC & CE = AC (§. 40), adeoque CB = CE (§. 87 *Arithm.*). Quod cum sit absurdum (*per demonstr.* & §. 84 *Arithm.*); circuli x & z idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA 55.

289. *In eodem vel in aequalibus circulis chordae aequales AB & DE aequales arcus subtendunt: & contra.* Tab. V. Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB = DE *per hypoth.* BC = CE & AC = DC (§. 40); angulus ACB = DCE (§. 204), consequenter arcus AB & DE, mensurae angulorum ACB & DCE (§. 57), aequales sunt (§. 142). *Quod erat primum.*

Arcus AB & DE aequales sunt *per hypoth.* Sunt vero etiam iidem mensurae angulorum ACB & DCE (§. 57): anguli igitur isti aequales sunt (§. 142). Quoniam porro BC = CE & AC = CD (§. 40); erit quoque AB = DE (§. 179). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 56.

290. *Si in circulis inaequalibus arcus AB & ab fuerint similes, chordae cognomines ad suos radios AC & ac eandem rationem habent.* Tab. V. Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & *ab* similes sunt, *per hypoth.* iidemque mensurae angulorum ACB & acb (§. 57); erit ACB = *acb* (§. 142).

 Est

Est vero AC:BC = *ac:bc* (§. 40 *Geom.* & §. 149 *Arithm.*). Ergo AB:BC = *ab:bc* (§. 183). *Q. e. d.*

THEOREMA 57.

Tab. V. Fig. 88. 291. *Radius* CE *chordam* BA *bifariam secans in* D *etiam arcum bifariam secat in* E *& ad chordam* AB *perpendicularis: & contra.*

DEMONSTRATIO.

AD = DB, *per hypoth.* AC = CB (§. 40) & DC = DC. Ergo *o* = *x* & *y* = *u* (§. 204), consequenter CE ad AB perpendicularis in D (§. 79) & arcus AE atque EB, aequalium angulorum u & y mensurae (§. 57), aequales sunt (§. 142): *Quod erat primum.*

Sint arcus AE & EB aequales *per hypoth.* cum iidem sint mensurae angulorum u & y (§. 57); erit y = u (§. 142). Est vero etiam AC = CB (§. 40) & DC = DC. Ergo AD = DB & *o* = *x* (§. 179), consequenter CD ad AB perpendicularis (§. 79). *Quod erat secundum.*

Sit denique radius CE perpendicularis ad chordam AB in D *per hypoth.* erit *o* = *x* (§. 79). Est vero etiam AC = CB (§. 40) & hinc *m* = *n* (§. 184), consequenter *y* = *u* (§. 246). Quare arcus AE & EB aequalium angulorum u & y mensurae (§. 57) aequales sunt (§. 142) & AD = DB (§. 251). *Quod erat tertium.*

THEOREMA 58.

Tab. V. Fig. 88. 292. *Si recta* NE *chordam* AB *bifariam secet & ad eam perpendicularis fuerit; per centrum transit & tam arcum* AEB, *quam* ANB *bifariam secat.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND perpendicularis ad AB, *per hypoth.* erit *o* = *x* (§. 79). Est vero etiam AD = DB *per hypoth.* & ND = ND. Ergo AN = NB (§. 179), consequenter arcus cognomines aequales sunt (§. 289). Eodem modo ostenditur, arcus AE & EB aequales esse. *Quod erat unum.*

Arcus AN = NB & AE = EB, *per demonstr.* Ergo NA + AE = NB + BE (§. 88 *Arithm.*) consequenter NE diameter circuli (§. 135), adeoque per centrum transit (§. 39). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 29.

293. *Datum arcum* AB *in duas partes aequales dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur ad punctum medium E chordae AB perpendicularis NE (§. 210), haec arcum AB bifariam secabit (§. 292). *Q. e. f. & d.* Tab. V. Fig. 88.

per-

Tab. V. Fig. 89.

PROBLEMA 30.

294. *Per data tria puncta non in directum jacentia A, B & C circulum describere.*

RESOLUTIO.

1. Ex A & C fiant intersectiones in D & E, itemque aliæ duæ G & H ex C & B.

2. Ducantur rectæ DE & HG (§. 121).

Dico I esse centrum circuli per A, C & B describendi (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C & B sunt in peripheria alicujus circuli, *per hypoth.* atque adeo rectæ AC & CB chordæ (§. 38). Sed ED ad AC, GH ad BC perpendicularis & ED ipsam AC, GH vero BC bifariam secat (§. 210). Ergo utraque per centrum transit (§. 292). Quare cum DE & GH tantum in I se mutuo secent (§. 250); erit I centrum circuli per puncta data A, C & B transeuntis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

295. Assumtis in peripheria vel arcu circuli tribus punctis, centrum inveniri datusque arcus perfici potest.

COROLLARIUM. 2.

296. Si tria puncta unius peripheriæ tribus punctis alterius congruant; peripheriæ totæ congruunt: atque adeo circuli æquales sunt (§. 161).

COROLLARIUM 3.

297. Omne triangulum est circulo inscriptibile (§. 116).

THEOREMA 59.

298. *In eodem vel æqualibus circulis chordæ æquales AB & DE a centro C æqualiter distant: & contra.* Tab. V. Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam FC & CG sunt distantiæ chordarum AB & DE a centro C *per hypoth.* erunt ad chordas perpendiculares (§. 225): & hinc o & x recti (§. 78), adeoque æquales (§. 145). Porro cum AB = DE *per hypoth.* & CF ad AB perpendicularis *per demonstrata* ipsam AB, CG vero perpendicularis ad DE *per demonstrata* ipsam DE bisecet (§. 291); erit FA = DG (§. 177 *Arithm.*). Quare cum etiam sit AC = CD (§. 40); erit CF = CG (§. 235). *Quod erat unum.*

Quodsi distantiæ FC & CG fuerint æquales, *per hypoth.* cum sit $o = x$ *per demonstr.* & AC = CD (§. 40); erit AF = DG (§. 235). Sed AF = $\frac{1}{2}$ AB & DG = $\frac{1}{2}$ DE (§. 291). Ergo AB = DE (§. 177 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 60.

299. *Chordarum maxima est diameter AB.* Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Est enim CO = BC & CN = CA (§. 40). Sed CO + CN > ON (§. 170). Ergo BC + CA, hoc est, BA > ON (§. 89 *Arithm.*) *Q. e. d.*

THEOREMA 61.

Tab. V. Fig. 90. 300. *Si intra triangulum ACB supra ejusdem basi AB construatur triangulum ADB; erunt crura interioris AD & DB simul sumta minora cruribus exterioris AC & CB simul sumtis; angulus vero ad verticem interioris D major angulo ad verticem exterioris C.*

DEMONSTRATIO.

Quia AE < AC + CE (§. 190); AE + EB < AC + CE + EB (§. 90 *Arithm.*), hoc est, AD + DE + EB < AC + CB (§. 86. 89 *Arithm.*). Sed DB < DE + EB (§. 190). Ergo multo magis AD + DB < AC + CB. *Quod erat unum.*

Quoniam o > x & u > m (§. 188); erit o + u > x + m (§. 90 *Arithm.*) *Quod erat alterum.*

THEOREMA 62.

Tab. V. Fig. 91. 301. *Chorda arcus majoris AB major est, chorda minoris AD minor.*

DEMONSTRATIO.

EB + EC > BC (§. 190), hoc est, quia DE + EC = BC (§. 40), EB + EC > DE + EC (§. 89 *Arithm.*) consequenter EB > DE (§. 92 *Arithm.*). Est vero AE + DE > DA (§. 190). Ergo multo magis AE + EB > DA, hoc st, AB > DA (§. 86. 89 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 63.

Tab. I. Fig. 7. 302. *Secantium MA, MN, ME ex eodem puncto M ductarum maxima est MA, quae per centrum transit; reliquae sunt tanto minores, quo a centro remotiores. Contra earundem portiones extra circulum MD, MO, MB sunt tanto majores, quo magis a centro distant; minima est MB secantis MA per centrum transeuntis.*

DEMONSTRATIO.

1. NC + MC > MN (§. 190). Sed NC = CA (§. 40). Ergo CA + CM = NC + MC (§. 88 *Arithm.*) = MA (§. 86 *Arithm.*), > MN (§. 89 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2. MO + EO > ME (§. 190). Sed NO > EO (§. 286). Ergo multo magis MO + ON, hoc est, MN (§. 86 *Arithm.*) > ME. *Quod erat secundum.*

3. CO + OM > MC (§. 190). Sed CO = CB (§. 40). Ergo OM > MB (§. 90 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

4. CD

4. CD + DM > CO + OM (§. 300). Sed CD = CO (§. 40). Ergo DM > OM (§. 90 *Arithm.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA 64.

[Tab. V. Fig. 92.] 303. *Si ex puncto E intra circulum assumto ducantur in peripheriam rectæ EF, EB, GE &c. item EA, ED, EH &c. maxima erit EF, quæ per centrum C transit, reliquæ BE, GE &c. tanto majores, quo maximæ propiores. Contra minima est EA, quæ continuta per centrum transit: reliquæ ED, EH &c. sunt tanto majores, quo ab ea remotiores.*

DEMONSTRATIO.

1. EC + BC > EB (§. 190.) Sed BC = FC (§. 40). Ergo EC + BC = EC + FC (§. 88 *Arithm.*) hoc est, EF (§. 86 *Arithm.*) > EB (§. 89 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2. EI + GI > GE & IB + IC > BC (§. 190), hoc est, ob BC = GI + IC (§. 40), IB + IC > GI + IC (§. 89 *Arithm*), adeoque IB > GI (§. 92 *Arithm.*). Quare EI + IB > EI + GI (§. 90 *Arithm.*) adeoque EI + IB, hoc est, BE (§. 86 *Arithm.*) > GE. *Quod erat alterum.*

3. EC + ED > DC (§. 190), Sed CD = EC + EA (§. 40). Ergo EC + ED > EC + EA (§. 89 *Arithm.*), consequenter ED > EA (§. 92 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

4. EK + KD > ED & KH + KC > CH (§. 190), hoc est, ob CH = CK + KD (§. 40), KH + KC > KC + KD (§. 98 *Arithm.*), adeoque KH > KD (§. 92 *Arithm.*). Quare EK + KH > EK + KD (§. 90 *Arithm.*), adeoque EK + KH, hoc est, EH (§. 86 *Arithm.*), > ED. *Quod erat quartum.*

THEOREMA 65.

304. *Recta IL radio CL perpendiculariter insistens tangit circulum in unico puncto L: nec inter tangentem HL & circulum alia recta duci potest.*

DEMONSTRATIO.

[Tab. I. Fig. 3.] Ducatur enim quælibet alia CK (§. 121). Quoniam IL perpendicularis ad CL *per hypoth.* adeoque L est rectus (§. 78); K erit acutus (§. 218). Ergo CK > CL (§. 220), consequenter quodlibet punctum K a L diversum, hoc est tota linea LI seu HI extra circulum cadit (§. 40), & ideo circulum tangit in unico puncto L (§. 47). *Quod erat unum.*

Ducatur deinde, si fieri potest, inter tangentem HL & circulum recta

recta ML. Demittatur in eam ex centro C perpendicularis CD (§. 216); erit D rectus (§. 78) adeoque CL > CD (§. 220). Cadit itaque D intra circulum (§. 40): quod cum hypothesi repugnet (§. 47), inter tangentem & circulum per contactum transiens recta alia duci nequit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

305. Angulus igitur contactus tangente HL & arcu ML interceptus est quovis rectilineo minor: angulus vero Semicirculi inter radium CL & arcum ML interceptus est quovis rectilineo acuto major.

SCHOLION.

306. *Hoc paradoxum* Euclidis *exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata est de eo controversia inter* Jacobum Peletarium *Cenomani in Gallia Matheseos Professorem &* Christophorum Clavium *Jesuitam Bambergensem: quorum* (l) *hic angulum contactus rectilineo heterogeneum* (§. 30 Arithm.) *agnovit, quemadmodum linea est superficiei heterogenea; ille vero e numero angulorum sustulit & pro non quanto declaravit. Peculiarem de angulo contactus & semicirculi Tractatum A. 1656. conscripsit* Wallisius, *qui legitur Operum Vol. II. f. 605 & seqq. ubi cum* Peletario *angulum contactus omni assignabili minorem adeoque nullius magnitudinis esse defendit.*

COROLLARIUM 2.

307. Circulum in eodem puncto L nonnisi unica recta HI tangere potest.

THEOREMA 66.

308. *Omnis recta HI circulum tangens radio CL ad punctum contactus ducto perpendicularis est.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus IL non esse ipsi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 216) haecque utpote tangens *per hypoth.* extra circulum cadet (§. 47), consequenter CK > CN (§. 84 *Arithm.*) > CL (§. 40 *Geom.* & §. 89 *Arithm.*). Est vero etiam CK < CL (§. 220): quod cum sit absurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis. *Q. e. d.* Tab. I. Fig. 1.

COROLLARIUM 1.

309. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 78).

COROLLARIUM 2.

310. Si HI circulum tangat & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 216), punctum contactus L determinatur.

PROBLEMA 31.

311. *Ducere rectam HI circulum in dato puncto L tangentem.* Tab. I. Fig. 1.

1. Ex

(l) in Schol. ad 16 Elem. III f. 117 & seqq. Tom. 1. Oper.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex centro circuli C ad punctum contactus L ducatur radius CL.
2. In L excitetur perpendicularis LH (§. 249), quæ circulum in L tanget (§. 308). *Q. e. f. & d.*

Tab V. Fig. 91.

THEOREMA 67.

312. *Arcus FG & HI inter chordas parallelas intercepti sunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 216): erit eadem perpendicularis ad GI (§. 230) ob FH & GI *per hypoth.* parallelas, dividetque adeo tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 291). Quare KF − GK = KH − KI, hoc est, FG = HI (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Tab. I. Fig. 13.

THEOREMA 68.

313. *Angulus ad centrum ACD est duplus anguli ad peripheriam ABD, eidem arcui AD insistentis.*

DEMONSTRATIO.

I. Ducatur EF per centrum C ipsi BD parallela (§. 258), erit EB = DF (§. 312), adeoque o = x (§. 142). Sed o = y (§. 156). Ergo x = y (§. 87 *Arithm.*) = $\frac{1}{2}$ ACD. Porro o = u (§. 233). Ergo u = y = $\frac{1}{2}$ ACD (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

II. In casu altero o = 2 y & u = 2 x *per cas. 1.* Ergo x + o = 2 x + 2 y (§. 88 *Arithm.*) hoc est, ABD = $\frac{1}{2}$ ACD (§. 94 *Arithm.*) *Quod erat secundum.* Tab. V. Fig. 93.

III. In casu tertio o + u = 2 y + 2 x *per cas.* 1. & o = 2 y *per cas. 1.* Ergo u = 2 x (§. 91 *Arithm.*) hoc est, $\frac{1}{2}$ ACD = ABD (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat tertium.* Fig. 94.

THEOREMA 69.

314. *Anguli ad peripheriam ABD mensura est arcus dimidius AD, cui insistit.* Tab. I. Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

I. Sit ABD angulus in majore segmento: insistet ergo arcui minori AD quam semicirculo (§. 70. 56), adeoque ipsi respondet angulus ad centrum ACD (§. 72. 135). Sed anguli ACD mensura est arcus AD (§. 73). Ergo ipsius ABD mensura dimidius arcus AD (§. 313. 142). *Quod erat unum.*

II. Sit ACB angulus in semicirculo. Ducatur utcunque recta CD: erit arcus dimidius AD mensura anguli ACD & $\frac{1}{2}$ DB mensura ipsius DCB *per cas. 1.* Ergo $\frac{1}{2}$ ADB mensura anguli ACB. *Quod erat secundum.* Tab. V. Fig. 95.

Tab. V. Fig. 96. III. Sit denique HIK angulus in minore segmento. Ducatur utcunque recta IL: erit ut ante $\frac{1}{2}$ HL mensura anguli HIL & $\frac{1}{2}$ LK mensura anguli LIK *per cas. 1.* Ergo denuo $\frac{1}{2}$ HLK mensura anguli HIK. *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM 1.

Tab. I. Fig. 14. 315. Duo vel plures anguli HLI & HMI eidem arcui HI vel æqualibus arcubus insistentes æquales sunt (§. 142).

COROLLARIUM 2.

Tab. I. Fig. 14. 316. Quare cum porro sit o = x + u (§. 239); erit anguli extra centrum mensura dimidium arcuum HI & LM, quibus ipse & ejus verticalis K insistunt (§. 314).

COROLLARIUM 3.

Tab. V. Fig. 95. 317. Cum angulus in semicirculo ACB semicirculo insistat *per hypoth.* mensura ejus est circuli quadrans (§. 314), adeoque ipse rectus est (§ 143).

COROLLARIUM. 4.

Tab. V. Fig. 96. 318. Cum angulus in majore segmento DIF arcui minori DF, quam est semicirculus, insistat (§ 70), mensura ejus est semiquadrante minor (§. 314), adeoque ipse recto minor (§. 143), consequenter acutus (§. 66).

COROLLARIUM 5.

Tab. V. Fig. 96. 319. Non absimili ratione liquet, angulum in minore segmento HIK esse obtusum.

COROLLARIUM 6.

Tab. VI. Fig. 97. 320. Quoniam o = x + y (§. 239) & anguli o mensura est $\frac{1}{2}$ LM, anguli y vero $\frac{1}{2}$ NO (§. 314); anguli extra peripheriam G mensura est differentia inter dimidium arcum concavum LM, cui insistit, & dimidium convexum NO inter crura interceptum.

PROBLEMA 32.

321. *Normam examinare, utrum exacta sit nec ne.* Tab. VI. Fig. 98.

RESOLUTIO.

1. Describatur intervallo arbitrario semicirculus AEF &
2. Ducantur in eo ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrario assumtum rectæ AE & FE.
3. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex super E cadat. Hoc enim si fieri potest; erit norma exacta.

DEMONSTRATIO.

Tum enim angulus normæ LEM æqualis est angulo AEF (§. 167), adeoque rectus (§. 317), consequenter norma exacta (§. 212). *Q. e. d.*

THEOREMA 70.

322. *Mensura anguli minoris segmenti ATB est dimidium arcus TDB; anguli vero majoris segmenti BTH dimidium arcus majoris BGT.* Tab. VI. Fig. 99.

DE-

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex puncto contactus T diameter TE; erit ATE rectus (§. 308). Cum adeo ejus mensura sit arcus dimidius EBT (§. 135. 143), anguli vero BTE dimidius arcus EB (§. 314); erit anguli ATB mensura dimidius arcus BTD. *Quod erat unum.*

Eodem modo patet, cum dimidius semicirculus EGT sit mensura anguli ETH (§. 135. 143) & dimidius arcus EB mensura anguli BTE (§. 314), esse dimidium arcum BGT mensuram anguli BTH. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM 1.

323. Cum anguli G mensura etiam sit dimidius arcus BDT, ipsius D vero arcus dimidius BGT (§. 314); angulus in majore segmento G æqualis est angulo minoris segmenti ATB & angulus in minore segmento D æqualis est angulo majoris segmenti BTH (§. 142).

COROLLARIUM 2.

Tab. VI. Fig. 99. 324. Si chorda GT ultra circulum continuetur in F; erit anguli BTF mensura semisumma arcuum TB & TG a chordis cognominibus subtensorum. Nam ATF = GTH (§. 156). Ergo ejus mensura dimidius arcus TG (§. 322). Est vero anguli ATB mensura arcus dimidius TB (§. *cit.*). Quare semisumma eorundem arcuum est mensura anguli BTF.

COROLLARIUM 3.

325. Si LM & MN sint tangentes ex eodem puncto ductæ; erit angulorum MLN & MNL mensura arcus dimidius LN (§. 322), consequenter anguli ipsi sunt æquales (§. 142) & ideo LM = MN (§. 253). Tab. VI. Fig. 100.

COROLLARIUM 4.

326. Quia angulorum L, M & N mensura est semicirculus (§. 240. 143), angulorum vero L & N junctim sumtorum arcus LN (§. 322); erit anguli M a duabus tangentibus LM & NM intercepti mensura differentia arcus intercepti LN a semicirculo.

PROBLEMA 33.

327. *Inter duas lineas AB & BE mediam proportionalem BD invenire.* Tab. VI. Fig. 101.

RESOLUTIO.

1. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum dividaturque AE bifariam in C (§. 210).
2. Ex C intervallo ipsius AC describatur semicirculus ADE (§. 136).
3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 212).

Dico esse AB : BD = BD : BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE, *per construct.* m & n sunt anguli recti (§. 78). Sed o + x est itidem rectus (§. 317) & y utrique

triangulo ABD & ADE communis. Ergo o=z (§.246), consequenter y=x (§.cit.), & tunc AB : BD=BD : BE (§.267). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

328. Cum sit AB : BD = BD : BE; ex data sagitta AB & dimidia chorda BD invenitur diameter (§. 302 *Arith.*). Sit e. gr. AB= 80‴, BD=300‴; erit BE= 1125‴, adeoque AB+BE= AE 1205‴ seu fere 12′.

COROLLARIUM 2.

329. Ex demonstratione una liquet, △ rectangulum ADE per lineam perpendicularem DB ex angulo recto D in hypothenusam AE demissam resolvi in duo triangula ABD & BDE inter se & toti ADE similia (§.267).

COROLLARIUM 3.

330. Cum adeo etiam sit AB : AD = AD : AE (§. *cit.*); si lineæ fuerint majores, una datarum ex A in B, altera ex A in E transfertur, factisque reliquis ut in resolutione problematis erit AD media proportionalis quæsita.

COROLLARIUM 4.

331. Si ergo AB sit unitas, erit BD radix ipsius BE, aut AD ipsius AE (§. 247. *Arithm.*).

THEOREMA 71.

Tab. I. Fig. 14. 332. *Si duæ chordæ HM & LI se mutuo secent in K; erit HK : LK=KI : KM.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim x=x & u=u (§.315); ideo HK : LK = KI : KM (§.267). *Q. e. d.*

THEOREMA 72.

333. *Si fuerint duæ secantes GL & GM ex eodem puncto G ductæ; erit GM : GL=GN : GO.* Tab. VI. Fig. 97.

DEMONSTRATIO.

Angulus *x* est utrique triangulo GNO & GLM communis. Anguli GNO mensura est semisumma arcuum NL & NO (§. 324). Sed anguli OML mensura est semisumma eorundem arcuum (§.314). Quare GNO=OML (§. 142), consequenter GM : GL= GN : GO (§. 267). *Q. e. d.*

THEOREMA 73.

334. *Si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ AD & AB, quarum altera circulum tangit, altera secat; erit tangens AD media proportionalis inter totam secantem* AB *& ejus portionem extra circulum* AC. Tab. VI. Fig. 102.

DEMONSTRATIO.

Angulus A est utrique triangulo ACD & ABD communis. Anguli ADC & ABD æquales sunt (§.323). Ergo AC : AD=AD : AB (§.267). *Q. e. d.*

CA-

CAPUT V.

De

FIGURARUM DESCRIPTIONE.

THEOREMA 74.

Tab. VI. Fig. 103. 335. *In parallelogrammis latera opposita sunt æqualia, & si in figura quadrilatera latera opposita fuerint æqualia, erunt eædem parallelogramma.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam OPQN parallelogrammum *per hypoth.* erit OP parallela ipsi NQ & ON parallela ipsi PQ (§. 102), consequenter ducta diagonali PN erit x=o & n=m (§. 233), adeoque OP=NQ & ON=PQ (§. 251). *Quod erat unum.*

Quodsi OP=QN & ON=PQ *per hypoth.* cum etiam sit NP=NP; erit x=o & n=m (§. 204). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

336. Cum in Quadrato, Oblongo, Rhombo & Rhomboide latera opposita æqualia sint (§ 98. 99. 100. 101); erunt Quadratum, Oblongum, Rhombus & Rhomboides parallelogramma (§. 335).

THEOREMA 75.

Tab. VI. Fig. 103. 337. *Diagonalis dividit parallelogramma in duas partes æquales, anguli in iis diagonaliter oppositi sunt æquales, anguli vero ad idem latus oppositi duobus rectis æquantur & duo latera simul sumta sunt diagonali majora.*

DEMONSTRATIO.

In Parallelogrammis ON=PQ & OP=QN (§. 335). Sed PN=PN. Ergo △ NOP=△ NQP (§. 204). *Quod erat unum.*

Quoniam in parallelogrammis OP ipsi NQ & ON ipsi PQ parallela (§. 103): anguli O & N, N & Q, Q & P, P & O simul sumti æquantur duobus rectis (§. 233). *Quod erat secundum.*

Quoniam angulus O+N=N+Q *per demonstrata*; erit O=Q (§. 91 *Arithm.*). Similiter quoniam Q+P=Q+N *per demonstrata*; erit P=N (§. 91 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Denique NO+PO > NP & PQ+QN > PN (§. 190). *Quod erat quartum.*

Tab. VI. Fig. 104.

PROBLEMA 34.

338. *Super data recta CD quadratum construere.*

RESOLUTIO.

1. In C erigatur perpendicularis AC (§. 249) = CD.
2. Ex D & A intervallo ipsius CD fiat intersectio in B (§. 197).
3. Ducantur AB & DB.

DEMONSTRATIO.

AC = CD = AB = BD, *per constr.* Ducta ergo diagonali AD, patet esse C = B (§. 204). Sed C rectus est, *per constr.* Ergo B etiam rectus (§. 145), consequenter o & x, item y & m semirecti (§. 241), adeoque o + x & x + m itidem recti. Quare figura est quadratum (§. 98). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In C & D erigantur perpendiculares CA & DB ipsi CD æquales (§. 249).
2. Ducatur recta AB.

DEMONSTRATIO.

Est enim CA = DB = CD, *per constr.* & quoniam AC & BD perpendiculares ad CD *per constr.* anguli ad D & C sunt recti (§. 78) adeoque BA parallela ipsi DC (§. 226), consequenter anguli A & B sunt recti (§. 233) & ob parallelas AC & BD (§. 256) AB = CD (§. 238). Est igitur ABCD Quadratum (§. 98). *Q. e. d.*

PROBLEMA 35.

339. *Datis duabus rectis MI & IK rectangulum parallelogrammum seu oblongum construere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur MI & IK ad angulos rectos (§. 249). Tab. VI. Fig. 105.
2. Ex M intervallo ML = IK describatur arcus & ex K intervallo KL = IM alius priorem intersecans in L (§. 197).
3. Ducantur rectæ ML & KL.

DEMONSTRATIO.

MI = KL & ML = IK, *per construct.* Est ergo MIKL parallelogrammum (§. 335), consequenter I = L & I + M ac I + K = duobus rectis (§. 337). Sed I est rectus, *per constr.* Ergo & L (§. 145), itemque M & K recti sunt. Est ergo figura constructa oblongum (§. 100). *Q. e. d.*

PROBLEMA 36.

340. *Data recta GH una cum angulo obliquo G rhombum construere.* Tab. VI. Fig. 106.

RESOLUTIO.

1. Ad rectam datam GH constituatur in G angulus dato æqualis (§. 208).

2. Fiat

2. Fiat GE = GH & reliqua peragantur ut in probl. 34. (§.338).

DEMONSTRATIO.

EG = EF = FH = HG, *per construct.* Est ergo EFHG parallelogrammum (§. 335), consequenter G = F & G + H ac G + F = duobus rectis (§. 337). Sed G est angulus obliquus *ex hypothesi*: Ergo & F, consequenter etiam E & H sunt obliqui. Adeoque figura constructa rhombus est (§.99). *Q. e. d.*

PROBLEMA 37.

Tab. VI. Fig. 103. 341. *Datis duabus rectis ON & OP una cum angulo intercipiendo O rhomboidem construere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur rectæ ON & OP sub angulo dato (§. 208).
2. Reliqua peragantur ut in probl. 35 (§. 339).

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ problematis præcedentis.

THEOREMA 76.

Tab. VI. Fig. 107. 342. *Si peripheria circuli dividatur in partes quotcunque æquales ducanturque subtensæ AB, BC, CD &c. figura circulo inscripta regularis est.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim arcus AB, BC, CD &c. sint æquales, *per hypoth.* etiam chordæ cognomines æquales sunt (§. 289) cumque anguli A, B, C &c. æqualibus arcubus BDE, CDA, DEB &c. insistant, ipsi quoque æquales sunt (§. 315). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§. 106). *Q. e. d.*

PROBLEMA 38.

343. *Invenire summam omnium angulorum in quocunque polygono.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicentur 180° per numerum laterum.
2. A producto subtrahantur 360°: residuum est summa quæsita.

E. gr. Pentag.		Hexag.	
	180		180
	5		6
	900		1080
	360		360
	540		720

DEMONTSRATIO.

Quælibet figura ex assumto in ea puncto F in tot triangula AFB, BFC, CFD &c. resolvitur, quot habet latera AB, BC, CD &c. Si ergo 180 per numerum laterum multiplices, prodit summa omnium angulorum in dictis triangulis (§. 240). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent

Tab. VI. Fig. 107.

nent ad angulos polygoni, semper efficiunt 360° (§.159). Quodsi ergo a facto supra invento subtrahantur 360°, summa angulorum polygoni relinquitur. *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VI. Fig. 3. Cum numerus triangulorum ABC, CAD & DAE, in quæ resolvitur figura polygona per diagonales AC & AD ex puncto A ductas a numero laterum AB, BC, CD, DE, EA constanter binario differat; si 180° multiplicentur per numerum laterum binario mulctatum, prodit summa omnium angulorum A, B, C, D & E (§.240). *Q. e. i. & d.*

E. gr. pro Pentag. 180 pro Hexag. 180

180	180
3	4
540	720

COROLLARIUM 1.

344. Quodsi summa inventa per numerum laterum dividatur; quotus est angulus polygoni regularis (§. 106).

SCHOLION.

345. *En tibi tabulam, in qua summa angulorum in figuris rectilineis quibuscunque & quantitas unius in regularibus a trigono usque ad dodecagonum exhibetur (§. 343). Construitur columna secunda continua additione 180; tertia vero numeris in columna per numerum angulorum sive laterum divisis (§.344). Utimur hac tabula tum in*

Num Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. regul.	Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig reg.
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	$147\frac{3}{11}$
VII	900	$128\frac{4}{7}$	XII	1800	150

figuris regularibus describendis; tum in angulorum quantitate examinanda, utrum scilicet instrumento rite explorata fuerit, nec ne. Aberratum enim esse intelligimus, ubi eorum summa minor vel major deprehenditur ea, quæ in tabula definitur, e: gr. si in heptagono superet 900.

COROLLARIUM 2.

346. Si latera figuræ polygonæ cujuscunque continuentur, anguli externi 1. 2. 3. 4 &c. cum angulis figuræ internis efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera, (§. 147). Sed interni soli efficiunt bis tot rectos quot sunt latera, demtis quatuor (§.343). Ergo externi in omni casu conficiunt 4 rectos seu 360°. Tab. VI. Fig. 108.

PROBLEMA 39.

347. *Dato polygono regulari cuicunque ABCDE circulum circumscribere.* Tab. VI. Fig. 107.

RESOLUTIO.

1. Duo ejus anguli E & D dividantur bifariam rectis EF & DF (§. 209) ob angulos FED & FDE duobus rectis minores concursuris in F (§. 262).

2. Ex

2. Ex puncto concursus F describatur radio EF circulus (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Quoniam *o* & *u* sunt angulorum polygoni dimidii, *per construct.* erit $o = u$ (§. 106 *Geom.* & §. 94 *Arithm.*), consequenter EF = FD (§. 253). Circulus adeo transiens per E transit etiam per D (§. 40). Ducatur jam ex F in A recta FA (§. 121). Quoniam $o = x$, *per constr.* ED = AE (§. 106) & EF = EF; erit AF = FD (§. 179). Ergo circulus transiens per D & E transit etiam per A (§. 40). Porro quia AF = EF, *per demonstr.* erit $m = x$ (§. 184). Sed *x* dimidius angulus polygoni, *per constr.* Ergo & *m* (§. 87 *Arithm.*), consequenter etiam *y*. Quare si ducatur FB (§. 121); erit ut ante FB = EF, adeoque radius circuli. Eodem modo ostenditur, FC & si quæ plures fuerint rectæ istiusmodi, esse radios circuli, adeoque circulum transire per omnes angulos polygoni, hoc est, eidem circumscribi (§. 116). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

348. Omnis ergo figura regularis est circulo inscriptibilis (§. 216).

PROBLEMA 49.

349. *Invenire angulum in dato polygono regulari.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Concipiatur polygonum regulare ABCDE circulo inscriptum (§. 348). Quoniam arcus dimidius BCDE est mensura anguli quæsiti A (§. 314); arcus vero AB, qui ipsius EAB dimidius, habetur circuli peripheria per numerum laterum divisa (§. 289); angulus polygoni A relinquitur, si arcum AB a semicirculo subtraxeris. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Quæratur angulus pentagoni. Dividatur 360 per 5, quotus 72 est arcus AB, qui ex 180 subductus relinquit 108 angulum pentagoni quæsitum.

THEOREMA 77.

350. *Quadrilateri circulo inscripti GHIK anguli bini oppositi H & K, item G & I conficiunt duos rectos.* Tab. VI. Fig. *

DEMONSTRATIO.

Insistunt enim junctim sumti integro circulo, e. gr. K arcui GHI & H complemento ejus ad circulum GKI (§. 56), adeoque ipsorum mensura est semicirculus (§. 314). Sunt ergo duobus rectis æquales (§. 143). *Q. e. d.*

PROBLEMA 41.

351. *Circulo quadratum circumscribere.* Tab. VI. Fig. 109.

RESOLUTIO.

1. Ducantur diametri AB & DE se mutuo in centro C ad angulos rectos secantes (§. 210).

2. Ex A, E, B, D intervallo radii fiant intersectiones in F, G, H, I.
3. Ducantur rectæ FG, GH, IH & IF. Erit FGHI quadratum circulo circumscriptum.

DEMONSTRATIO.

Anguli ad A, E, B, D sunt recti (§. 338) adeoque FG, GH, HI & IF circulum tangunt (§. 304). Sunt vero anguli G, F, I, H recti (§. 338) & FG = GH = HI = FI = 2 AC *per constr.* Ergo FGIH est quadratum (§. 98) idque circulo circumscriptum (§. 117). *Q. e. d.*

PROBLEMA 42.

352. *Super data recta ED polygonum regulare quodcunque describere.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 107. 1. Quæratur angulus polygoni (§. 344. 349).
2. Fiat in E ipsi æqualis (§. 155) & EA = ED.
3. Per puncta A, E, D describatur circulus (§. 294).
4. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri potest.

Ita describetur figura quæsita (§. 342. 348).

Aliter.

1. In E & D fiant anguli dimidio angulo polygoni sigillatim æquales (§. 155), quorum crura EF & DF se mutuo secabunt in F (§. 262).
2. Ex F tanquam centro radio EF describatur circulus, qui erit circulus polygono circumscriptus (§. 347).
3. Reliqua absolvantur ut ante.

PROBLEMA 43.

353. *Circulo dato polygonum regulare quodcunque inscribere.*

RESOLUTIO.

1. Dividantur 360 per numerum laterum, ut innotescat quantitas anguli EFD (§. 59). Tab. VI. Fig. 107.
2. Construatur is ad centrum (§. 155).
3. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri potest.

Ita figura regularis erit circulo inscripta (§. 342. 117). *Q. e. f. & d.*

SCHOLION.

354. *Resolutio problematis præsentis & præcedentis mechanica quidem est, cum ad constructionem instrumento transportatorio utamur* (§. 155): *non tamen ideo contemnenda, tum quia universalis & facilis, tum quia constructionis rite peractæ indicium præbet. Pentagoni, Decagoni & Quindecagoni constructionem tradunt* Euclides (l) & Ptolemæus (m): *de qua in Analysi. Equidem & heptagoni, enneagoni & hendecagoni constructiones Geometricæ passim apud Autores, practicos inprimis, occurrunt; sed a rigare*

(l) Elem. 4. prop. 11. 16 & Elem. 13. prop. 10.
(m) Almag. lib. 1. c. 9. f. m. 8. conf. Joannes Regiomontanus in epitome hujus Almag. lib. 1. prop. 8.

a rigore demonstrationum abhorrent. Joh. Carolus Renaldinus (n) *omnium polygonorum describendorum regulam catholicam praescribit, passim Geometriis practicis insertam: sed quantum fallat,* Cl. Wagnerus, Mathemat. in Academia Helmstad. Professor, *ostendit* (o) *& nos inferius in Analysi ostendemus.*

PROBLEMA 44.

355. *Polygonum regulare quodcunque circulo circumscribere.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 107.

1. Inscribatur figura regularis similis circulo dato, v. gr. pentagonum ABCDE, si pentagonum *a b c d e* circumscribendum (§. 353).
2. Chorda AB bifariam secetur in H per rectam F*h* ad eandem in H normalem (§. 210), quae arcum cognominem in *h* secat.
3. Per A & B producantur radii FA & FB.
4. Per h ducatur ipsi AB parallela radiis continuatis in *a* & *b* occurrens: erit ab latus unum polygoni circumscripti.
5. Producantur radii FE, FD, FC, donec fiat F*e* = F*d* = F*c* = F*a* & puncta *a*, *e*, *d*, *c*, *b* connectantur rectis *ae*, *ed*, *dc*, *cb*: erit *a b c d e* polygonum circulo circumscriptum. *Q. e. f.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam *ab* parallela ipsi AB *per construct.* erit angulus F*ha* = FHA (§. 233). Sed ob FH ad AB perpendicularem *per construct.* FHA rectus est (§. 78). Ergo etiam F*ha* rectus (§. 145), consequenter *ab* circulum in *h* tangit (§. 78. 304). Est vero etiam angulus F*ab* = FAB (§. 233), adeoque dimidius angulus polygoni (§. 347). Porro quoniam AB = AE *per construct.* & FA = FE = FB (§. 40); erit angulus *b* F*a* = *a* F*e* (§. 204). Quare cum etiam sit F*a* = F*e* *per construct.* & ob F*ab* = F*ba* *per demonstrata*, rectos ad *h* & latus F*h* utrique triangulo F*ah* & F*hb* commune F*b* = F*a* (§. 252); erit *ae* = *ab* & F*ae* = F*ab* (§. 179), consequenter *a* angulus polygoni, e. gr. in nostro casu pentagoni. Eodem modo ostenditur, angulos quoque *e*, *d*, *c*, *b* esse angulos polygoni circumscribendi & *ed* = *dc* = *cb* = *ab*. Quod vero etiam *ae* circulum in G tangat, ita demonstratur. Demittatur ex F perpendicularis ad *ae* (§. 216); erit angulus ad *g* rectus (§. 78). Quoniam porro F*ah* = F*ag* *per demonstrata*, & F*a* = F*a*; erit F*h* = F*g* (§. 252). Quare cum F*h* sit radius circuli *per construct.* erit etiam F*g* radius circuli (§. 40), at-

 que

(n) lib. 2 de Resolut. & composit. Mathem. f. 367. (o) in peculiari dissertatione Helmstadii 1700 habita.

que adeo *ae* circulum in *g* tangit (§. 304). Idem eodem modo ostenditur *de* rectis *ed*, *dc*, *bc*: Polygonum itaque *abcde* circulo est circumscriptum (§.117). *Q.e.d.*

Tab. VI. Fig. 110.

THEOREMA 78.

356. *Latus hexagoni AB æquatur radio circuli circumscripti AC.*

DEMONSTRATIO.

Angulus C=60° (§.57). Ergo A+B=120° (§.245), consequenter ob AC=BC (§. 40) A = B = 60° (§. 184). Quare △ ACB æquilaterum (§. 254), consequenter AB=AC (§.88). *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

357. Hexagonum regulare circulo inscribitur, si radius ad peripheriam sexies applicetur.

COROLLARIUM. 2.

358. Si super linea data AB hexagonum describendum; triangulum æquilaterum ACB construitur (§. 198): est enim vertex C centrum circuli hexagono quæsito circumscribendi (§. 356).

Tab. VI. Fig. 111.

PROBLEMA 45.

359. *Datis omnibus lateribus figuræ cujuscunque & tot diagonalibus, quot sunt latera, demtis tribus, figuram construere.*

RESOLUTIO.

Cum figura quælibet ABCDE per diagonales AC & AD in tot triangula BAC, CAD, DAE resolvatur, quot sunt latera, demtis tribus; non alia re opus est, quam ut unum triangulum super altero excitetur (§. 205).

Tab. VI. Fig. 112.

PROBLEMA 46.

360. *Datis omnibus lateribus figuræ & tot angulis, quot sunt latera, demtis tribus, figuram construere.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AB uni datorum laterum æqualis.
2. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 155) & latera AE & BC per data debite determinentur.
3. Fiat porro in C angulus conveniens (§. 155) & determinetur latus DC &c.
4. Tandem ex E & D fiat intersectio in F intervallo laterum EF & FD.

Ductis enim DF & EF, figura terminabitur eritque æqualis quæsitæ (§. 161. 177).

Eodem modo construi possunt figuræ regulares ex latere & angulo dato (§. 106).

COROLLARIUM.

361. Si omnes anguli præter unum F dentur, duo latera DF & FE ut dentur opus non est.

SCHOLION.

362. *Tyrones ut se exerceant in figuris irregularibus describendis, lineas pro arbitrio in pedibus ac digitis, quantitates angulorum in gradibus assumere debent.*

Quod-

Quodsi contingat, figuram non terminari, id indicio erit, casum esse impossibilem, adeoque vel in angulorum, vel linearum quantitate quaedam erunt immutanda.

PROBLEMA 47.

Tab. VI. Fig. 111. 363. *Areae cujusdam campestris rectilineae abcde libere permeabilis ignographiam perficere, hoc est, figuram areae campestri similem describere.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur longitudo singulorum laterum *ab, bc, cd, de, ea*, itemque diagonalium *ac* & *ad* (§. 126).
2. Construatur figura ABCDEA (§. 359) juxta scalam geometricam minorem (§. 279).

Dico figuram ABCDE esse figurae campi *abcde* similem.

DEMONSTRATIO.

Est enim AB : BC = *ab* : *bc*, BC : CD = *bc* : *cd*, CD : DE = *cd* : *de* &c. Etenim e. gr. *ab* 6 & *bc* 7 pedum in campo existentibus, etiam AB = 6 & BC = 7 in charta *per constr.* Quare cum porro sit AC : AB = *ac* : *ab*, AC : AD = *ac* : *ad*, AD : AE = *ad* : *ae* &c. *per constr.* erit $o = o$, $x = x$, $y = y$, $n = n$, $m = m$, $r = r$, $u = u$, $s = s$, $t = t$ (§. 207), consequenter $x + m + r = x + m + r$, $y + n = y + n$, $u + s = u + s$ (§. 88 *Arithm.*). Quamobrem figura ABCDE est figurae campi *abcde* similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Posita mensula ita in uno figurae angulo ut punctum *a* vertici ejus immineat, per dioptras regulae affixas collineatio fiat in baculos in singulis angulis B, C, D, E defixos ducanturque lineae indefinitae *ab, ac, ad, ae*. Tab. VI. Fig. 113.
2. Investigetur longitudo rectarum *a*B, *a*C, *a*D, *a*E (§. 126) &
3. Exinde juxta scalam modicam (§. 279) determinentur *ab, ac, ad, ae*.
4. Ducantur *bc, cd, de*.

Dico *abcde* esse similem figurae ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in △△ *abc* & *a*BC angulus *a* communis & *ab* : *ac* = *a*B : *a*C *per constr.* erit angulus *abc* = *a*BC & *acb* = *a*CB, nec non *ab* : *bc* = AB : BC & *ac* : *bc* = AC : BC (§. 237). Similiter quoniam in △△ *acd* & *a*CD angulus *a* communis & *ac* : *ad* = *a*C : *a*D, atque in △△ *dae* & D*a*E angulus *a* itidem communis & *ad* : *ae* = *a*D : *a*E *per construct.* erit angulus *acd* = *a*CD & *adc* = *a*DC, nec non *ac* : *cd* = *a*C : *c*D & *ad* : *dc* = *a*D : *c*D, itemque angulus *ade* = *a*DE &

aed=*a*ED, nec non *ad*: *de*=*a*D:DE & *ae*:*ed*=*a*E:ED (§. 237). Quoniam itaque *a*=*a*, *b*=B, *acb*+*acd*=*a*CB+*a*CD, h.e. *c*=C, *adc*+*ade*=*a*DC+*a*DE, h.e. *d*=D & denique *e*=E *per demonstrata*, figuræ *abcde* & *a*BCDE inter se æquiangulæ sunt (§.109). Porro cum sit *ac*:*bc*=*a*C:BC & *ac*:*cd*=*a*C:CD *per demonstr.* erit etiam *bc*:*cd*=BC:CD (§.196 *Arithm.*) & cum sit *ad*:*dc*=*a*D:DC & *ad*:*de*=*a*D:DE *per demonstr.* erit denuo *dc*:*de*=DC:DE. Quamobrem cum quoque sit *ab*:*bc*=*a*B:BC & *ae*:*ed*=*a*E:ED *per demonstrata*; latera æquales angulos comprehendentia proportionalia sunt. Sunt itaque figuræ *abcde* & *a*BCDE similes (§.175). *Q.e.d.*

Aliter.

Tab. VI. Fig. 114.

1. Mensula intra figuram posita eligatur punctum f, ex quo per dioptras regulæ affixas ut ante collineatio fiat in baculos in A, B, C, D & E defixos ducanturque rectæ indefinitæ *fa*, *fb*, *fc*, &c.
2. Investigetur longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E (§.126).
3. Inde determinetur longitudo rectarum *fa*, *fb*, *fc* &c. juxta scalam modicam (§.279).
4. Tandem ducantur *ab*, *bc*, *bd*, &c.

Dico *abcdeg* esse figuræ ABCDEG similem.

DEMONSTRATIO.

Angulus *f* utrique △ *fab* & *f*AB communis, estque *fa*:*fb*=*f*A:*f*B *per constr.* Ergo anguli ad *a* & A, item ad *b* & B æquales sunt atque *fa*:*ab*=fA:AB (§. 237). Eodem modo ostenditur esse in △△ *fga* & fGA angulos ad *a* & A æquales, atque *fa*:*ag*=FA:AG, consequenter *ab*:*ag*=AB:AG (§. 196 *Arithm.*) & angulus *bag*=BAG (§.86 *Arithm.*). Quare cum eadem ratione demonstretur, esse g=G, *e*=E, *d*=D, *c*=C, *b*=B & *ag*:*ge*=AG:GE, *ge*:*ed*=GE:ED, *ed*:*dc*=ED:DC, *dc*:*cb*=DC:CB & *cb*:*ba*=CB:BA, figura *abcdeg* est majori ABCDEG similis (§.175). *Q.e.d.*

Aliter.

Tab. VI. Fig. 115.

1. Collocato instrumento goniometrico in *a* investigetur quantitas angulorum *x*, *m*, *r* (§.152) & longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad* & *ae* (§.126).
2. Construantur juxta scalam modicam △△ ABC, ACD & ADE (§.180).

Dico ABCDE esse similem figuræ *abcde*.

DE-

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum ſecunda problematis præſentis.

Aliter.

1. Collocato inſtrumento goniometrico in f, inveſtigetur quantitas angulorum A*f*B, B*f*C, C*f*D, D*f*E, E*f*G, G*f*A (§. 152) & longitudo rectarum fA, fB, fC, fD, fE, fG (§. 126).
2. Conſtruantur ut ante juxta ſcalam modicam ΔΔ *bfa*, *agf*, *fge*, *efd*, *dfc* & *cfb* (§. 180).

Dico *abcdeg* eſſe ſimilem figuræ ABCDEG.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia problematis præſentis.

Aliter.

Tab. VI. Fig. III. 1. Pyxis cum acu magnetica, cujus margo in 360 gradus diviſa & quæ in cardine meridiei ac ſeptentrionis dioptris inſtructa, ita collocetur in *a*, ut ejus centrum ipſi *a* immineat & per dioptras collineanti baculus in *b* defixus occurrat, noteturque angulus declinationis acus a linea meridiana pyxidis ipſi *a b* imminente verſus ortum vel occaſum.
2. Pyxidis dioptræ convertantur ſucceſſive ad baculos in *c*, *d* & *e* defixos, notenturque ut ante in ſingulis caſibus anguli declinationis.
3. Inveſtigetur longitudo rectarum *a b*, *a c*, *a d*, *a e* (§. 126).
4. Ducatur in charta recta LM & aſſumto in ea puncto A applicetur centrum inſtrumenti transportatorii & fiant anguli *i*, *x*, *m*, *r* angulis declinationum, rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* æquales (§. 155) atque ex harum longitudine per ſcalam modicam determinetur longitudo ipſarum AB, AC, AD, AE, (§. 279).

Dico figuram ABCDE eſſe alteri *a b c d e* ſimilem.

DEMONSTRATIO.

In campo acus magnetica ſemper eidem lineæ reſpondet in plano horizontali imaginario mundi, quod immobile eſt, etſi diverſis in pyxide ſucceſſive immineat. Lineam iſtam deſignet in charta recta LM & punctum A centrum acus, ex quo deſcriptus eſt circulus. Quodſi jam linea meridiana pyxidis admovetur lateri AB, erit principium numerationis in *g* & acus indicabit in *f* quantitatem anguli *i*. In inſtrumento transportatorio initium numerandi fit in *f* & ſi arcus *f g* declinationi in campo obſer-

observatæ æqualis assumitur; angulus *i* idem erit, qui ante, situsque lineæ AB rite determinatur. Arcus enim *fg* perinde metitur declinationem ipsius AB a linea meridiana, quam monstrat acus, sive numerandi principium in *f*, sive in *g* fiat. Eodem modo liquet, arcus *fh*, *fk*, *fl* determinare situm rectarum AC, AD, AE respectu lineæ LM, consequenter anguli *x*, *m*, *r* in figura ABCDE erunt æquales totidem cognominibus in altera *abcde*. His suppositis reliqua demonstrantur ut supra in demonstratione secunda.

Aliter,

Tab. XI. Fig. 174. Quodsi pyxis cum acu magnetica dioptris non fuerit instructa, sed lignea regulæ F*g* ita affixa, ut linea meridiana ejusdem *bd* transiens per centrum pyxidis *c* sit eidem parallela:

1. Regula *fg* ad latus figuræ AB applicetur, quo facto AB erit ipsi *bd* parallela.
2. Notetur gradus, quem indicat acus magneticæ *ae* circa centrum *c* libere mobilis cuspis *a*: dico esse angulum *bca* ipsi BAL æqualem, si ML ducatur acui magneticæ *ae* in I productæ parallela.
3. Eodem modo si regula, cui pyxis affixa, applicetur diagonali AE & recta *ae* designet situm acus, *bd* autem ipsi AE parallela lineam meridianam pyxidis; erit angulus *abc* ipsi EAL æqualis. Cetera igitur peraguntur ut ante.

DEMONSTRATIO.

Id tantummodo demonstrari debet, angulum *aeb* esse ipsi BAL & in altero situ pyxidis ipsi EAL æqualem. Quoniam ex resolutione patet, *bd* esse ipsi BA parallelam, erit angulus IHA ipsi *ecd* (*§*. 233), consequenter ejus verticali *bca* æqualis (*§*. 156 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*). Similiter cum sit ML ipsi I*a* parallela, *per construct.* erunt alterni IHA & HAL æquales (§. 233), consequenter HAL = *bca* (*§*. 87 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Similiter si pyxis ad diagonalem AE applicatur, cum sit *bd* ipsi EA parallela *vi solutionis*; erit NKA = *ecd* (§. 233). Quare cum porro sit *bca* = *ecd* (§. 156); erit NKA = *bca* (§. 87 *Arithm*). Denique quia acus magnetica pyxide quomodocunque promota situm obtinet priori, quem habuerat, parallelum, estque adeo N*a* ipsi I*a* parallela; ML vero parallela

rallela ipsi Ia *per construct.* erit etiam ML ipsi Na parallela (§.232), consequenter NKA = EAL (§. 233), ac ideo EAL = bca (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

Tab. VII. Fig. 115. 1. Charta super mensula expansa ex centro o describatur circulus.

2. In eodem defigatur stylus, cui inseratur regula cum dioptris.

3. Collineetur in singulos areæ angulos A, B, C &c. notenturque in peripheria circuli puncta diametraliter opposita *a* & *a*, *b* & *b*, *c* & *c* &c.

4. Investigetur longitudo rectarum oA, oB, oC &c. (§. 126).

Tab. VII. Fig. 116. 5. Charta a mensula remota alteri mundæ coextendatur in tabula & Parallelismus ad *aa* applicatus arbitrario intervallo aperiatur, donec in charta munda ipsi parallela AA commode duci possit (§. 258.)

6. Idem Parallelismus applicetur ad *b b* & eo usque aperiatur, donec recta BB huic parallela ducta alteram AA ipsi *aa* parallelam in puncto commodo O intersecet.

7. Applicetur porro successive ad rectas *c c*, *d d*, *e e*, quæ confusionis evitandæ gratia in schemate non omnes sunt expressæ, & aperiatur usque ad punctum intersectionis O ipsis *a a* & *b b* parallelarum, ducanturque per idem dictis *c c*, *dd*, *ee* parallelæ CC &c.

8. Tandem ex puncto intersectionis O convenienter determinetur longitudo rectarum ipsis oA, oB, oC &c. respondentium juxta scalam modicam (§. 279). Ita enim ut supra ichnographiam absolvere licebit.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia probl. præs. modo demonstretur, si plures lineæ *a a*, *b b*, *c c* &c. se intersecent in o & his ducantur totidem aliæ parallelæ AA, BB, CC &c. se itidem in O intersecantes; fore $y = m$, $x = n$, $z = l$ &c. Quod facile patet. Continuetur enim BB, donec ipsi *a a* occurrat in *f*; continuentur etiam CC & *c c*, donec ipsis *b b* & AA occurrant in *g* & *k*. Erit ob parallelas *a a* & AA $m = f$ & ob parallelas *b b* & BB $y = f$ (§. 233), adeoque $m = y$ (§. 87 *Arithm.*). Similiter ob parallelas *bb* & BB $n = g$ & ob parallelas *c c* & CC $x = g$ (§. 233), adeoque $n = x$ (§. 87 *Arithm.*). Item ob parallelas Tab. VII. Fig. 116.

lelas *aa* & Aa $z=k$ & ob parallelas *cc* & CC$l=k$ (§. 233), adeoque $l=z$ (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

364. *Ideo commendatur methodus ultima, quod exigua eaque unica charta ingenti tractui dimetiendo sufficiat. Si enim campus in plures resolutus fuerit partes, littera initialis in singulis nota quadam numerica notanda & ubi unum alphabetum fuerit absolutum, aliud literis aliis usurpandum.*

SCHOLION 2.

365. *Etiam sine parallelismo ichnographiam facillime conficere datur, si puncta* a *&* a, *item* b, c, d &c. *subtili acu perforentur & per foramina pulvis carbonum linteo inclusus trajiciatur. Puncta enim* a *&* a *dabunt rectam, qua bifariam divisa determinatur centrum O: reliqua puncta* b, c, d &c. *situm angulorum figuræ respectu hujus centri determinant.*

SCHOLION 3.

366. *Acus magnetica ex optima chalybe cudenda, nec foraminibus (quod ornatus gratia interdum fieri solet ab ignaris) pertundenda, quoniam vis magnetica per lineam rectam diffunditur. Ejus longitudo 6 digitos ne superet, ne sphæram magnetis excedat; a duabus ne deficiat. Præstat major minore, ut angulus, quo in usu a linea meridiana pyxidis declinat, exactius innotescat. Communiter utuntur acu duorum vel ad summum trium digitorum. Uno magnetis polo cum aliqua mora eam affricari sufficit: affricanda autem est pars acus, quæ septentrionem respicere debet, polo australi, nec ductu contrario destruendum, quod anteriore communicatum fuerat. In hemisphærio septentrionali, quod nos inhabitamus, pars acus borealis post contactum magnetis ponderosior evadit & inclinatur: quare levior fieri debet australi. Pyxis ex ligno, ebore vel orichalco; stylus, cui capitellum acus ex ære, cupro vel argento intus in conum ex cavatum imponitur, ex orichalco vel argento paratur. Ut acus tanto exactius libretur, quidam styli apicem chalybeum faciunt.*

PROBLEMA 48.

367. *Ichnographiam areæ ABCDE ex duabus stationibus A & B perficere.* Tab. VII. Fig. 117.

RESOLUTIO.

1. Posita mensula in A collineatio fiat in singulos areæ angulos B, C, D & E ducanturque rectæ versus eos ex *a*.
2. Quæratur distantia stationum AB (§. 126) & in mensulam ex scala Geometrica (§. 279) transferatur in *ab*.
3. Mensula ex A deferatur in B, ita ut punctum cognomine *b* in ea designatum ipsi B respondeat & regula ad lineam *ba* applicata per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.
4. Ex puncto *b* in singulos rursus figuræ angulos collineatio fiat, & ver-

& versus eos rectæ ducantur, quæ priores in *e*, *d*, *c* intersecant.

5. Denique jungantur puncta *a* & *e*, *e* & *d*, *d* & *c*, rectis *ae*, *ed*, *dc*.

Dico, ichnographiam esse absolutam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam 1. ABC = *abc* & CAB = *cab per constr.* erit AB : BC = *ab* : *bc* & AB : AC = *ab* : *ac* (§. 267). Similiter 2. quia EAB = *eab* & EBA = *eba per constr.* erit AEB = *aeb*, itemque EA : AB = *ea* : *ab* & EB : AB = *eb* : *ab* (§. *cit.*). Porro 3. cum sit DAB = *dab* & DBA = *dba*; erit etiam DA : AB = *da* : *ab* & DB : AB = *db* : *ab* (§. *cit.*). 4. DBC = *dbc per constr.* &, quoniam DB : AB = *db* : *ab per num. 3.* atque AB : BC = *ab* : *bc per num. 1.* DB : BC = *db* : *bc* (§. 194 *Arithm.*). Ergo CDB = *cdb* atque BCD = *bcd* & BC : CD = *bc* : *cd*, nec non BD : CD *bd* : *cd* (§. 183). 5. DB : BC = *db* : *bc per demonstrata n. 4.* & AB : BC = *ab* : *bc per num. 1.* Ergo DB : AB = *db* : *ab* (§. 195 *Arithm.*). Est vero etiam EB : AB = *eb* : *ab per num. 2.* Ergo DB : EB = *db* : *eb* (§. *cit.*). Quare cum etiam sit DBE = *dbe per construct.* erit BDE = *bde* & DEB = *deb* nec non DB : DE = *db* : *de* & DE : EB = *de* : *eb* (§. 183). 6. BD : CD = *bd* : *cd per num. 4.* & DB : DE = *db* : *de per num 5.* Ergo CD : DE = *cd* : *de* (§. 196 *Arithm.*). 7. EB : AB = *eb* : *ab per num. 1.* & DE : EB = *de* : *eb per num. 5.* Ergo DE : AB = *de* : *ab* (§. 197 *Arithm.*). Quare cum porro sit EA : AB = *ea* : *ab per num. 1.* erit DE : EA = *de* : *ea* (§. 195 *Arithm.*). 8. Quia CDB = *cdb per num. 4.* & BDE = *bde per num. 5.* erit CDE = *cde* (§. 86 *Arithm.*). 9. Similiter quia AEB = *aeb per num. 1.* & DEB = *deb per num. 5.* erit DEA = *dea* (§. 86 *Arithm.*). Cum itaque sit EAB = *eab* & ABC = *abc per constr.* BCD = *bcd per num 4.* CDE = *cde per num. 8.* & DEA = *dea per num. 9*, atque præterea AB : BC = *ab* : *bc per num. 1.* BC : CD = *bc* : *cd per num. 4.* CD : DE = *cd* : *de per num. 6.* DE : EA = *de* : *ea per num. 7.* tandemque EA : AB = *ea* : *ab per num. 2.* figuræ ABCDE altera *abcde* similis est (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In A investigetur quantitas angulorum DAE, DAC & CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EBD & DBC (§ 152), quæraturque stationum distantia AB (§. 126). Tab. VII. Fig. 117.

 2. Du-

2. Ducta in charta recta *ab* per scalam modicam distantiæ stationum AB convenienter determinetur (§. 279).
3. In *a* constituantur angulis DAE, DAC, CAB æquales *dae*, *dac*, *cab*; in *b* vero ipsis ABE, EBD & DBC æquales *abe*, *ebd* & *dbc* (§. 155).
4. Tandem puncta intersectionum *b*,*c*,*d*, *e*, *a* rectis connectantur.

Dico *abcde* esse similem areæ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

Aliter.

1. Ope pyxidis magneticæ observentur ut in probl. præc. ex duabus stationibus A & B declinationes linearum AB, AC, AD, AE itemque BC, BD, BE a linea meridiana acus.
2. Quæratur distantia stationum (§. 126).
3. In charta eodem modo, quo in probl. præc. determinetur situs rectarum *ab*, *ac*, *ad* &c. puncta intersectionum *c*, *d*, *e* rectis connectantur.

Ita ichnographia erit absoluta.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente, modo una notentur, quæ in demonstratione penultima problematis præcedentis dicta sunt.

PROBLEMA 49.

368. *Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragrare licet.*

RESOLUTIO.

1. Mensula in A collocata collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulo BAE æqualis *bae* in eadem designari possit. Tab. VII. Fig. 117.
2. Longitudo utriusque rectæ AB & AE (§. 126) explorata ex scala minore transferatur in mensulam ex *a* in *b* & *e* (§. 279).
3. Mensula in B translocetur, ita ut ipsi B punctum cognomine in eadem respondeat & visus per dioptras collineantis baculum in A attingat. Quo facto,
4. Idem dirigatur per easdem in C, quo sicut ante angulo ABC æqualis *abc* & rectæ BC proportionalis *bc* in mensula designari possint.
5. Quodsi idem cum reliquis areæ angulis & lateribus fiat; erit figura in mensula delineata areæ propositæ similis.

DEMONSTRATIO.

Singuli enim anguli figuræ in mensula delineatæ sunt æquales singu-

ſingulis angulis areæ & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia ſunt *per conſtr.* Figura igitur dilineata eſt areæ ſimilis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Quæratur longitudo omnium laterum (§. 126) & quantitas tot angulorum, quot ſunt latera, demtis tribus (§. 152). His enim datis ichnographia *per probl. 46.* (§. 360), vi demonſtrationis præcedentis abſolvetur.

Aliter.

Tab. VII. Fig. 118. n. 1. 1. Notetur in ſingulis angulis figuræ A, B, C, D, E laterum AB, BC, CD, DE, AE declinatio a linea meridiana pyxidis magneticæ ut in probl. 47 (§. 363).

2. Quæratur ſimul longitudo laterum (§. 126).

n. 2. 3. In charta deſignetur linea *ab* & in eam transferatur ex ſcala modica longitudo lateris AB (§. 279).

4. Ad rectam *ab* applicetur latus pyxidis lineæ ejusdem meridianæ parallelum, ita tamen ut extremum ipſius ſeptentrionale ſeptentrionem reſpiciat & charta cum pyxide huc illucque moveatur, donec acus angulum declinationis debitum monſtret.

5. Charta immota idem latus pyxidis collocetur in *a* & circa id vertatur, donec angulum declinationis convenientem lateri AE indicet acus: ita enim rectam *ae* ducere & per ſcalam modicam ipſi AE proportionalem determinare licet.

6. Quodſi hæc operatio continuetur; ichnographia tandem abſolvetur.

DEMONSTRATIO.

Non aliud hic demonſtrandum eſt, quam angulum *bae* ope pyxidis magneticæ in charta ſic deſignatum eſſe alteri BAE in campo æqualem. Superius uſum pyxidis magneticæ nullis dioptris inſtructæ exponentes demonſtravimus, pyxide ad latus figuræ AB in campo ita applicata ut linea meridiana ejusdem ſit huic parallela, angulum declinationis acus eſſe ipſi BAM æqualem, ſi ML ita ducatur ope pyxidis, ut ejusdem lineæ meridianæ parallela exiſtat (§. 363). Eodem modo ex ibidem demonſtratis apparet, pyxide eadem lege ad latus figuræ AE applicata eſſe angulum EAL angulo declinationis acus in hoc ſitu æqualem. His jam datis ſi latus pyxidis lineæ meridia-

næ ejusdem parallelum ad rectam *ab* in charta ductam applicetur & charta cum pyxide vertatur, donec acus in conveniente situ angulum declinationis eundem, quem in campo ad latus BA, monstret; erit perinde *ba*K eidem angulo declinationis æqualis. Similiter si eadem lege pyxis applicetur ad punctum *a*, donec acus angulum declinationi lateris AE convenientem monstret & juxta ejus latus ducatur *ae*; erit angulus *ea* I angulo declinationis æqualis. Supponimus nempe rectam KI per *a* ea lege esse ductam, ut lineæ meridianæ pyxidis in plano mundi imaginario immobili respondeat centro in *a* collocato. Est igitur 1 = I & 6 = VI *per construct.* Sed 1 + 7 + 6 = 180° & I + VII + VI = 180° (§.147), consequenter 1 + 7 + 6 = I + VII + VI (§. 87 *Arithm.*). Quare 7 = VII (§. 91 *Arithm.*). *Q.e.d.*

Vel:

Tab. VII. Fig. 118. n. 2.

1. In charta ducantur lineæ quotcunque parallelæ.
2. Instrumentum transportatorium parallelismo instructum ad extimam parallelarum ita applicetur, ut centrum sit in *a*, radius vero ipsi *a*K respondeat, noteturque punctum *z*, indicans in peripheria instrumenti gradum declinationis acus a linea meridiana pyxidis in campo ad punctum A.
3. Ab *a* per *z* ducatur recta & ex *a* in *b* transferatur ex scala modica longitudo rectæ AB in campo mensuratæ.
4. Regula parallelismi solitaria unam parallelarum stringente, altera cui cohæret instrumentum transportatorium promoveatur, donec hujus centrum ipsum *b* attingat & ad gradum declinationis in B observatæ designetur punctum *y*: quo facto, ut ante, rectam *bc* ducere licet.
5. Hac operatione continuata, integra areæ ichnographia tandem absolvetur.

DEMONSTRATIO.

1 = I, 2 = II, 3 = III, 4 = IV & 5 = V *per constr.* & quoniam recta per *b* ducta (quæ diametrum instrumenti transportatorii refert) ipsi *a*K parallela, *per construct.* acus vero magnetica in B est parallela situi in A; erit 1 = 8 & I = VIII. (§.233), consequenter 8 = VIII (§.87 *Arithm.*). Simili modo ostenditur esse 6 = VI. Quare cum sit 1 + 7 + 6 = I + VII + VI (§. 147 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*); erit 7 = VII.

VII (§. 91 *Arithm.*). Porro 2 = II *per constr.* & 8 = VIII, *per demonstr.* Ergo 8 + 2 = VIII + II (§. 88 *Arithm.*). Similiter 12 = 2 & XII = II (§. 233) & 3 = III, *per constr.* Quare cum sit 12 + 9 + 3 = XII + IX + III (§. 147); erit 9 = IX (§. 91 *Arithm.*). Porro 4 = IV *per constr.* & hinc, cum sit 10 = 3 & X = III (§. 233), adeoque ob 3 = III *per demonstr.* 10 = X (§. 87 *Arithm.*), 4 + 10 = IV + X (§. 88 *Arithm.*). Denique 5 = V *per constr.* & 4 + 11 = IV + XI (§. 233 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*) adeoque ob 4 = IV *per constr.* 11 = XI. Quare 5 + 11 = V + XI (§. 88 *Arithm.*). Singuli igitur anguli figuræ *abcde* sunt æquales singulis angulis areæ ABCDE. Quare cum etiam latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sint *per constr.* figura *a b c d e* areæ ABCDE similis (§. 175). *Q. e. d.*

PROBLEMA 50.

369. *Figuræ in charta delineatæ similem in campo designare.*

RESOLUTIO.

Quoniam hoc problema est inversum alterius, quo ichnographias arearum paramus; non modo tot ejus dantur casus, quot hujus commemoravimus, sed & ipsius resolutio ex resolutionibus problematum immediate præcedentium intelligitur. E. gr. Si semicirculo vel mensula & pertica utimur: anguli singuli figuræ aut anguli diagonalibus intercepti &c. in solo designantur *per probl.* 7 (§. 155) & latera vel diagonales &c. per mensuram majorem decenter determinantur.

CAPUT VI.

De FIGURARUM DIMENSIONE AC DIVISIONE.

PROBLEMA 51.

370. *Invenire aream quadrati.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur longitudo lateris (§. 126).

2. Hæc

2. Hæc ducatur in ſeipſam. Factum exprimit aream Quadrati.

Sit e. gr. Latus quadrati = 345

	345
	345
	1725
	1380
	1035
erit Area =	119025

DEMONSTRATIO.

Tab. VII. Fig. 119. Aream quadrati inveſtigans quærit, quot digiti quadrati, hoc eſt, quot quadratula digitum longa & lata in eodem contineantur (§.118). Evidens vero eſt, ſi latus quadrati AB concipiatur in quotcunque partes æquales & quadratum ipſum per rectas puncta diviſionum in lateribus oppoſitis connectentes in quadrata minora diviſum; tot eſſe quadratulorum ſeries, quot partes habet latus AB & in qualibet ſerie tot reperiri quadratula, quot latus BC, vel idem AB habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, ſi latus in ſeipſum ducatur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

371. Si latus quadrati fuerit 10, area erit 100. Cum igitur decempeda ſit 10 pedum, pes 10 digitorum &c. (§. 25); pertica quadrata 100 pedes quadratos; pes quadratus 100 digitos quadratos &c. continet (§. 118).

COROLLARIUM 2.

372. Si latus quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare cum pertica dividatur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c. pertica quadrata continet 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos, &c. (§. 118).

COROLLARIUM 3.

373. Datus igitur numerus in priori caſu facile in digitos, pedes & perticas quadratas reſolvitur, ſi ſcilicet a dextra ſiniſtram verſus duæ notæ digitis, duæ pedibus reſecentur: quæ enim ſiniſtram verſus reſiduæ fiunt, perticis cedunt. E. gr. 119025 digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 25 digitos.

COROLLARIUM 4.

374. Quadrata ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum (§. 159 *Arithm.*). E. gr. Quadratum lateris dupli eſt quadruplum quadrati lateris ſimpli. Et quadrata æqualia ſunt, quorum latera æqualia ſunt.

2 : 4
2 : 4
4 : 16

PROBLEMA 52.

375. *Invenire aream rectanguli ABCD.* Tab. VII. Fig. 120.

RESOLUTIO.

1. Inveſtigetur longitudo laterum AB & AC (§. 126).
2. Ducatur AB in AC. Factum erit area rectanguli.

E. gr.

E. gr. Sit AB = 345''
AC = 123

1035
690
345

erit Area = 42435

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ problematis præcedentis.

COROLLARIUM 1.

376. Rectangula sunt in ratione composita suorum laterum AB & AC (§. 159 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

377. Si ergo fuerint tres lineæ continue proportionales, quadratum mediæ rectangulo extremarum æquale est (§. 298 *Arithm.*)

COROLLARIUM 3.

378. Si quatuor fuerint lineæ rectæ proportionales; rectangulum sub extremis æquatur rectangulo sub mediis (§. 297 *Arithm.*)

COROLLARIUM 4.

Tab. VI. Fig. 102. 379. Quare si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ, quarum altera AD circulum tangit, altera AB secat; erit quadratum tangentis AD rectangulo sub secante AB & ejus portione extra circulum AC æquale (§. 334 & 377).

COROLLARIUM 5.

Tab. VI. Fig. 97. 380. Si duæ vel plures secantes GL & GM ex eodem puncto G ducantur, erunt rectangula sub totis & ejus portionibus extra circulum æqualia (§. 333 & 379).

COROLLARIUM 6.

381. Si duæ chordæ HM & LI se mutuo secent in K; erunt rectangula sub segmentis inter se æqualia (§. 332. 378). Tab. I. Fig. 14.

COROLLARIUM. 7.

382. Cum orgya, qua lignorum strues metimur, vel quadrati, vel rectanguli figuram habeat; ejus area *per probl. præc. vel præs.* inveniri potest. Per hanc itaque si factum ex longitudine in latitudinem struis dividatur; quotus indicat, quot ipsa orgyas contineat (§. 69 *Arithm.*).

THEOREMA 79.

383. *Duo parallelogramma ABDC & ECDF super eadem basi CD & inter easdem parallelas AF & CD constituta sunt inter se æqualia.* Tab. VII. Fig. 121.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & CD, itemque EF & CD sunt latera opposita parallelogrammi *per hypoth.* erit AB = CD & EF = CD (§. 335), consequenter AB = EF (§. 87 *Arithm.*) & hinc porro AE = BF (§. 88 *Arithm.*). Quoniam porro AC = BD & EC = DF (§. 335); erit △ ACE = △ BFD (§. 204), adeoque ABGC = FEGD (§. 91 *Arithm.*), consequenter ABDC = EFDC (§. 88 *Arithm.*) *Q.e.d.*

COROLLARIUM 1.

384. Quoniam AF & CD sunt parallelæ *per hypoth.* erunt perpendicula inter eas intercepta æqualia (§. 226): quæ cum sint altitudines parallelogrammorum (§. 227);

parallelogramma inter easdam parallelas constituta ejusdem altitudinis sunt. Patet adeo parallelogramma super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia esse (§. 383).

COROLLARIUM 2.

Tab. VII. Fig. 121. 385. Ergo & triangula super eadem basi, & ejusdem altitudinis æqualia sunt. Nam ▭ ACDB = ▭ ECDF (§. 384), sed △ ACD = ½ ▭ ACDB & △ FCD = ½ ▭ ECDF (§. 337). Ergo △ ACD = △ FCD (§. 94 *Arith.*)

COROLLARIUM 3.

386. Quodcunque adeo triangulum CFD est dimidium parallelogrammi ACDB super eadem vel æquali basi CD & ejusdem altitudinis, seu intra easdem parallelas. Nam △ ECF = △ ACD (§. 337). Sed △ ACD = ½ ▭ ACDB (§. 355). Ergo △ ECF = ½ ▭ ACDB (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA 53.

387. *Invenire aream rhombi & rhomboidis seu parallelogrammi obliquanguli.*

RESOLUTIO.

Tab. VII. Fig. 122. 1. In CD pro basi assumtam demittatur perpendiculum AE (§. 216), quæ erit altitudo parallelogrammi (§. 227).

2. Multiplicetur basis per altitudinem.

E. gr. Sit CD = 4° 5′ 6″
AE = 2 3 4

1 8 2 4
1 3 6 8
9 1 2

Erit Area = 10° 6 7′ 0 4″

DEMONSTRATIO.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo super eadem basi CD & ejusdem altitudinis CE (§. 384). Sed area rectanguli æquatur facto ex basi in altitudinem (§. 375 & 229). Ergo eidem æqualis est area parallelogrammi obliquanguli (§. 87 *Arithm.*) Q. e. d.

COROLLARIUM 1.

388. Parallelogramma sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 159 *Arithm.*), adeoque & triangula eorum dimidia (§. 386) in eadem existunt (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

389. Ergo si altitudines sunt æquales, basium; si bases sunt æquales, altitudinum rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM 3.

390. Parallelogramma æqualia bases & altitudines reciprocant (§. 299 *Arithm.*).

THEOREMA 80.

391. *Triangulum est æquale parallelogrammo super eadem basi sed dimidiæ altitudinis, itemque parallelogrammo super dimidia basi & ejusdem altitudinis.*

DEMONSTRATIO.

Sit AEFB parallelogrammum rectangulum, cum obliquangulo cuicunque super eadem basi Tab. VII. Fig. 123.

AB

AB & intra easdem basi parallelas AB & EF existenti æquale sit (§. 383) atque adeo eidem salva quantitate substitui possit (§. 15 *Arithm.*). Jam

I. Si triangulum ADC fuerit rectangulum, assumta AD pro basi, erit CD altitudo; sumta vero DC pro basi; erit AD altitudo (§. 228). Jam cum altitudo parallelogrammi rectanguli AE (§. 229) sit altitudini dimidiæ trianguli CG æqualis *per hypoth.* & angulus ad D sit rectus (§. 91) adeoque ob EF & AB parallelas (§. 102) is ad G similiter rectus (§. 233), ac præterea angulus ad E itidem rectus (§. 100), & hinc G = E (§. 145); sint vero etiam verticales ad H æquales (§. 156): erit △CGH = △EHA (§. 252), consequenter EGDA = △ ACD (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

II. Si triangulum ACB fuerit obliquangulum, per perpendiculum DC in duo rectangula ADC & CDB resolvetur (§. 78. 91). Ergo si fiat FB = DG dimidiæ altitudini; erit DGFB = △ DCB & AEGD = △ ACD *per cas. 1.* Ergo AEFB = △ ACB (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Tab. VIII. Fig. 124. Si DK = KB = $\frac{1}{2}$ DB & GD = AG = $\frac{1}{2}$ AD; erit GK = $\frac{1}{2}$ AB, adeoque dimidia basis. Jam CFKD = △ DCB & GECD = △ ACD, *per cas. 1.* Quare EGKF = △ ACB (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 54.

392. *Invenire aream Trianguli.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Multiplicetur basis AB per altitudinem CD: erit productum area rectanguli ejusdem baseos & altitudinis (§. 387). Tab. VIII. Fig. 125.
2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area trianguli ABC (§. 386).

Aliter.

Basis dimidia $\frac{1}{2}$ AB multiplicetur per altitudinem CD; vel basis AB per altitudinem dimidiam $\frac{1}{2}$ CD. Factum erit area trianguli (§. 391. 387).

E. gr. AB = 3°4′2″ AB = 3°4′2″
CD = 2 3 4 $\frac{1}{2}$CD = 1 1 7

1368	2394
1026	342
684	342
80028	△ 40014

2) ———

△ ACB 40014

$\frac{1}{2}$ AB = 1°7′1″
CD = 2 3 4

684
513
342

△40014

COROLLARIUM 1.

393. Triangula æqualia bases & altitudines dimidias (§. 299 *Arithm.*), consequenter etiam bases & altitudines integras reciprocant (§. 178 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

394. Si area trianguli per basin dimidiam dividitur, quotus est altitudo (§. 210 *Arithm.*).

PROBLEMA 55.

395. *Invenire latus quadrati parallelogrammo, vel triangulo dato æqualis.*

RESOLUTIO.

Quæratur inter basin & altitudinem parallelogrammi, vel inter dimidiam basin & altitudinem, aut integram basin & dimidiam altitudinem trianguli media proportionalis (§. 327) aut in numeris (§. 301 *Arithm.*). Ita prodit latus quadrati quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Factum enim ex basi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 375. 387) & factum ex dimidia basi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in basin aream trianguli (§. 392). Cum adeo quadratum lineæ vel numeri reperti sit in utroque casu facto isti æquale (§. 298 *Arithm.*); erit quadratum istud in priori casu parallelogrammo, in posteriori triangulo æquale. *Q. e. d.*

THEOREMA 81.

396. *In parallelogrammis & triangulis similibus altitudines sunt lateribus homologis proportionales & bases ab iis lateribus proportionaliter secantur.* Tab. VII. Fig. 122.

DEMONSTRATIO.

Cum altitudines AE & *ae* sint ad bases CD & *cd* perpendiculares (§. 227); erunt E & *e* anguli recti (§. 78) adeoque æquales (§. 145). Et quia parallelogrammum ABDC ipsi *abdc*; triangulum CAD ipsi *cad* simile, *per hypoth.* erit C = *c* (§. 175). Quare AC : AE = *ac* : *ae* (§. 267). Est vero etiam AC : CD = *ac* : *cd* (§. 175). Ergo AE : CD = *ae* : *cd* (§. 196 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam E = *e* & C = *c*, *per demonstr.* erit AC : CE = *ac* : *ce* (§. 267). Est vero etiam AC : CD = *ac* : *cd* (§. 175). Ergo CE : CD = *ce* : *cd* (§. 196 *Arithm.*), adeoque ED : CE = *ed* : *ce* (§. 193 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

397. *Patet quoque a priori. Quoniam*

enim ABDC ∽ abdc & △ ACD ∽ △ acd per hypoth. *perpendicula* AE & ae *pariterque segmenta basium* CE & ce, *itidemque* ED & ed *eodem modo determinantur* (§. 119. 216), *adeoque similia sunt* (§. 120). *Cum adeo ea eadem sint, per quæ a se invicem discerni debebant* (§. 24 Arithm.), *lineæ autem rectæ utpote similes* (§. 17) *non aliter nisi ratione discerni possint* (§. 132 Arithm.); *tam perpendicula, quam segmenta basium ad latera homologa figurarum eandem rationem habere debent* (§. 149 Arithm.). *Eodem modo generaliter patet, rectas quascunque in figuris similibus eodem modo determinatas tum inter se, tum ad latera homologa eandem rationem habere.*

COROLLARIUM 1.

398. Quoniam parallelogramma & triangula sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 388), similia vero habent bases altitudinibus proportionales (§. 396); igitur parallelogramma & triangula similia habent rationem duplicatam homologorum laterum (§. 159 *Arithm.*). Et eodem modo patet, quod etiam sint in ratione duplicata altitudinum ac segmentorum baseos; immo linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 397).

COROLLARIUM 2.

399. Sunt ergo ut quadrata laterum, altitudinum, & segmentorum basium homologorum, nec non linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 374).

PROBLEMA 55.

400. *Invenire aream polygoni irregularis ac trapezii.* Tab. VIII. Fig. 126.

RESOLUTIO.

1. Resolvatur per diagonales AD & AC in triangula. n. 1.
2. Inveniantur areæ singulorum triangulorum (§. 392) &
3. Addantur. Erit summa area quæsita (§. 86 *Arithm.*).

E.gr. ½AD = 43′ ½AD = 43′ ½AC = 42′
EF = 35 GC = 45 BH = 30

215	215	△ABC 1260
129	172	
△AED 1505	△DAC 1935	
	△AED 1505	
	△ABC 1260	

Area polygoni irreg. 47°00′

Quodsi ½ AD multiplicetur per summam altitudinum EF + GC, vel integra AD per ½ (EF + GC); prodibit area trapezii AEDC.

E. gr. EF = 35 ½AD = 43
GC = 45 EF + GC = 80

EF + GC = 80 AEDC = 3440

½(EF + GC) = 40
AD = 86

AEDC = 3440

Similiter si in trapezio fuerit AB ipsi CD parallela, erunt triangulorum altitudines BF & GC æquales (§. 226. Tab. VIII. Fig. 127.

(§. 226. 227), consequenter trapezii area prodit, ducta semisumma basium parallelarum AB & CD in altitudinem ejus BF (§. 392).

E. gr. Sit AB 246'', CD = 378'', BF = 195''

Tab. VIII. Fig. 127. erit AB + CD = 624
BF = 195

3120
5616
624

Area Trapezii 121680

THEOREMA 82.

Tab. VI. Fig. 107. 401. *Figura regularis ABCDE ex centro circuli circumscripti F in triangula aequalia atque similia resolvitur & area ejus aequatur triangulo, cujus basis peripheria totius polygoni AB + BC + CD &c. altitudo perpendiculum FG ex centro F in latus unum AB demissum. Idem valet de area circumscripti abcde, nisi quod altitudo sit radius FG.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB = BC = CD = DE = AE (§. 106) & AF = FB = FC = FD = FE (§. 40); triangula AFB, BFC, CFD, EFD, AFE aequalia & similia sunt (§. 204). *Quod erat unum.*

Tab. VIII. Fig. 128. Constituantur triangula AFB, BFC, CFD &c. in quae resolutum est polygonum ABCDE super eadem recta AA (§. 199). Erigatur in A perpendicularis A*f* (§. 249) ipsi altitudini triangulorum aequalis. Erit A*f*B = AFB, B*f*C = BFC, C*f*D = CFD &c. (§. 385); consequenter A*f*A = AFB + BFC + CFD &c. (§. 88 *Arithm.*) aequalis est areae polygoni regularis (§. 86. 87 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Cum recta F*g* ex centro F ad contactum *g* ducta sit radius & ad latus *ae* perpendicularis (§. 308); erit ea altitudo trianguli *a*F*e* (§. 227). Reliqua patent ut ante. *Quod erat tertium.* Tab. VI. Fig. 107.

PROBLEMA 56.

402. *Invenire aream polygoni regularis.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Latus polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum, e. gr. latus hexagoni per 3. Tab. VI. Fig. 107.

2. Factum porro ducatur in perpendiculum GF ex centro circuli circumscripti in latus AB demissum.

Ita

Ita prodit area quæſita (§.392. 401).

E. gr. AB = $5^{\circ}4'$	
dimidius Numer. later.	$2\frac{1}{2}$
	27
	108
Semiperimeter	135
FG	29
	1215
	270
Area Pentagoni	$39^{\circ}15'$

THEOREMA 83.

Tab. VI. Fig. III. 403. *Quadrilatera & Polygona ſimilia ABCDE & abcde per diagonales AC, AD & ac, ad in ſimilia triangula ABC & abc, ACD & acd, ADE & ade dividuntur, & inter ſe, & totis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ABCDE ∽ *abcde per hypoth.* erit *o* = *o* & AB : BC = *ab* : *bc* (§.175). Ergo △*bac* ∽ △BAC, *y* = *y* atque *bc* : *ca* = BC : CA (§.183), Eſt vero etiam *bc* : *cd* = BC : CD & *n* + *y* = *n* + *y* (§.175). Ergo *ca* : *cd* = CA : CD (§. 156 *Arithm.*) & *n* = *n* (§.91 *Arithm.*), conſequenter △ *bad* ∽ △ BAD, *cd* : *da* = CD : DA & *u* = *u* (§.183). Eſt vero etiam *u* + *s* = *u* + *s* & *cd* : *de* = CD : DE (§.175). Ergo *s* = *s* (§.91 *Arithm.*) & *da* : *de* = DA : DE (§ 196 *Arithm.*), conſequenter △ *dea* ∽ △ DEA (§. 183). *Quod erat primum.*

Quoniam △ ABC ∽ △ *abc*, △ DAC ∽ △ *dac* & △ DAE ∽ △ *dae per demonſtrata*; erit △ ABC : △ $abc = CA^2 : ca^2$, △ DAC : △ $dac = CA^2 : ca^2 = DA^2 : da^2$ & △ DAE : △ $dae = DA^2 : da^2$ (§.398), conſequenter △ ABC : △ *abc* = △ DCA : △ *dca* & △ DCA : △ *dca* = △ DAE : △ *dae* (§. 167 *Arithm.*), adeoque etiam △ DEA : △ *dea* = △ ABC : △ *abc* (§. *cit.*). Sunt igitur △△ ABC, ACD, ADE & *abc*, *acd*, *ade* inter ſe proportionalia. *Quod erat ſecundum.*

Quoniam denique △ ABC : △ *abc* = △ DCA : △ *dca* = △ DEA : △ *dea per ſecundum hujus*; erit △ ABC + △ DCA + △ DEA : △ *abc* + △ *dca* + △ *dea* = △ ABC : △ *abc* (§. 192 *Arithm.*). Sed △ ABC + △ DCA + △ DEA = polygono ABCDE & △ *abc* + △ *dca* + △ *dea* = *abcde* (§. 86 *Arithm.*). Ergo ABCDE : *abcde* = △ ABC : △ *abc* = △ DEA : △ *dca* &c. (§.168 *Arithm.*), conſequenter ABCDE : △ ABC = *abcde* : △ *abc*, & ABCDE : △ DCA = *abcde* : △ *dca* &c. (§. 173 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

404. Cum polygona regularia ſint æquilatera & æquiangula (§. 106), tum etiam ſibi mutuo æquiangula (§. 344); polygona regularia ejusdem ordinis, veluti omnia pentagona, omnia hexagona &c.

na &c. regularia inter se similia sunt (§. 175). Polygona igitur regularia ejusdem ordinis per diagonales in triangula similia dividuntur & inter se, & totis proportionalia.

SCHOLION.

405. *Poterat theorema præsens ex notione determinationis facilius demonstrari. Nimirum cum figuræ* ABCDE *&* abcde *sint similes* per hypoth. *adeoque anguli* A *&* a *æquales* (§. 175), *atque præterea diagonales* AC, AD *&* ac, ad *ex angulis hisce æqualibus* A *&* a *ducantur*; △△ ABC *&* abc, CAD *&* cad, DAE *&* dae *eodem modo determinantur* (§. 119), *consequenter & inter se similia sunt & similes partes figurarum existunt* (§. 120), *eandem adeo ad figuras tanquam tota rationem* (§. 170 Arithm.), *immo eandem inter se rationem quam polygona aut quadrilatera habentes* (§. 171 Arithm.).

THEOREMA 84.

Tab. VI. Fig. 111. 406. *Figuræ tam regulares, quam similes irregulares habent rationem duplicatam homologorum laterum.*

DEMONSTRATIO.

Sint figuræ ABCDE & *abcde* sive regulares, sive irregulares similes, eæque sive quadrilateræ, sive polygonæ quæcunque ejusdem ordinis; erit ABCDE : *abcde* = △ ABC : △ *abc* = △ ACD : △ *acd* = △ ADE : △ *ade* (§. 403. 404). Sed △ ABC : △ *abc* = $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$, △ ADC : △ *adc* = $CD^2 : cd^2$ & △ ADE : *ade* = $DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 398). Ergo ABCDE : *abcde* = $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

407. *Eodem modo ostenditur, figuras rectilineas similes esse in ratione duplicata diagonalium ex angulis æqualibus* A *&* a *ductarum, vel linearum aliarum quarumcunque eodem modo intra eas determinatarum* (§. 405).

THEOREMA 85.

408. *Circuli & figuræ similes ipsis inscriptæ vel circumscriptæ sunt inter se ut quadrata diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus describi duos circulos & iis circumscribi quadrata, omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. 119 & 357). Sunt ergo figuræ utræque inter se similes (§. 128). Cum adeo utrobique eadem sint, per quæ distingui debent (§. 24 *Arithm.*); quadrata circulis circumscripta ad suos circulos eandem rationem habere debent (§. 132 *Arithm.*). Quamobrem circuli inter se sunt ut quadrata diametrorum (§. 173 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, figuras

ras similes circulis inscriptas esse ut circulos, quibus inscribuntur. Sed circuli sunt ut quadrata diametrorum, *per demonstrata*. Ergo figuræ ipsis inscriptæ & circumscriptæ similes sunt ut quadrata diametrorum (§. 167 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

Tab. VI. Fig. 107. Resolvantur polygona circulis inscripta ABCDE & *abcde* ex centris F & f in △△ABF, BFC, CFD, & *afb*, *bfc*, *cfd*, &c. erit angulus FAB = *fab* & FBA = *fba* &c. (§. 344. 347), consequenter △ AFB ∽ △ *afb* (§. 267). Eodem modo patet, esse △ BFC ∽ △ *bfc*, △ CFD ∽ △ *cfd* &c. Habemus itaque △ AFB : △ *afb* = $BF^2 : bf^2$, △ BFC : △ *bfc* = $BF^2 : bf^2$ &c. (§. 398). Ergo ABCDE : *abcde* = $BF^2 : bf^2$ (§. 167 *Arithm.*), consequenter cum radii BF & *bf* sint ut diametri (§. 39 *Geom.* & 178 *Arithm.*), polygona similia circulo inscripta sunt ut quadrata diametrorum (§. 260 *Arithm.*). Et idem eodem modo ostenditur de polygonis circulo circumscriptis, cum △△ similia etiam sint in ratione duplicata altitudinum (§. 398), altitudines vero triangulorum, in quæ resolvitur polygonum circulo circumscriptum, sint radii circulorum (§. 355).

Quodsi jam polygonum circulo inscriptum tot sumatur laterum, donec subtensa a peripheria magnitudine inassignabili differat; polygonum cum circulo idem erit. Unde etiam circuli erunt inter se ut diametrorum Quadrata.

COROLLARIUM.

409. Habent ergo circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 374), adeoque, cum radii sint ut diametri (§. 39 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*), & radiorum (§. 260. 259 *Arithm.*).

THEOREMA 86.

410. *Circulus æqualis est triangulo, cujus basis peripheriæ, altitudo radio æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter se æquales adeoque infinite parvas divisa; arcus infinite exigui *ab* supra chordam cognominem excessus erit quovis dato minor, seu inassignabilis, adeoque revera nullus. Concipiantur porro ex centro *c* ad extrema arcus infinite parvi *ab* ducti radii *cb* & *ca*: erit angulus *acb* infinite parvus, adeoque *a* & *b* non different a recto (§. 240), consequenter si *ab* sumatur pro basi, radius *ac* erit tri- Tab. VIII. Fig. 125.

anguli *abc* altitudo (§. 228). Cum adeo area circuli resolvatur in istiusmodi triangula numero infinita, quorum altitudo communis est radius *ac*, bases vero junctim sumtæ sunt peripheriæ circuli æquales, *per demonstrata;* erit ille æqualis triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius circuli (§. 401). *Q. e. d.*

SCHOLION.

411. *Hac demonstrandi methodo primus usus est* Keplerus (p). *Eam exemplo ejus excitatus* (q) *sub nomine* methodi indivisibilium *magis excoluit* Cavalerius. *Demonstrationem indirectam dedit* Archimedes (r) *non contemnendam, quoniam ipsius demonstrandi methodo principia methodi infinitesimalis rigidantur.*

COROLLARIUM 1.

412. Sunt igitur circuli in ratione composita peripheriarum & radiorum (§. 388). Sed iidem sunt in ratione duplicata radiorum (§. 409). Quare peripheriæ sunt inter se ut radii (§. 159 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

413. Cum adeo sit ut peripheria circuli unius ad suum radium, ita peripheria alterius cujuscunque ad suum (§. 173 *Arithm.*); ratio peripheriæ ad radium seu diametrum (§. 39 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*) in omnibus circulis eadem.

SCHOLION.

414. *Idem etiam hoc modo ostenditur: cum omnes circuli inter se similes sint* (§. 134), *per quæ distingui possent, ea eadem sunt* (§. 24 *Arithm.*). *Quoniam itaque per rationem peripheriarum ad diametros distingui possent, siquidem ea in diversis circulis diversa foret* (§. 132 Arithm.); *ratio in omnibus eadem esse debet.* Q. e. d.

THEOREMA 87.

415. *Sector circuli ACD æqualis est triangulo, cujus basis arcus AD, altitudo radius AC.* Tab. VIII Fig. 135.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ theorematis præcedentis (§. 410).

THEOREMA 88.

416. *Polygonum inscriptum minus; circumscriptum majus est circulo. Similiter illius perimeter minor; hujus autem perimeter major est peripheria circuli.*

DEMONSTRATIO.

Latera AB, BC, CD &c. polygoni inscripti sunt chordæ arcus cogno- Tab. VI. Fig. 107.

(p) in Nova Stereometria doliorum vinariorum part. 1. theor. 2. f. B2.

(q) vide præfat. ad Geometriam indivisibilium continuorum nova ratione promotam p. b. 2.

(r) in libello de circuli dimensione prop. 1.

cognomines ſubtendentes (§. 342). Sed chordæ ſunt arcubus minores (§. 191). Ergo ſingula polygoni latera AB, BC, CD &c. ſunt ſingulis arcubus eidem reſpondentibus minora, conſequenter perimeter polygoni circulo inſcripti eſt hujus peripheria minor (§. 90 *Arithm.*). Et quoniam chordæ totæ intra circulum cadunt: area polygoni parti circuli congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*), adeoque ipſi æqualis eſt (§. 161), conſequenter polygonum inſcriptum circulo minus (§. 20 *Arithm.*). *Quod erat primum & ſecundum.*

Latera polygoni circumſcripti *ab*, *bc*, *cd* &c. tangunt circulum (§. 355) adeoque totæ extra eum cadunt (§. 47), conſequenter circulus parti polygoni congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*). Hinc ipſi æqualis (§. 161), hoc eſt, circulus polygono circumſcripto minor eſt (§. 20 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Area polygoni circumſcripti eſt ad aream circuli in ratione compoſita radii circuli & perimetrorum (§. 401. 410. 388), conſequenter ut factum ex radio in perimetrum polygoni ad factum ex radio in peripheriam circuli (§. 159 *Arithm.*) Ergo illa ad hanc ut illius perimeter ad hujus peripheriam (§. 181 *Arithm.*). Sed polygonum majus circulo *per demonſtr.* Ergo & ejus perimeter major peripheria hujus (§. 149 *Arithm.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA 89.

417. *In triangulo rectangulo ABC quadratum hypothenuſæ AC æquale eſt quadratis laterum AHIB & BCED ſimul ſumtis.* Tab. VIII. Fig. 130.

DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ AE & BF (§. 121), itemque BK ipſi CF parallela (§. 258). Quoniam △ ACE cum quadrato CEDB ſuper eadem baſi & inter easdem parallelas (§. 336) exiſtit; hujus dimidium eſt (§. 391). Ex eadem ratione △BCF eſt dimidium parallelogrammi LCFK. Enimvero quia $x = o$ (§. 98. 145), adeoque $x + y = o + y$ (§. 88 *Arithm.*), BC = CE & AC = CF (§. 98); ideo △ ACE = △ BCF (§. 179), conſequenter BCED = LCFK (§. 93 *Arithm.*). Eodem modo oſtenditur, eſſe AHIB = ALKG. Quamobrem BCED + AHIB = LCFK + ALFG (§. 88 *Arithm.*) = ACFG (§. 86 *Arithm.*) *Q. e. d.*

SCHOLION.

418. *Hoc theorema* Pythagoras *invenit*:

venit: unde Pythagoricum *dicitur. Amplissimi per Mathesin universam est usus: ideo ab illius auditoribus* hecatombe, *hoc est, centum boum sacrificio redemtum fertur.*

Tab. VIII. Fig. 131.

COROLLARIUM 1.

419. Quadratum construitur duobus aut pluribus datis simul sumtis aequale si 1. latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos (§. 249); 2. super ducta hypothenusa BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (§. *cit.*) ducaturque hypothenusa BD &c. Est enim $BC^2 = AB^2 + AC^2$ & $BD^2 = BC^2 + CD^2$ (§. 417). Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ &c.

COROLLARIUM. 2.

Tab. VIII. Fig. 132.

420. Quodsi AB fuerit $= 1$ & AC $= 1$; erit $CB = \sqrt{2}$. Si porro fiat AD $= CB = \sqrt{2}$; erit $DB = \sqrt{3}$. Si fiat $AE = 1$; erit $BE = \sqrt{5}$. Si fiat $AF = EB = \sqrt{5}$; erit $FB = \sqrt{6}$ & ita porro in infinitum. Omnes adeo radices quadratae surdae sunt ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, consequenter numeri (§. 10 *Arithm.*) iique irrationales (§ 43. 295 *Arithm.*).

COROLLARIUM 3.

421. Cum CB sit diagonalis Quadrati (§. 111); erit ea ad latus AB ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ est numerus irrationalis (§. 420), adeoque unitati incommensurabilis (§. 43 *Arithm.*), consequenter diagonalis quadrati est lateri incommensurabilis.

COROLLARIUM. 4.

422. Dantur adeo quantitates incommensurabiles, hoc est, quarum nulla datur pars aliquota communis (§. 31 *Arithm.*), consequenter rationes irrationales (§. 164 *Arithm.*). Et hinc patet non repugnare, ut hae numeris irrationalibus exprimantur (§. 419).

PROBLEMA 57.

423. *Datis chorda AB & radio AC invenire chordam arcus dimidii AD.* Tab. VIII. Fig. 133.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam radius CD arcum AB bisecat in D *per hypoth.* etiam chordam AB bisecat & ad eam perpendicularis (§. 291), adeoque anguli ad A recti sunt (§. 78). Quare

1. A quadrato radii AC subtrahatur quadratum chordae dimidiae datae AE: residuum est quadratum ipsius EC (§. 417).
2. Ex hoc residuo extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*), quae erit EC.
3. Haec ex radio DC subducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE & DE, summa est quadratum DA (§. 417).
5. Inde ergo si extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*); habetur chorda arcus dimidii AD.

E. gr. Sit radius AC $= 10000$ & AB latus hexagoni: erit AB itidem

dem 10000 (§. 356) & AE = 5000.

Quare

AC^2 =	100000000	AE^2 =	25000000
AE^2 =	25000000	ED^2 =	1795600
CE^2 =	75000000	DA^2 =	26795600
		DA =	5176
CE =	8660		
DC =	10000		
DE =	1340		

PROBLEMA 58.

Tab. VIII. Fig. 134. 424. *Dato latere polygoni regularis inscripti AB invenire latus circumscripti FG.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipsi AB & DC chordam AB bifariam dividit (§. 355); erit AE = ½ AB & EC : AE = CD : DG (§. 268) Quare si ob angulum rectum ad E (§. 291) EC investigetur ut in problemate præcedente; reperietur DG (§. 302 *Arithm.*), cujus duplum est latus polygoni circumscripti FG. Est enim EC : CD = EA : DG & EC : CD = EB : FD (§. 268). Cum adeo sit EA : DG = EB : FD (§. 167 *Arithm.*) & EA = EB *per demonstrata:* erit etiam DG = DF (§. 177 *Arithm.*) adeoque FG = 2 DG. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Sit DC = AB = 10000; erit AE = 5000 & EC = 8660 (§. 423), adeoque DG = 5773. Hinc FG = 11546.

PROBLEMA 59.

425. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.*

RESOLUTIO.

1. Quærantur per continuam bisectionem latera polygonorum inscriptorum (§. 423), donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum subtendens.
2. Invento hoc latere quæratur porro latus polygoni similis circumscripti (§. 424).
3. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimeter polygoni tam inscripti, quam circumscripti (§. 106).

Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major quam ejusdem ad perimetrum polygoni circumscripti; minor vero, quam ejusdem ad perimetrum inscripti (§. 416 *Geom.* & §. 205 *Arithm.*). Differentia vero inter utramque perimetrum cognita haud difficulter definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

Sit e. gr. radius circuli 1 seu (ut latera polygonorum per fractiones decimales exprimere liceat) 1000000000000
000000000000000000; reperietur
continua a quadrato bisectione latus
polygoni 1073741824 laterum inscri-
pti vero proxime minus 0.000000000
58151672317068638 7122; circum-
scripti autem latus vero itidem proxime majus 0. 000000000585167231 70
6863873784. Hinc perimeter circumscripta 6.28318530717958649156537
vero proxime major; inscripta autem
6.28318530717958645093 vero proxime minor. Cum ergo circuli peripheria intra hos limites contineatur; posita diametro 20000000000000000, erit peripheria minor quam 6283185 3
071795864, major vero quam 62831
853071795863. Unde ratio prope vera diametri ad peripheriam ut 100000
00000000000 ad 31415926535897932. Compendia calculi tradit *Ludolphus a Ceulen* (s).

SCHOLION I.

426. *In quadrando circulo ab omni ævo, quo Geometria exculta, desudarunt ingenia præstantissima: perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, utut nostra præsertim ætate ars inveniendi egregie promota fuerit. Rationem tamen diametri ad peripheriam in numeris prope veris dederunt multi:* Archimedes (t) *ea fini excogitavit methodum quadrandi circulum per polygona regularia inscripta & circumscripta, & polygonis 96 laterum usus invenit rationem diametri ad peripheriam esse ut 7 ad 22 fere. Nimirum si diameter 1, perimeter polygoni inscripti reperitur* $3\frac{10}{71}$; *perimeter vero circumscripti* $3\frac{1}{7}$. *Ejus vestigiis insistentes posteri rationes propiores investigarunt. Nemo autem plus operæ impendit* Ludolpho a Ceulen (u), *qui tandem reperit, posita diametro 1 peripheriam esse minorem quam* 3. 14159265 358979323846264338387950, *sed majorem quam idem numerus, cyphra ultima in unitatem mutata. Enimvero quoniam numeri adeo prolixi praxi parum respondent; in Geometria practica hodie a plerisque assumitur, diametrum esse ad peripheriam ut* 100 *ad* 314, *vel in circulis majoribus ut* 10000 *ad* 31415: *in qua proportione* Ptolemæus, Vieta, Hugenius *cum* Ludolpho *consentiunt.* Hugenius (y) *compendiosiorem monstravit viam; sed pluribus theorematis nixam, quæ in hisce Elementis non demonstrantur.*

COROLLARIUM.

427. Si diameter fuerit 113; erit peripheria (113.31415): 10000 (*§.* 271 *Arithm.*) hoc est 355 quam proxime.

SCHO-

(s) in libro de circulo & adscriptis conf. Fundamenta Arithmetica & Geometrica lib. 6. probl. 1. p. m. 241 & seqq. (t) in libello de circuli dimensione prop. 2. (u) in Zetematum Geometricorum Epilogismo Zetem. 2 p. 92. (x) in Inventis de circuli magnitudine prop. 10 p. 15. & prop. 20 p. 40.

SCHOLION 2.

428. *Hæc proportio, quam* Adrianus Medius *tradit* (z) *a parente suo inventam & demonstratam* (a) *inter omnes, quæ parvis numeris exprimuntur, accuratissima. Quodsi enim numerum* 355 *septem cyphras ad obtinendas fractiones decimales auctum per* 113 *dividas; quotus cum proportione Ludolphina collatus ostendet eam ne quidem* $\frac{3}{10000000}$ *a vera differre.*

PROBLEMA 59.

429. ***Data diametro circuli invenire peripheriam & aream ejus, & data peripheria diametrum.***

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 426. 427); una data, invenietur altera (§. 302 *Arithm.*).
2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habetur area circuli (§. 410. 392).

E. gr. Sit diameter 56: erit

100—314—56	Periph. 17584‴
56	¼ Diam. 1400
1884	7033600
1570	17584
Per. 17°5′8″4‴	Area 24°61′76″00‴

COROLLARIUM 1.

430. Si diameter 100; peripheria 314 (§. 426), adeoque area circuli 7850 (§. 429). Est vero quadratum diametri 10000 (§. 370): ergo hoc ad aream circuli ut 10000 ad 7850, hoc est, ut 1000 ad 785 (§. 181 *Arithm.*) quam proxime.

COROLLARIUM 2.

431. Similiter si diameter 113, peripheria 355 (§. 427), adeoque area circuli $10028\frac{3}{4}$ (§. 429). Est vero quadratum diametri 12769 (§. 370). Ergo hoc ad illam ut 12769 ad $10028\frac{3}{4}$, hoc est, ut 51076 ad 40115 (§. 178 *Arithm.*) consequenter (dividendo per 113) ut 452 ad 355 (§. 181 *Arithm.*), quæ Metiana proportio priori accuratior.

COROLLARIUM 3.

432. Area igitur circuli etiam invenitur, si ad 1000, 785 & quadratum diametri; vel ad 452, 355 & quadratum diametri numerus quartus proportionalis quæratur (§. 302 *Arithm.*).

Sit e. gr. diameter 560″, erit quadratum ejus 31°36′00″. Quare

1000 — 31°36′00″ — 785
785
―――――
1568000
25088
21952
―――――
24°61′76″ Area circuli.

CO-

(y) in Geometria practica part. 1. c. 10. §. 3. p. m. 89 (z) in libello adversus quadraturam circuli Simonis a Quercu conscripto.

COROLLARIUM 4.

Tab. VIII. Fig. 135. 433. Si area circuli minoris GEHF ſubtrahatur ex area majoris concentrici ADBC; relinquitur annulus ADBC GEHF.

PROBLEMA 60.

434. *Data area circuli, invenire diametrum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 785, 1000 & aream circuli datam 246176 numerus quartus proportionalis 313600 (§. 302 *Arithm.*): qui eſt quadratum diametri (§. 430).
2. Inde extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*): quæ eſt diameter (§. 246 *Arithm.* & §. 370 *Geom.*).

PROBLEMA 61.

Tab. VIII. Fig. 133. 435. *Dato radio circuli* AC *una cum ratione arcus* AB *ad peripheriam invenire aream ſectoris* ACB.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 100, 314 & radium AC numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): quæ eſt ſemiperipheria (§. 436 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*).
2. Quæratur porro ad 180°, arcum datum AB & ſemiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): ut habeatur arcus AB in eadem menſura, in qua radius AC datur.
3. Tandem arcus AB ducatur in ſemiradium.

Factum exprimet aream ſectoris (§. 415. 392).

E. gr. Sit radius 6'; arcus 60°.

```
        100 — 314 — 600'''
                6
        ——————————————
Semiperiph. 1884|00
        180 — 1884 — 60
   60 ) 3 ————————— 1
              628'''=AB
              300=½AC
         ——————————————
   Area  18'84''(00ACB
```

PROBLEMA 62.

436. *Datis altitudine ſegmenti* DE *& dimidia baſi* AE, *invenire aream ejus.* Tab. VIII Fig. 133.

RESOLUTIO.

1. Quæratur diameter (§. 328).
2. Deſcribatur circulus (§. 131) & in eo applicetur baſis ſegmenti AB.
3. Ducantur radii AC & BC & ope inſtrumenti transportatorii inveſtigetur numerus graduum arcus ADB.
4. Dato jam radio AC una cum arcus ADB ad peripheriam ratione inveſtigetur area ſectoris ACB &
5. ex chorda AB atque altitudinis ſegmenti

segmenti DE complemento ad radium EC area trianguli ACB (§. 392).

6. Hoc denique ex illo auferatur: residuum erit segmentum ADBEA.

E. gr. Sit AB = 600‴, DE = 80‴; erit DF = 1205‴ (§. 313), arcus AB = 60° (§. 152). Ergo area sectoris ADBC 18′84″ (§. 435). Jam EC = 522‴½ AE = 300‴. Quare △ ACB = 156750‴, consequenter segmentum AEBDA 31 650‴.

COROLLARIUM.

Tab. VIII. Fig. 134. 437. Quodsi segmentum majus BHA quæratur; triangulum B C A sectori BHACB addendum.

SCHOLION.

438. *Ne pro invenienda area sectoris atque segmenti peripheriam investigari opus sit; arcuum gradus atque scrupula tam prima, quam secunda istiusmodi particulis expressa in tabula subsequente exhibere placet, qualium diameter est* 100000. *Constructio tabulæ*

Grad.	Part. per.	Min.	Part. per.
1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17453	20	290
30	26179	30	436
40	34906	40	581
50	43633	50	727
60	52359	Sec.	0
70	61086	2	$\frac{1}{2}$
80	69813	3	$\frac{1}{2}$
90	78539	4	1
100	87266	5	1
110	95993	6	
120	104719	7	$1\frac{1}{2}$
130	113446	8	$1\frac{1}{2}$
140	122173	9	2
150	130899	10	2
160	139626	20	4
170	148353	30	7
180	157079	40	9
360	314159	50	12

intelligitur ex resolutione problematis 61 (§. 435): *usus talis est. Sit e. gr. ut in casu problematis citati diameter* 1200‴, *arcus* 60°. *Cum* 60 *gradibus in tabula respondeant* 52359 *particulæ diametri; inferatur:*

100000 — 52359 — 1200
1200
10471800
52359
628|30800
1|00000

Est ergo arcus 628‴, *ut supra* (§. cit.) *eundem reperimus.*

PROBLEMA 63.

439. *Parallelogrammum ABEC ex dato puncto D in duas partes æquales dividere.* Tab. VIII. Fig. 136.

RESOLUTIO.

Fiat EF = AD & ducatur recta DF: erit ADFC = DBEF.

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE: erit o = x (§. 156) & ob parallelas AB & EC (§. 102) y = u (§. 233). Sed AD = FE, *per constr.* Ergo △ ADG = △ FGE (§. 252). Est vero △ ACE = △ AEB (§. 337). Quare ACFG = DBEG (§. 91 *Arithm.*), consequenter ADFC = DBEF (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 64.

Tab. VIII. Fig. 137. 138. 440. *Parallelogrammum atque triangulum in partes quotcunque æquales dividere.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur basis CD in tot partes æquales, in quot figura dividenda (§. 274).
2. In parallelogrammo ducantur rectæ 1. 1, 2. 2; in triangulo A 1. A 2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam parallelogramma A 1. 1 C, 1. 2. 2. 1, 2 BD 2 inter easdem parallelas AB & CD existunt (§. 102); eandem altitudinem habent (§. 227. 228). Sunt itaque in basium ratione (§. 389), consequenter ob C 1 = 1. 2 = 2. D, *per constr.* æquales. *Quod erat unum.*

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis nonnisi unica duci possit (§. 213); triangula AC 1, 1 A 2, 2 AD eandem altitudinem (§. 228), adeoque basium rationem habent (§. 389). Sed bases æquales sunt, *per constr.* Ergo & triangula. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA 65.

441. *Figuram rectilineam quamcunque ABCDE in partes æquales dividere.* Tab. VIII. Fig. 139.

RESOLUTIO.

1. Quæratur area figuræ (§. 400) & dividatur in tot partes æquales, in quot figura dividi debet, e. gr. in 3.
2. Area partis in nostro casu tertiæ ulterius dividatur bifariam.
3. Area trianguli AED subtrahatur a parte tertia & residuum dividatur per $\frac{1}{2}$ AD; erit quotus altitudo trianguli AID priori AED addendum, ut AEDI sit pars tertia figuræ (§. 394).
4. Quare intervallo hujus altitudinis ducatur parallela ipsi AD (§. 258), quæ secabit latus AB in I: quo puncto dato, rectam DI ducere licet, tertiam partem figuræ AIDE abscindentem.

5. Pars

5. Pars tertia dimidia sive sexta totius figuræ dividatur per $\frac{1}{2}$DI, quotus erit altitudo trianguli IKD sextam figuræ partem constituentis (§.394).

6. Intervallo igitur hujus altitudinis agatur ipsi ID parallela, ut habeatur punctum K (§.258).

7. Dividatur quoque dimidia pars tertia figuræ per $\frac{1}{2}$ KD, ut habeatur altitudo trianguli KLD sextæ itidem parti figuræ æqualis (§.394).

8. Quare hujus intervallo denuo agatur ipsi KD parallela (§. 258), ut punctum L determinetur ducaturque recta KL, quæ partem figuræ tertiam KIDL resecabit.

9. Si figura in plures quam tres partes resolvenda; eodem modo ulterius procedendum.

E. gr. Sit AD = 516″, AC = 580″, EH = 154″, DG = 315″, BF = 375″; erit AED = 39732″, ADC = 91350 & ABC = 108750 (§.392) adeoque area figuræ 239832 (§.400); ejus pars tertia 79944; pars sexta 39972.

P. III = 79944
AED = 39732

AID = 40212 (155 + seu 156 fere = IM

$\frac{1}{2}$ AD = 258) 258
1441
1290
1512
1290
222

Pars VI = 39972 (151″ = KN.

$\frac{1}{2}$ DI 264) 264
1357
1320
372
264
108

Pars VI = 39972 (139″ = LO

$\frac{1}{2}$ DK 287) 287
1127
861
2662
2583
79

SCHOLION 1.

442. *Si AED majus tertia e. gr. parte figuræ; ipsam ab illo subtrahi necesse est & residuum erit triangulum a triangulo AED auferendum, ut tertiæ parti figuræ æqualis evadat. Sæpe etiam consultum est, ut prima pars AEDI per duo triangula uti cætera determinetur.*

SCHOLION 2.

443. *Ubi in charta divisio absoluta; in campo puncta* I, K, L *per quantitatem rectarum* AI, IK & DL *facile determinantur* (§. 126).

Finis partis prioris.

PARS POSTERIOR ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT I.

De PRINCIPIIS GEOMETRIÆ SOLIDÆ.

DEFINITIO 1.

444. *Solidum* sive *corpus* est magnitudo tribus dimensionibus prædita, seu extensum in longitudinem, latitudinem atque profunditatem.

DEFINITIO 2.

Tab. VIII. Fig. 141. 445. Angulus solidus B est plurium quam duarum linearum AB, BC, BF in eodem puncto B concurrentium, nec in eodem plano constitutarum ad omnes inclinatio.

COROLLARIUM 1.

446. Ergo angulus solidus B pluribus quam duobus planis in eodem plano non constitutis ABF, FBC, CBA continetur.

COROLLARIUM 2.

447. Quoniam adeo tres minimum lineæ ad angulum solidum constituendum requiruntur (§. 445); tres minimum anguli plani ad solidum constituendum necessarii.

SCHOLION 1.

448. *Unde etiam* angulus solidus *definitur, quod sit is, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem plano non consistentibus, ad idem tamen punctum constitutis, continetur.*

COROLLARIUM 3.

449. Ut anguli solidi sint æquales, angulis planis & multitudine & magnitudine æqualibus ac eodem ordine dispositis contineri debent (§. 15 *Arithm.*).

SCHOLION 2.

450. *Suppono scilicet, ut anguli solidi salva quantitate sibi mutuo substitui possint, eos intra se invicem positos congruere debere: quemadmodum etiam* anguli solidi æquales *vulgo definiuntur, quod intra se invicem positi congruant.*

COROLLARIUM 4.

451. Cum anguli solidi distingui nequeant nisi per planos, quibus continentur (§. 448), ubi plani & numero, & magnitudine æquales ac eodem ordine dispositi fuerint, ea coincidunt per quæ a se invicem distingui debent. Sunt ergo

ergo similes (§. 24 *Arithm.*), consequenter anguli solidi similes sunt æquales & contra (§. 449).

COROLLARIUM 5.

452. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes conficiant summam 360 graduum; planum circuli sternunt (§. 41. 59) adeoque solidum angulum non constituunt (§. 446). Quare summa eorum, qui ultra solidum non assurgunt, quatuor rectis seu 360° (§. 144) minor esse debet.

DEFINITIO 3.

453. *Corpus regulare* est solidum planis regularibus & inter se æqualibus terminatum. Reliqua corpora dicuntur *irregularia.*

SCHOLION.

454. *Corpora regularia dicuntur etiam* Platonica, *propterea quod* Plato *in* Timæo *corpora, quæ statuit, simplicia, cœlum puta, ignem, aerem, aquam atque terram cum iisdem comparat.*

COROLLARIUM.

455. Cum quilibet angulus corporis regularis angulis planis & numero, & magnitudine æqualibus contineatur (§. 453), omnes anguli corporis cujuslibet regularis æquales sunt (§. 449).

DEFINITIO 4.

Tab. VIII. Fig. 140. 456. *Si* figura rectilinea ACB juxta ductum lineæ rectæ AE motu sibi semper parallelo deorsum feratur, *Prisma* ABCFDE describit: & quidem *rectum*, si linea directrix AE fuerit ad planum describens perpendicularis; *obliquum* vero, si ea ad idem fuerit obliqua. In specie *Prisma* dicitur *triangulare sive trigonum*, si planum describens fuerit triangulum; *quadrangulare*, si fuerit figura quadrilatera & ita porro.

COROLLARIUM 1.

457. Quodlibet adeo prisma habet duas bases oppositas ABC & EDF æquales & circumcirca terminatur tot parallelogrammis, quot basis latera habet. Est enim AC ipsi ED parallela atque æqualis *per hypoth.* Ergo & AE parallela ipsi CD (§. 257), consequenter ACDE est parallelogrammum (§. 102). Et idem eodem modo de ceteris planis lateralibus ostenditur.

COROLLARIUM 2.

458. Plana sectionum prismatis basi ACB parallele factarum sunt inter se æqualia. Æquantur enim plano describenti ACB (§. 456 *Geom.* & §. 81. *Arithm.*), ergo & inter se æqualia sunt (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO 5.

459. *Si* planum describens ABCD fuerit quadratum & linea dirigens AE lateri ejus AB æqualis, atque angulus BAE rectus; *Cubus* describitur. Tab. VIII. Fig. 141.

COROLLARIUM 1.

460. Cubus terminatur sex quadratis inter se æqualibus: est enim ABCD = EFGH (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arith.*).

Cumque ex eadem ratione AB & EF sint inter se æquales atque parallelæ, & BA ad AE perpendicularis; erit etiam AE ad EF perpendicularis (§. 230), consequenter ABFE quadratum (§. 338), ipsi AB CD æquale (§. 374). Eodem modo ostenditur, reliqua plana terminantia esse quadrata ipsi ABCD æqualia.

COROLLARIUM 2.

461. Plana sectionum basi parallele factarum sunt quadrata ipsi æqualia (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*), consequenter etiam æqualia inter se (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO 6.

Tab. VIII. Fig. 142. 462. Si planum describens IK LM fuerit parallelogrammum; *Parallelepipedum* describitur.

COROLLARIUM 1.

463. Plana sectionum basi parallele factarum sunt parallelogramma ipsi æqualia (§. 81 *Arithm.*), adeoque & æqualia inter se (§. 87 *Arithm.*).

COROLLARIUM. 2.

464. Cum LM & NO sint æquales & inter se parallelæ (§. 462 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); etiam MO & LN æquales sunt & parallelæ (§. 257), consequenter LMNO parallelogrammum (§. 102). Eodem modo ostenditur, plana terminantia reliqua esse parallelogramma. Terminatur adeo parallelepipedum sex parallelogrammis, quorum bina opposita inter se æqualia sunt.

DEFINITIO 7.

Tab. VIII. Fig. 143. 465. Si circulus AB juxta ductum rectæ AD motu sibi semper parallelo deorsum feratur, *Cylindrus* describitur; *rectus* quidem, si recta CF centra basium C & F jungens, quæ *Axis* dicitur, fuerit ad diametrum DE perpendicularis; *scalenus* vero, si ad angulos obliquos eidem insistat. Quodsi parallelogrammum rectangulum CBEF circa latus unum CF gyretur; *cylindrum* describit *rectum.*

COROLLARIUM.

466. Sunt ergo non modo bases cylindri AB & DE æquales; verum etiam sectiones basibus parallelæ sunt circuli iisdem & inter se æquales.

DEFINITIO 8.

467. Si recta quædam KM in peripheria circuli NM ita incedat, ut constanter inhæreat puncto fixo K; describetur *Conus* N KM. Recta ex puncto K, qui *vertex* coni dicitur, ad centrum basis L ducta dicitur *Axis coni:* qui si ad diametrum circuli NM fuerit perpendicularis, *Conus rectus* est; si vero ad angulos obliquos eidem insistat, *scalenus*. Linea describens KM seu recta ex vertice in peripheriam basis ducta vocatur *Latus Coni.* Possumus quoque *Coni* genesin ita concipere, ut circellus infinite parvus, dum motu sibi semper parallelo Tab. IX. Fig. 144.

ita

ita deorsum fertur, ut centrum continuo sit in axe KL, radius PQ axi KP proportionaliter continuo augeatur. Quodsi triangulum rectangulum KLM circa rectam KL gyretur; *Conus* describitur *rectus*.

COROLLARIUM.

468. Quodsi PQ ipsi LM parallela; per ultimam coni genesin erit KL : KP = PQ : LM. Quare cum PQ & LM sint radii circulorum sibi invicem parallelorum; planum sectionis basi coni parallele factae circulus est eadem minor.

SCHOLION.

469. *Ex genesi ultima coni apparet, in definitionibus geometricis geneticis tanquam entium imaginariorum admitti etiam posse miraculosa. Et quoniam in cono obliquo latus coni non ejusdem longitudinis in quovis peripheriae puncto; patet lineam describentem KM, quae altero sui extremo peripheriae* NM *constanter adhaeret, per punctum fixum K aliqua sui parte nunc deorsum, nunc sursum moveri debere.*

DEFINITIO 9.

Tab. IX. Fig. 145. 470. Si semicirculus K juxta diametrum AB gyretur; *Sphaera* describitur, diciturque diameter circuli AB etiam *Diameter* atque *Axis Sphaerae*, centrum C etiam *Centrum Sphaerae*.

COROLLARIUM.

471. Omnes ergo rectae ex sphaerae superficie in centrum ductae sunt inter se aequales (§. 40).

DEFINITIO 10.

472. *Pyramis* est solidum terminatum circumcirca tot triangulis ADC, DCB & ABD in uno puncto D coëuntibus, quot basis A BC latera habet. Dicitur autem *triangularis*, *quadrangularis*, *quinquangularis* &c. si basis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c. Tab. IX. Fig. 146.

COROLLARIUM. 1.

473. Si *ac*, *cb*, *ba*, lateribus AC, CB, BA basis ACB parallelae ducantur; erit DC : D*c* = CA : *ca* = CB : *cb* (§. 268), adeoque CA : *ca* = CB : *cb* (§. 167 *Arithm.*), consequenter cum eodem modo ostendi possit esse CA : *ca* = AB : *ab*, erit triangulum *acb* simile triangulo A CB. (§. 207) Quare si pyramis triangularis ACDB secatur plano basi parallelo; planum istud huic simile erit.

COROLLARIUM 2.

474. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares resolvi potest, quot sunt latera basis demtis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in quinque &c. si pyramis multangularis plano basi parallelo secetur, constabit id ex triangulis, quae singula singulis similia sunt, in quae resolvitur basis (§. 473), consequenter cum vi demonstrationis primae problematis 47 (§. 363) pateat, similes esse figuras rectilineas quascunque, quae ex triangulis similibus eodem ordine inter se junctis componuntur, in qua-

in quavis pyramide planum sectionis basi parallelum est figura basi similis.

Tab. IX. *DEFINITIO 11.*

Fig. 147. 148. 149. 150. 475. *Tetraëdrum* est solidum quatuor; *Octaëdrum* est solidum octo; *Icosaëdrum* est solidum viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehensum; *Dodecaëdrum* vero solidum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus contentum.

DEFINITIO 12.

Tab. IX. Fig. 151. 476. *Inclinatio plani* KEGL *ad planum* ACDB est angulus HFI, quem efficiunt rectæ HF & FI in puncto F ad lineam sectionis EG perpendiculares.

DEFINITIO 13.

477. *Mensura solidi* est cubus, cujus latus perticæ unius, diciturque *Pertica cubica.* Hæc dividitur in *Pedes*, *Digitos*, &c. *cubicos*, hoc est, in cubos, quorum latus pedem, digitum &c. adæquat.

CAPUT II.

De SECTIONE ET SITU PLANORUM.

THEOREMA 1.

Tab. XI. Fig. 175. 478. *Rectæ lineæ pars quædam AB non est in subjecto plano DE, pars vero BC in sublimi.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim, si fieri possit, pars lineæ rectæ AB in plano DE, pars vero altera BC in sublimi. Cum linea recta terminata utrinque produci possit (§. 21); producatur AB in F: erit ergo AB pars rectæ AF. Sed eadem AB est pars rectæ ABC, *per hypoth.* Punctum igitur rectam describens in B mutat directionem, cum & versus F, & versus C progredi valeat, ubi ad B pervenit: quod cum sit absurdum (§. 19), rectæ lineæ quædam pars AB non potest esse in subjecto plano DE, pars vero quædam BC in sublimi. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

Tab. XI. Fig. 176. 479. Duæ igitur rectæ ADEB & CDEF segmentum commune DE habere nequeunt (§. 478), consequenter duæ rectæ CAB & CF se mutuo non intersecant nisi in uno puncto D.

CO-

COROLLARIUM 2.

Tab. XI. Fig. 177. 480. Cumque pars rectæ AD esset in subjecto plano, pars vero BD in sublimi, si trianguli ADE pars esset in subjecto plano, pars vero DBCE in sublimi; triangulum ABC erit in eodem plano.

COROLLARIUM. 1.

Tab. XI. Fig. 178. 481. Et quoniam rectarum BE & DC se mutuo secantium in A partes AB & AC sunt crura trianguli ABC; erunt eadem in eodem plano (§. 480). Sed in eodem plano est EA, in quo est AB, & AD in eodem est, in quo est AC (§. 478). Ergo lineæ se mutuo secantes EB & DC in eodem sunt plano.

THEOREMA 2.

Tab. XI. Fig. 179. 482. *Si duo plana ABCD & EFHG se mutuo secent; erit communis sectio recta IK.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam rectæ AB & EF se mutuo non intersecant nisi in puncto I, nec rectæ DC & GH nisi in puncto K (§. 479); si communis planorum sectio non est recta unica, sed aliquod planum, termini illius plani in punctis I & K coire debent. Ducantur ergo in plano EFHG recta ILK & in plano ABCD recta IMK, quod fieri posse patet, si sectio communis planorum ABCD & EFHG non est recta unica IK, utut planum sectionis lineis curvis in punctis I & K coëuntibus terminari sumas (§. 191). Duæ igitur rectæ ILK & IMK, cum earum extrema in I & K coincidant, totæ in punctis unam coincidere debent (§. 170), consequenter communis sectio esse nequit nisi recta jungens puncta I & K. *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

483. *Si duæ rectæ AB & CD fuerint in eodem plano, recta EF eas secans in G & H erit in eodem plano.* Tab. XI. Fig. 180.

DEMONSTRATIO.

Secet planum aliud planum datum, in quo positæ sunt rectæ AB & CD in punctis G & H; recta transiens per G & H est communis sectio planorum (§. 482). Sed eadem est pars lineæ EF (§. 170), quæ duas AB & CD secat *per hypoth.* Recta igitur EF est in eodem plano, in quo ponuntur duæ AB & CD. *Q. e. d.*

THEOREMA 4.

484. *Si recta IE fuerit perpendicularis ad rectam KL in plano ABCD ductam; erit ea perpendicularis ad rectas omnes MN, OP &c. quæ per punctum E ducuntur.* Tab. XI. Fig. 181.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus enim rectam KL, cui

cui IE perpendiculariter insistit, circa punctum E moveri, donec ipsi MN immineat. Quoniam recta KL cum recta MN coincidit (§. 36), IE vero situm ad eandem non mutat; erit ipsa IE etiam perpendicularis ad MN. Eodem modo patet, eandem rectam IE etiam perpendicularem esse debere ad rectam OP & quamcunque aliam per punctum E in plano ABCD ductam. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

485. Recta igitur IE ad rectam KL in plano ABCD perpendicularis omnibus rectis per punctum E in eodem plano ductis ad angulos rectos insistit (§. 78).

SCHOLION.

486. *Hinc* linea recta *IE* ad planum *ABCD* perpendicularis *definitur*, *quod ad rectas omnes lineas in plano ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit.*

THEOREMA 5.

Tab. XI. Fig. 182. 487. *Si recta IE fuerit ad planum ABCD perpendicularis, & ex E tanquam centro in eodem plano descriptus sit circulus; erunt rectae IG, IF &c. ab eodem puncto sublimi ad peripheriam ductae inter se aequales.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex centro E ad puncta peripheriae F, G &c. radii EF, EG &c. erit EF = EG (§. 40), cumque anguli FEI & GEI sint recti (§. 485), etiam FEI = GEI (§ 145). Quare cum porro sit EI = EI; erit FI = GI (§. 179). *Q. e. d.*

THEOREMA 6.

488. *Ex eodem puncto E ad planum ABCD nonnisi unica perpendicularis EI duci potest.* Tab. XI. Fig. 181.

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc alia EQ & per punctum E in plano recta OP; erit cum EQ, tum EI ad eandem rectam OP perpendicularis (§. 486): quod cum sit absurdum (§. 213), ex eodem puncto E nonnisi unica perpendicularis ad planum EI erigi potest. *Q. e. d.*

THEOREMA 7.

489. *Ab eodem puncto I in sublimi dato ad idem planum ABCD perpendicularis nonnisi unica IE demitti potest.* Tab. IX. Fig. 182.

DEMONSTRATIO.

Demittatur enim, si fieri potest, adhuc alia IG. Jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit IEG triangulum in eodem plano (§. 480). Duo igitur in triangulo ad basin anguli E & G recti sunt (§. 486): quod cum

sit

ſit abſurdum (§. 218), a puncto I ad planum ABCD nonniſi unica perpendicularis demitti poteſt. *Q. e. d.*

THEOREMA 8.

Tab. XI. Fig. 182. 490. *Linea perpendicularis IE eſt breviſſima, quæ a puncto extra planum dato ad idem duci poteſt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim recta adhuc alia IG & jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit triangulum IEG in eodem plano (§. 480) & angulus ad E rectus (§. 486). Eſt igitur EI < IG (§. 220). *Q. e. d.*

THEOREMA 9.

Tab. XI. Fig 183. 491. *Si recta LE duabus rectis FE & HE, vel pluribus FE, HE, IE in eodem puncto E concurrentibus perpendiculariter inſiſtat; erunt duæ illæ rectæ FE & HE, vel plures FE, HE & IE in eodem plano ABCD.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim, ſi fieri poteſt recta, EH in plano AB CD & EF in plano LEGK. Erit ergo linea EG cum EH in eodem plano, conſequenter LE perpendicularis ad EH inſiſtet ipſi EG ad angulum rectum (§. 485). Sed cum LE etiam ipſi EF ſit perpendicularis *per hypoth.* erit etiam angulus LEF rectus (§. 78), conſequenter angulus LEF ipſi LEG æqualis (§. 145), pars nempe toti (§. 9 *Arithm.*): quod cum ſit abſurdum (§. 84 *Arithm.*), rectæ FE & HE, quibus recta LE in puncto E perpendiculariter inſiſtit, in eodem ſunt plano ABCD. *Quod erat unum.*

Si plures fuerint rectæ EF, EH, EI &c. quibus recta EL perpendiculariter inſiſtit; patet *per demonſtrata*, eſſe rectas EI & EH, itemque EH & EF in eodem plano ABCD. Sunt igitur & rectæ EI & EF, conſequenter omnes rectæ EI, EH & EF in eodem plano ABCD. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 10.

492. *Lineæ rectæ GE & HF eidem plano ABCD perpendiculares ſunt inter ſe parallelæ; & ſi una parallelarum GE & HF fuerit ad planum perpendicularis, etiam ad idem perpendicularis erit altera.* Tab. XI. Fig. 184.

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta EF & cum GE perpendicularis ſit ad planum ABDC *per hypoth.* inſiſtat ea rectæ EL in plano iſto ductæ ad angulos rectos; erit ergo etiam GE perpendicularis ad EF (§. 484).

Sumatur EL = EF & moveatur GE juxta ductum rectæ EL, donec in L perveniat, ita ut rectæ EL semper inhæreat ad angulum rectum; erit LI perpendicularis ad EL (§.78) & ipsi GE parallela (§. 256). Moveatur recta EL cum sua perpendiculari LI, donec ipsi EF congruat (§.168), consequenter punctum E in F cadat (§.3). Quoniam LI rectæ EF est perpendicularis *per demonstrata;* ad idem vero punctum F ejusdem rectæ EF nonnisi unica recta perpendicularis esse potest (§. 213); etiam recta LI cadet in rectam FH, atque adeo HF erit ad EF perpendicularis, consequenter HF & GE inter se parallelæ. *Quod erat unum.*

Sint jam GE & HF inter se parallelæ & GE ad planum perpendicularis. Patet ut ante si ponatur perpendicularis ad rectam EL, eam etiam perpendicularem esse debere ad EF. Ad eandem EF igitur etiam perpendicularis est HF (§.230), consequenter HF perpendicularis ad planum ABDC (§.484.486). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

493. Rectæ igitur omnes ad rectam EF in plano GEFH perpendiculares etiam ad planum ABDC perpendiculares sunt.

SCHOLION.

494. *Hinc* Euclides planum *definit* ad planum rectum *sive* perpendiculare, *cum omnes rectæ lineæ, quæ communi planorum ABDC & GEFH sectioni EF perpendiculares ducuntur in planorum uno GEFH, rectæ sunt alteri plano ABDC.*

THEOREMA 11.

495. *Rectæ AB & EF, quæ sunt eidem rectæ CD parallelæ, non tamen in eodem cum ipsa plano, sunt inter se parallelæ.* Tab. XI. Fig. 185.

DEMONSTRATIO.

Ducatur in plano parallelarum AB & CD recta GH ad AB perpendicularis, & ex H perpendicularis HI ad EF in plano parallelarum CD & EF. Junganturpuncta G & I recta GI; erit triangulum GHI in eodem plano (§.480). Quoniam AG perpendicularis ad GH & EI perpendicularis ad HI *per construct.* erunt etiam AG & EI perpendiculares ad GI (§. 484), consequenter inter se parallelæ (§. 256). *Q. e. d.*

THEOREMA 12.

496. *Si duæ rectæ AC & CB fuerint parallelæ duabus rectis DF & FE, etiamsi non sint in eodem pla-* Tab. X. Fig. 167.

plano, anguli, quos comprehendunt, æquales ſunt.

DEMONSTRATIO.

Fiat CB = FE & AC = FD: quoniam CB parallela ipſi FE & CA parallela ipſi FD *per hypotheſin*: erit BE ipſi CF & AD eidem CF parallela & æqualis (§. 257), conſequenter BE parallela (§. 232) & æqualis (§. 87 *Arithm.*) ipſi AD, ac ideo AB parallela & æqualis ipſi DE (§. 257). Eſt igitur angulus DFE = ACB (§. 204). *Q. e. d.*

THEOREMA 13.

Tab. XI. Fig. 186. 497. *Si recta IK duobus planis ABCD & EFGH fuerit perpendicularis, erunt plana inter ſe parallela.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta IM in plano ABCD & erigatur ML ad eam perpendicularis, quæ plano EFGH in L occurrit, cumque angulus I rectus ſit *per hypoth.* ad IK parallela eſt (§. 256), conſequenter plano EFGH ad angulos rectos inſiſtit (§. 492). Quamobrem ſi puncta L & K jungantur recta LK, erit angulus K rectus (§. 485), conſequenter LM = IK (§. 238). Cum eodem modo demonſtretur rectam ex quovis alio puncto plani ABCD ductam ipſi IK parallelam eidem æqualem eſſe; plana ABCD & EFGH ubivis a ſe invicem eodem intervallo diſtare (§. 225) patet. Sunt igitur inter ſe parallela.

SCHOLION.

498. *Nimirum* planum *ABCD alteri EFGH dicitur* parallelum, *perinde ac recta alteri recta parallela eſt* (§. 81), *ſi ubivis eandem ab eodem diſtantiam ſervat.*

THEOREMA 14.

499. *Si planum ADCB ſecet duo plana parallela EFGH & IKLM; erunt ſectiones AD & BC inter ſe parallelæ.* Tab. XI. Fig. 187.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim ſectiones AD & BC non eſſe inter ſe parallelas; ergo continuatæ alicubi concurrent (§. 81. 83). Cum igitur ſi plana cum ipſis continuentur totæ in iisdem ſint (§. 478); ipſa quoque plana EFGH & IKLM concurrent. Parallela igitur non ſunt (§. 498): quod cum ſit abſurdum, ſectiones AD & BC planorum parallelorum EFGH & IKLM parallelæ ſunt. *Q. e. d.*

THEOREMA 15.

500. *Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes AC & AB duabus aliis ſe mutuo tangentibus EG & EF fuerint parallelæ, etiam plana* Tab. XI. Fig. 188.

 AC

ACDB & EGLF per ipsas ducta erunt parallela.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AH ad planum EGLF recta & ex H ducantur H K ac HI rectis EF atque EG parallelæ (§. 258); erunt eædem HK & HI etiam parallelæ rectis AB & AC (§. 495). Perpendicularis igitur AH ad HK etiam perpendicularis est ad AB (§. 230), consequenter planum ABCD parallelum plano EFLG (§. 497). *Q. e. d.*

THEOREMA 16.

Tab. XI. Fig. 189. 501. *Duæ lineæ rectæ NR & OS a planis parallelis ABDC, EF HG, IKLM proportionaliter secantur, ut nempe sit* PR : PN = TS : OT.

DEMONSTRATIO.

Jungantur puncta sectionum N & O, R & S rectis NO & RS, ducaturque recta OR; erit triangulum NOR & similiter triangulum OSR in eodem plano (§. 480), & PQ parallela ipsi NO, QT vero parallela ipsi RS (§. 499). Est igitur RQ : QO = RP : PN & QR : QO = TS : OT (§. 268), consequenter RP : PN = TS : OT (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 1.

Tab. XI. Fig. 182. 502. *Ad datum planum ABDC in dato puncto E erigere perpendicularem EI.*

RESOLUTIO.

Ducatur ex puncto E in dato plano ABDC intervallo quocunque EG circulus, & ex centro E erigatur recta EI ea lege, ut punctum I quodcunque a peripheriæ punctis quibuscunque F & G æqualiter distet: erit ea ad planum ABCD in dato puncto E perpendicularis (§. 487).

COROLLARIUM 1.

503. Cum triangulum IEG & quodcunque eodem modo determinatum veluti EIF sit rectangulum; evidens est, si crus unum normæ ita ad EG vel EF applicetur, ut vertex anguli recti, quem crura comprehendunt, sit in centro E, fore crus alterum ad planum ABCD in dato puncto E perpendiculare: ut adeo pateat normæ usus in erigendis perpendicularibus ad planum datum in puncto dato.

SCHOLION.

504. *Necesse est ut norma crura non desinant in aciem tenuem, sed aliquam habeant latitudinem, ut norma ad rectam EG applicata sit ad planum recta, nec oculorum judicium fallat.*

COROLLARIUM 2.

505. Quodsi punctum I extra planum detur, norma super plano, erecta huc illuc ve promovenda, donec crus erectum idem attingat, si e puncto I perpendicularis IE inde demittenda. Quodsi crus normæ brevius sit, quam ut punctum

ctum I attingere possit, cum filo ex puncto I extenso idem coincidere debet.

THEOREMA 17.

Tab. XI. Fig. 190. 506. *Si in plano CFGH uno recta EH est ad planum ABCD perpendicularis, omnis recta IK vel LM ad sectionem HG perpendicularis est ad planum perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta EH est ad planum recta *per hypothesin*, IK vel LM ducatur ipsi EH parallela (§. 258); erit IK vel LM ad HQ perpendicularis (§.230), consequenter eaedem IK & LM etiam perpendiculares sunt ad rectas quascunque alias, quae per puncta K & M in plano ducuntur, veluti ad PQ & RS (§.484), adeoque ad planum ipsum (§.486). *Q.e.d.*

SCHOLION.

507. *Coincidit hoc theorema cum corollario theorematis 10 (§. 193): unde definitionem plani perpendicularis ad alterum deduximus.*

THEOREMA 18.

Tab. XI. Fig. 191. 508. *Sectio NO duorum planorum EFGH & IKLM ad idem tertium ADCB perpendicularium est ad idem planum perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam planum EFGH ad planum ADCB perpendiculare *per hypoth.* ex puncto O duci poterit in plano EFGH recta ad planum ADCB perpendicularis (§. 507). Eodem modo patet, ex eodem puncto O duci posse rectam intra planum IKLM ad planum ADCB perpendicularem. Quare cum ad idem punctum O eidem plano ADCB nonnisi unica perpendicularis insistere possit (§. 488), communis autem planorum IKLM & EFGH sectio NO nonnisi unica recta sit (§.482); sectio illa communis NO erit illa perdicularis, quae in utroque plano EFGH & IKLM ad planum ADCB duci potest. *Q.e.d.*

THEOREMA 19.

509. *Plani KLGE ad planum ABDC in omnibus punctis F, f &c. inclinatio eadem.* Tab. IX. Fig. 151.

DEMONSTRATIO.

Erigantur ex punctis F & f perpendiculares FH & *fh* in plano ABDC & aliae FI & *fi* in plano EKLG (§.212); fiatque HF = *hf*

&FI

& FI=*fi*, erunt HF & *hf*, itemque FI & *fi* parallelæ (§. 256), consequenter etiam H*h* & I*i* parallelæ ipsi F*f* & H*h* = F*f*, itemque I*i*=F*f* (§.257), adeoque etiam H*h* parallela ipsi I*i* (§.495) & H*h*=I*i* (§. 87 *Arithm.*). Quoniam itaque HI & *hi* inter se parallelæ atque æquales sunt (§. 257); erunt anguli F & *f* æquales (§. 204), atque adeo inclinatio plani ad id planum in singulis punctis eadem (§. 476). *Q. e. d.*

CAPUT III.

De

SOLIDORUM CONSTRUCTIONE.

PROBLEMA 2.

510. *Cubum ADCBFEHG vel parallelepipedum IKMLQNOP in plano describere,*

Tab. VIII. Fig. 141. 142.

RESOLUTIO.

1. Construatur pro cubo rhombus DABC (§.340); pro parallelepipedo rhomboides IKLM (§. 341).
2. Construantur porro pro cubo quadratum AEFB & rhombus BCGF (§. 338. 340), pro parallelepipedo rectangulum LMON, cujus latus LN altitudini æquale & rhomboides MKPO (§. 339. 341).

Cum rhombi pro quadratis, & rhomboides pro rectangulis construantur; ut plana lateralia FBCG & MKPO videri possint; erit solidum AG cubus (§. 459); solidum vero IP parallepipedum (§. 462).

PROBLEMA 3.

511. *Prisma ACBFDE in plano describere.*

RESOLUTIO.

Tab. VIII. Fig. 140.

1. Describatur basis, e. gr. triangulum ACB, si prisma fuerit triangulare.
2. In A excitetur perpendicularis ad AB altitudini æqualis AE (§. 249).
3. Construantur parallelogramma ACED, BCDF (§. 341).

Erit

Erit ACBFDE prisma triangulare (§. 456. 457).

PROBLEMA 4.

Tab. IX. Fig. 146. 512. *Pyramidem DACB in plano describere.*

RESOLUTIO.

1. Describatur basis, e. gr. triangulum ACB, si triangularis fuerit, ita tamen ut latus AB, tanquam a facie aversum, non exprimatur.
2. Super AC & CB construantur triangula ADC & CDB in puncto D coëuntia: seu assumto vel determinato puncto D, ducantur rectæ AD, CD, BD.

Erit ADBC pyramis triangularis (§. 472).

PROBLEMA 5.

Tab. IX. Fig. 152. 513. *Rete describere, ex quo cubus construi possit.*

RESOLUTIO.

1. In rectam AB latus cubi quater transferatur.
2. In A erigatur perpendicularis AC lateri cubi AI æqualis (§. 249) & parallelogrammum AC BD compleatur (§. 339).
3. Intervallo lateris cubi determinentur quoque in CD puncta K, M & O.
4. Denique ducantur rectæ IK, LM, NO & BD, producanturque IK & LM utrinque in E & F atque in G & H, donec fiat EI = IK = KF & GL = LM = MH & agantur rectæ EG, FH.

DEMONSTRATIO.

CK & AI ad AC perpendiculares sunt *per constr.* & AI = CK = AC, *per constr.* Ergo ACKI quadratum (§. 338). Non absimili modo ostenditur esse IKML, ML NO &c. quadrata ipsi AK æqualia. Est itaque ADFG rete, ex quo cubus construi potest (§. 460). *Q. e. d.*

PROBLEMA 6.

514. *Rete describere, ex quo parallelepipedum construi potest.* Tab. IX. Fig. 153.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. In rectam BD transferatur ex B in H latitudo, ex H in I longitudo, ex I in K iterum latitudo, & ex K in D longitudo parallelepipedi.
2. Super his lineis tanquam basibus construantur parallelogramma AH, EI, FK & GD, quorum communis altitudo AB altitudini parallepipedi æqualis.
3. Super EF vero & HI construantur

antur parallelogramma EM & HO, quorum altitudo EL & HN latitudini parallepipedi æqualis (§.339).

Quoniam AEBH = GFIK, EHIF = GCKD, ELMF = HNOI (§.383); ex hoc reti parallelepipedum conſtruere licet (§. 463. 464). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA 7.

515. *Rete pro priſmate deſcribere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 154.

1. Conſtruatur baſis priſmatis e. gr. pro triangulari triangulum KBD.
2. Continuetur latus BD in A & E, donec fiat AB = BK & DE = DK.
3. Super AB, BD & DE conſtruantur parallelogramma AG, BH, DF, quorum altitudo AC altitudini priſmatis æqualis (§.339).
4. Denique ſuper GH triangulum GIH, ipſi BKD æquale (§. 205).

Ex hoc reti priſma triangulare, nec abſimili modo multangulare quodcunque conſtruetur (§.457).

THEOREMA 20.

Tab. IX. Fig. 155.

516. *Superficies cylindri recti ſeclusis baſibus æqualis eſt rectangulo ſub peripheria & altitudine cylindri.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus EF adeo parvus ut pro linea recta haberi poſſit, ducanturque rectæ EG & FH inter ſe parallelæ & ad EF perpendiculares. Quoniam etiam EF ipſi GH parallelus (§.465); erit EGHF rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera rectangula, ipſi EFGH æqualia reſolvitur, quorum communis altitudo eſt EG ſeu altitudo cylindri (§.229), baſes vero junctim ſumtæ peripheriæ æquantur. Ergo eadem æqualis eſt rectangulo ſub peripheria & altitudine cylindri (§.389). *Q. e. d.*

SCHOLION.

517. *Nimirum arculus in quolibet caſu tam exiguus aſſumitur, ut, ſi ejus differentia multiplicari ſupponatur per numerum partium, in quas peripheria concipitur diviſa, prodeat particula in dato caſu inaſſignabilis, adeoque contemtibilis parvitatis: quod fieri poſſe patet, quod polygonum circulo inſcriptum continuo appropinquat ad peripheriam. Et idem tenendum eſt in aliis caſibus, ubi de infinite parvo ſermo fuerit. Sed ex inſtituto ea de re dicimus in philoſophia prima.*

PROBLEMA 8.

518. *Rete pro cylindro deſcribere.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Eadem diametro describatur circulus AB & CD.
2. Inveniatur horum peripheria (§. 429). Tab. IX. Fig. 156.
3. Super BC altitudini cylindri æqualis construatur rectangulum (§. 339), ita ut CD sit peripheriæ inventæ æqualis.

Ex hoc reti construi potest cylindrus (§. 517).

THEOREMA 21.

Tab. IX. Fig. 157. 519. *Superficies coni recti seclusa basi æqualis est triangulo, cujus basis peripheria, altitudo latus coni.*

DEMONSTRATIO.

Si arcus LM infinite parvus adeoque a recta non differens; triangulum KLM pro rectilineo recte habetur, cumque angulus K sit infinite parvus; anguli L & M a rectis non differunt (§. 240), estque adeo KM ad LM perpendicularis (§. 78), consequenter trianguli KML altitudo (§. 228). Sed coni recti superficies in innumera istiusmodi triangula inter se æqualia resolvitur (§. 467. 251). Ergo integra coni recti superficies æqualis est triangulo, cujus altitudo lateri, basis peripheriæ coni æqualis (§. 389). *Q.e.d.*

COROLLARIUM.

520. Superficies coni recti æquatur sectori circuli latere coni tanquam radio descripti, cujus arcus peripheriæ coni æqualis (§. 415), adeoque ad suam peripheriam eam rationem habet, quam diameter basis ad latus coni (§. 412 *Geom.* & §. 167 *Arithm.*).

PROBLEMA 9.

521. *Rete pro pyramide describere.*

RESOLUTIO.

Sit e. gr. construenda pyramis triangularis. Tab. IX. Fig. 158.

1. Radio AB describatur arcus BE & ei applicentur tres chordæ BC, CD & DE inter se æquales.
2. Super DC construatur triangulum æquilaterum DFC ducanturque rectæ AD & AC.

Ex hoc reti pyramis construi potest (§. 472).

SCHOLION.

522. *Si latera basis pyramidis DC, CF & DF inæqualia fuerint; evidens est fieri debere ED = DF & CB = CF. Nec adeo latet, quid factu opus sit, si basis fuerit polygonum sive regulare, sive irregulare.*

PROBLEMA 10.

523. *Rete pro Cono recto describere.*

RESOLUTIO.

1. Diametro basis AB describatur. Tab. IX. Fig. 159.

 cir-

circulus & diameter producatur in C, donec AC lateri coni æqualis fiat.

2. Quæratur ad 2 AC & AB in numeris determinatas, atque 360° numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm:*).

3. Radio CA ex centro C describatur arcus DE & ope instrumenti transportatorii fiat angulus DCE, consequenter arcus DE (§. 54) numero graduum invento æqualis.

Erit sector CDE cum circulo AB rete pro cono recto (§. 520).

COROLLARIUM.

524. Quodsi ex A in F transferatur latus coni truncati & radio CF arcus GH describatur, tandemque ad 360, numerum graduum arcus GH atque FC numerus quartus proportionalis quæratur & inde diameter circuli IF determinetur; habebitur rete pro cono truncato. Est enim CDBAE rete pro cono integro, CGFIH pro cono abscisso (§. 523): ergo DBEHIG pro truncato.

PROBLEMA 11.

525. *Rete pro Tetraëdro describere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 160. 1. Construatur triangulum æquilaterum DEF (§. 198).

2. Super singulis ejus lateribus construantur adhuc alia itidem æquilatera DAE, EBF & FCD (§. cit.).

Ex hoc reti tetraëdrum construi potest (§. 475).

COROLLARIUM.

526. Quodsi BC continuetur in H, donec fiat CH = FC, & ut in resolutione problematis construantur triangula æquilatera CHI, CGH, HLI, DCI (§. 198); ex reti octaëdrum construi potest (§. 475). Tab. IX. Fig. 161.

PROBLEMA 12.

527. *Rete pro Icosaëdro describere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur triangulum æquilaterum ABC (§. 198). Tab. X. Fig. 162.

2. In basi AB continuata fiat AB = BF = FG = GH = HD.

3. Per C agatur ipsi AB parallela CE (§. 258) & fiat AB = CI = IK = KL = LM = ME.

4. Ducantur rectæ CS per C & B, NT per I & F, OV per K & G &c.

5. Similiter ducantur aliæ rectæ YO per B & I, SP per F & K, TQ per G & L &c.

Dico ex hoc reti construi posse Icosaedrum.

DEMONSTRATIO.

Demonstrandum est, viginti triangula ACB, CBI, CIN, BSF, BIF,

BIF, IOK &c. æquilatera & inter se æqualia esse (§. 475): id quod sequenti ratione patescit. Quoniam CE parallela ipsi AD *per construct.* & AC ipsi BI (§. 257); erit $o = x$ & $m = n$ (§. 233), consequenter CAB = & ∽ CBI (§. 251) Eodem modo ostenditur esse CBI = & ∽ BIF = & ∽ FIK &c. Porro quoniam CI & BF sunt inter se æquales atque parallelæ *per constr.* erit NT parallela ipsi CS (§. 257), adeoque $y = u$ & $t = o$ (§. 233), consequenter CIN = & ∽ CBI (§. 251). Eodem modo ostenditur esse CBI = & ∽ IOK = & ∽ KPL &c. = & ∽ BSF = & ∽ FTG &c. Sunt itaque omnia triangula inter se æqualia & æquilatera. *Q. e. d.*

PROBLEMA 13.

Tab. X. Fig. 163. 528. *Rete pro dodecaëdro describere.*

RESOLUTIO.

1. Describatur pentagonum regulare (§. 352).
2. Applicata regula ad A & D ducantur rectæ AG & DE ipsi AB æquales.
3. Eodem modo ducantur AI & HC, BL & KD, BN & EM &c.
4. Intervallo lateris pentagoni fiat intersectio in Q ex G & L, in R ex N & O, in S ex H & F &c. ducanturque GQ & QL, NR & OR, HS & FS &c.
5. Eodem modo construantur pentagona reliqua *a, b, c, d, e, f.*

DEMONSTRATIO.

Demonstrandum est pentagona omnia esse regularia ipsique ABCDE æqualia (§. 475). Nimirum AB = GA = BL = GQ = QL, *per constr.* Cumque anguli u mensura sit arcus dimidius ABCD (§. 324), anguli vero pentagoni E similiter sit mensura dimidius arcus ABCD (§. 314); erit angulus u angulo pentagoni E æqualis (§. 141). Et quoniam eodem modo ostenditur, esse quoque angulum x angulo pentagoni æqualem; erit ABLQG pentagonum regulare (§. 352), idque ob latus commune AB ipsi AEDCB æquale (§. 177. 161). Eadem demonstratio cum de reliquis pentagonis valeat; evidens est, omnia & regularia, & inter se æqualia esse. *Q. e. d.*

PROBLEMA 14.

529. *Corpora Geometrica construere.*

RESOLUTIO.

1. Delineentur retia in charta ex-

 pluri

pluribus foliis compacta (§. 511 & seqq.).

2. Delineata exscindantur, resecta charta superflua juxta eorum perimetros.

3. Exscissa agglutinentur chartæ coloratæ.

Tab. IX. Fig. 160. 4. Hujus superfluum ita resecetur, ut partibus perimetri alternis margines quidam relinquantur, quemadmodum in reti tetraëdri indicavimus.

5. Singula retium intra perimetrum lineamenta, e. gr. EF, FD & DE in reti tetraëdri, scalpello profundius imprimantur, ut commode complicari queant latera perimetri solidi.

6. Denique retia complicentur & marginum ope conglutinentur.

THEOREMA 22.

530. *Cubus, Tetraëdrum, Octaëdrum, Dodecaëdrum & Icosaëdrum sunt corpora regularia, nec præter hæc quinque aliud possibile.*

DEMONSTRATIO.

Cubus sex quadratis, tetraëdrum quatuor, octaëdrum octo, icosaëdrum viginti triangulis regularibus, dodecaëdrum denique duodecim pentagonis regularibus inter se æqualibus terminatur (§. 460. 475). Sunt igitur hæc corpora regularia (§. 453). *Quod erat unum.*

In tetraëdro tres, in octaëdro quatuor, in icosaëdro quinque anguli plani trianguli regulais ad solidum efficiendum concurrunt (§. 523. 524. 525). Quoniam vero summa 6 istiusmodi angulorum est 360° (§. 243); triangulis regularibus nullum corpus præter illa tria contineri potest (§. 452). In cubo tres anguli quadrati solidum efficiunt (§. 511). Quare cum summa quatuor istiusmodi angulorum sit 360° (§. 98. 144); quadratis nullum corpus continetur nisi cubus. In dodecaëdro tres anguli pentagoni regularis solidum constituunt (§. 526). Quia vero summa quatuor est 432°, & summa trium in reliquis figuris regularibus 360° major (§. 345), ad anlum vero solidum constituendum minimum tres plani requiruntur (§. 447); pentagonis regularibus nonnisi dodecaëdrum, figuris vero plurium laterum nullum corpus terminari potest. Corpora igitur regularia nonnisi quinque sunt. *Quod erat alterum.*

CA-

CAPUT IV.

De

DIMENSIONE SOLIDORUM.

PROBLEMA 15.

531. *Superficiem ac soliditatem Cubi determinare.*

RESOLUTIO.

I. Cum superficies cubi ex sex quadratis æqualibus componatur (§. 460); latus cubi in seipsum ducatur & factum per 6 multiplicetur (§. 370).

Tab. X. Fig. 164. II. Quodsi idem factum in latus ducatur: prodibit soliditas cubi.

Sit e. gr. latus cubi AB 2° 7′ 4″.

AB = 274	Basis = 75076
274	AB = 274
1096	300304
1918	525532
548	150152
ABDC = 75076	Solidit. 20570824
6	
Superfic. 450456	

DEMONSTRATIO.

Cum mensuræ solidorum sint cubi, quorum latera perticæ, pedi, digito &c, æqualia (§. 477); soliditatem cubi determinaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, digiti &c. cubici in eo contineantur. Quodsi jam latus in partes quodcunque æquales divisum concipiamus, tot erunt cuborum ordines, quot in latere AB partes & in quolibet ordine totidem existent, quot in basi ACFE quadrata. Quare si basin ACFE, hoc est, factum ex latere cubi in seipsum (§. 370), per latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

532. Si latus cubi fuerit 10, erit soliditas 1000: si illud 12, hæc 1828. Quare cum pertica Geometrarum sit 10 pedum, pes 10 digitorum &c. (§. 25); pertica cubica est 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum &c. Hinc in exemplo nostro soliditas cubi est 20° 570′ 824″. Similiter cum pertica Rhenana sit 12 pedum, pes 12 digitorum; pertica cubica est 1728 pedum, pes cubicus 1728 digitorum. Quare si in nostro exemplo 20570824 dividas per 1728, quotus erit 11904′ & 712″. Quodsi 11904′ porro dividas per 1728; quotus erit 6° & 1536, adeoque habebis 6°, 1536′ & 712″.

SCHO-

SCHOLION.

533. *Patet adeo, quantum divisio mensuræ int 10 partes præstet divisione in 12.*

COROLLARIUM 2.

534. Cubi sunt in ratione triplicata laterum (§. 259 *Arithm.*) & æquales, si latera æqualia sint.

THEOREMA 23.

535. *Parallelepipeda, Prismata & Cylindri, quorum bases & altitudines æquantur, æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiantur hæc corpora planis eorum basibus parallelis secari in discos crassitiei quantumlibet exiguæ. Quoniam altitudines æquantur, *per hypoth.* ex uno tot disci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana sectionum basi parallelarum eidem æqualia (§. 463. 456. 466); bases vero illorum corporum inter se æquales sunt, *per hypoth.* etiam disci singuli unius corporis discis singulis alterius æquantur (§. 87 *Arithm.*), consequenter cum disci omnes simul sumti cum corporibus idem sint, corpora tota inter se æqualia sunt (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 16.

Tab. VIII. Fig. 142. 536. *Metiri superficiem ac soliditatem parallelepipedi.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur area parallelogrammorum ILMK, LMON & OMKP (§. 375. 387).
2. Addantur in unam summam & hæc multiplicetur per 2. Erit factum superficies parallelepipedi (§. 464).
3. Quodsi basis ILMK multiplicetur per altitudinem; prodibit soliditas ejusdem.

Sit e. gr. LM = 36′, MK = 15′, MO = 12′ & parallelepipedum rectangulum.

LM = 36	LM = 36	MK = 15
MK = 15	MO = 12	MO = 12
180	72	30
36	36	15
LIKM 540	LMON 432	MOKP 180

MO 12 LIKM 540
MOKP 180

1080
54 1152
2

Solid. 6°480′ 2°304′ Superficies.

DEMONSTRATIO.

De parallelepipedo rectangulo eadem valet demonstratio, qua in probl. 15 (§. 531) usi sumus. Cum vero obliquangulum æquetur rectangulo super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 535); ducta basi in altitudinem habetur quo-

quoque soliditas obliquanguli. *Q. e. d.*

THEOREMA 24.

537. *Planum diagonale AHFD dividit parallelepipedum ABDCEFG in duo prismata ADCEFH & ADBGFH inter se æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 165. Diagonalis AD dividit parallelogrammum CABD in duo triangula æqualia ACD & DBA (§. 337). Habent ergo prismata bases æquales. Quare cum DF perpendicularis ad DB (§. 462), sit etiam perpendicularis ad DA & DC, adeoque cum ad triangulum ADB, tum ad alterum ADC (§. 492. 494); eadem quoque erit utriusque altitudo DF (§. 227), & ipsa itidem æqualia sunt (§. 536). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

538. Est ergo prisma triangulare dimidium parallelepipedi super eadem basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA 17.

539. *Metiri superficiem ac soliditatem prismatis.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur basis (§. 392. 400. 402) & multiplicetur per 2.
2. Quærantur porro areæ parallelogrammorum prisma circumcirca terminantium & earum summa addatur facto antecedenti.

Ita prodibit superficies integra prismatis (§. 456). Tab. VIII.

3. Quodsi basis BAC per altitudinem CD multiplicetur; habebitur ejusdem soliditas. Fig. 140.

E. gr. Sit BC = $4^\circ 3' 2''$, AG = $3^\circ 5' 7''$
CD = $8^\circ 6' 9''$.

$\frac{1}{2}$BC = 216''	AC = 432''
AG = 357	CD = 869
1512	3888
1080	2592
648	3456
Basis 77112	ACDE 375408
CD 869	1126224
694008	2 ABC 154224
462672	Superfic. 1280448
616896	

$^\circ 670' 103'' 28$ Solidit.

DEMONSTRATIO.

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedi super dupla basi, sed ejusdem altitudinis (§. 539). Quodsi vero dupla basis, hoc est parallelogrammum multiplicetur per altitudinem; soliditas parallelepipedi prodit (§. 537). Ergo si simpla, hoc est, triangulum per ean-

eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedi dimidium, hoc est, prismatis soliditas habetur. Omnia prismata reliqua cum in triangularia resolvi possint; eorum quoque soliditas prodit, basi per altitudinem multiplicata. *Q. e. d.*

SCHOLION.

540. *In exemplo nostro assumsimus, prismatis basin esse triangulum regulare. Quodsi vero basis fuerit figura irregularis; parallelogramma lateralia inaequalia sunt, adeoque area uniuscujusque sigillatim invenienda.*

PROBLEMA 18.

Tab. VIII Fig. 143. 541. *Data diametro AB & altitudine cylindri CF; invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quaeratur peripheria baseos & basis ipsa (§. 429), haecque multiplicetur per 2.
2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodit est superficies seclusis basibus (§. 517).
3. Quare si eidem addatur factum antecedens; habebitur superficies integra.
4. Ducatur quoque basis in altitudinem. Factum erit soliditas cylindri.

E. gr. Sit $AB = 5^{\circ}6'$, $CF = 24^{\circ}6'$; erit

peripheria = 17584
CF = 24600

10550400
70336
35168

Sup. absq; Bas. 4325664″|00
Dupl. Bas. 492352

Superfic. $481^{\circ}80'16''$
Basis = 24617″6
CF = 2460

14770560
984704
492352

$6^{\circ}055'929''60$

DEMONSTRATIO.

Cum circulus aequalis sit triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius (§. 410); cylindrus aequalis erit prismati triangulari eandem cum ipso altitudinem & basin aequalem habenti (§. 520). Ejus ergo soliditas habetur, ducta basi in altitudinem (§. 539). *Q. e. d.*

THEOREMA 25.

542. *Pyramides & Coni super eadem basi & ejusdem altitudinis sunt aequales.* Tab. X. Fig. 156.

DEMONSTRATIO.

Sit ACB unum e triangulis, qui-

quibus terminatur pyramis una; ABD vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipsi AB parallela (§. 258), erit IK = LM (§. 226); adeoque ob CK = DM *per hypoth.* CI = DL (§. 91 *Arithm.*): EF vero & GH erunt latera planorum, quibus secantur pyramides basibus suis parallelorum. Jam cum sit △ CEF ∽ △ CAB & △ DGH ∽ △ DAB (§. 268); erit CI : CK = EF : AB & DL : DM = GH : AB (§. 396). Sed CI = DL & CK = DM, *per demonstr.* Ergo EF : AB = GH : AB (§. 167 *Arithm.*), consequenter EF = GH (§. 177 *Arithm.*). Jam si pyramides secantur planis basi parallelis, plana sectionum basi similia sunt (§. 474), consequenter planum, cujus latus est EF, erit ad basin ut EF^2 ad AB^2, & planum, cujus latus est GH, erit ad eandem basin ut GH^2 ad AB^2 (§. 406). Quare cum $EF^2 = GH^2$ *per demonstr.* planum, cujus latus est EF & planum, cujus latus est GH, ad basin eandem rationem habent (§. 168 *Arithm.*), consequenter plana ista inter se æqualia sunt (§. 177 *Arithm.*). Igitur & disci quantumlibet exiguæ crassitiei in eadem a basi distantia inter se æquantur. Quoniam itaque ob æquales altitudines *per hypoth.* ex una pyramide tot disci secari possunt, quot ex altera; pyramis una alteri æqualis sit necesse est (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodsi triangula ACB & ADB fuerint sectiones triangulares conorum; erunt EF & GH diametri circulorum basi communi parallelorum (§. 468), Cum adeo circuli isti æquales sint (§. 171), eodem quo ante modo demonstratur, conos æquales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 26.

543. *Prisma triangulare in tres pyramides æquales dividi potest.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam planum ACB parallelum plano ADE (§. 456), pyramides ABCF & DFEA habent altitudinem eandem (§. 498) atque bases ACB & DFE æquales (§. 457). Sunt ergo æquales (§. 543). Similiter cum BEFC sit parallelogrammum (§. 457), △ CFB = △ BFE (§. 337). Habent adeo pyramides ACBF & BEFA æquales bases. Quoniam vero hæ bases in eodem sunt plano, quod per se patet, & verticem communem Tab. X. Fig. 167

munem in A habent, ab eodem vero puncto sublimi A ad idem planum BEFC nonnisi unica perpendicularis duci potest (§. 488); pyramides istæ eandem quoque altitudinem habent, consequenter æquales sunt (§. 543). Quamobrem tres istæ pyramides inter se æquantur (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

544. *Si ex ligno paretur prisma & debita ratione secetur; demonstratio captui tyronum magis accommodatur. Immo ad bilancem æqualitas ponderum examinari & inde magnitudinis æqualitas colligi potest.*

COROLLARIUM 1.

545. Pyramis triangularis est tertia pars prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis.

COROLLARIUM 2.

546. Et quoniam multangulare quodvis in triangularia resolvi potest; quælibet pyramis est pars tertia prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 187 *Arithm.*).

COROLLARIUM. 3.

547. Quia conus pro pyramide infinitangula haberi potest & cylindrus pro prismate infinitangulo, conus pars tertia est cylindri super æquali basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA 19.

548. *Metiri superficiem ac soliditatem pyramidis & coni.*

RESOLUTIO.

Quæratur soliditas prismatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono basin habentis (§. 540. 542), inventaque per 3 dividatur: quotus erit soliditas pyramidis vel coni (§. 547. 548).

E. gr. Si soliditas prismatis fuerit 67010528‴, ut in probl. 17. (§. 540); erit soliditas pyramidis 22336770″. Si soliditas cylindri fuerit 605592960″ ut in probl. 18 (§. 542); erit soliditas coni 201864320.

Superficies pyramidis habetur, si tam basis ABC, quam triangulorum lateralium ACD, CBD, BDA areæ investigentur (§. 392) atque in unam summam colligantur. Tab. IX. Fig. 146

Coni denique recti superficies prodit, peripheria baseos in latus ejus dimidium ducta (§. 519) & basi, qui circulus est, eidem addita.

E. gr. Sit diameter coni NM = 56″, erit peripheria 17584‴, basis 246176″ (§. 429). Sit altitudo KL = 246″. Quoniam LM = $\frac{1}{2}$ NM = 28″ & KM² = KL² + LM² = 60516 + 784 = 61300 (§. 417); erit KM = 2475‴ (§. 269 *Arithm.*), consequenter superficies coni seclusa basi 2166020″ & hinc integra 2412196″. Tab. IX. Fig. 144.

PROBLEMA 20.

549. *Metiri superficiem ac soliditatem coni truncati; datis ejus altitudine CH & diametris basium AB & CD.* Tab. X. Fig. 168. n. 1.

RESO-

RESOLUTIO.

1. Datis diametris basium CD & AB inveniantur peripheriæ (§. 429).
2. Ad quadratum altitudinis CH addatur quadratum semidifferentiæ radiorum AH & ex aggregato extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*), ut habeatur latus AC.
3. Semisumma peripheriarum multiplicetur per latus AC.

Sit e. gr. AB = 8', CD = 6', CH = 10', erit AH = 1'

200 — 314 — 8''
8
2512''' periph. maj.
CH² = 100'
AH² = 1
AC² = 101
Ergo AC = 1005''' fere.
100 — 314 — 6'
6
1884''' Periph. min.
2512 Periph. maj.
4396 Summa.
2198 Semisumma.
1005 AC
10990
219800
2208990 Superfic. coni trunc.

DEMONSTRATIO.

Superficies coni truncati relinquitur, si superficies coni minoris ECD a superficie majoris AEB subtrahitur. Sed superficies minoris æquatur triangulo, cujus basis HI peripheria diametro CD descripta, altitudo MK, latus EC; superficies majoris vero triangulo, cujus basis NO peripheria diametro AB descripta, altitudo ML, latus AE (§. 519). Cum vero prior sit pars posterioris; illa ex hac subtracta, relinquitur pro superficie coni truncati trapezium parallelarum basium HION, cujus quidem bases HI & NO peripheriis diametris CD atque AB descriptis æquales sunt, altitudo KL vero latus AC existit. Habetur igitur superficies coni truncati semisumma dictarum peripheriarum in AC ducta (§. 400). *Q. e. d.* Tab. X. Fig. 168 n. 1. n. 2.

Demissa ex C perpendiculari CH ad diametrum AB, cum etiam sit axis EF ad eandem in cono recto perpendicularis (§. 467), erunt CH & EF parallelæ (§. 492). Quamobrem cum triangulum EAF secet duo plana parallela CD & AB *per hypoth.* erunt semidiametri CG & AF parallelæ (§. 499),

 con-

consequenter CG = HF (§. 226) & CH = FG (§. 238). Soliditatem adeo coni truncati inventurus.

1. Inferat (§. 268): ut differentia semidiametrorum AH ad altitudinem coni truncati CH, ita semidiameter major AF ad altitudinem coni integri FE, per probl. 33 Arithm. (§. 302 *Arithm.*) inveniendam.

2. Ex hac inventa subducat altitudinem coni truncati GF, ut relinquatur altitudo ablati EG.

3. Quærat soliditatem conorum CED & AEB (§. 549).

4. Denique illam ex hac auferat; residua erit soliditas coni truncati ACDB.

E. gr. Sint omnia, ut ante: erit FE = 40′, & hinc EG = 30′.

Periph. major	2512‴
$\frac{1}{4}$ AB	200
Basis maj.	502400
EF	4000
	2009600000
3	
Conus AEB	669866666$\frac{2}{3}$

Periph. min.	1884‴
$\frac{1}{4}$ CD	1$\frac{1}{2}$00
	94200
	1884
Bas. min.	282600
$\frac{1}{3}$ EG	1000
Con. CED	282600000
Con. AEB	669866666$\frac{2}{3}$
Con. trunc.	387266666$\frac{2}{3}$

THEOREMA 27.

550. *Sphæra æquatur pyramidi, cujus basis æqualis superficiei, altitudo autem radio sphæræ.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur superficies sphæræ in quadratula infinite exigua resoluta, quæ a planis non amplius diffident, & ex centro concipiantur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidens est sphæram constare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coëuntibus, quorum altitudines a radiis differunt quantitate inassignabili, hoc est, revera nulla, bases vero simul sumtæ superficiei sphæræ æquantur. Tota igitur sphæra recte habetur pro pyramide, cujus basis superficies, altitudo radius sphæræ. *Q. e. d.*

THE-

THEOREMA 28.

Tab. X. Fig. 163. 551. *Sphæra est ad cylindrum super æquali basi & ejusdem altitudinis ut 2 ad 3.*

DEMONSTRATIO.

Si quadratum ABCD cum quadrante DBC & triangulo ADC inscripto circa latus DC gyretur, ipsum quidem cylindrum (§. 465) quadrans hemisphærium (§. 470), triangulum conum (§. 476) describit. Altitudo horum corporum cum eadem sit nempe DC (§. 227); si ea in discos quantumlibet exiguæ crassitiei secentur, numerus eorum in omnibus idem erit. Sit jam EH semidiameter unius disci cylindri; erit EG semidiameter disci respondentis in hemisphærio, EF semidiameter disci in cono. Cum vero hi disci sint circuli, quod ex genesi patet (§. 131); erunt ipsi inter se ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 408), hoc est, cum sit ob parallelismum EH & CB *per hypoth.* EH = CB (§. 238) = CG (§. 40), atque ob CD : DA = EC : EF (§. 268) & CD = DA (§. 98), EC = EF, ut quadrata rectarum CG, EG & EC. Quare si discum coni a disco cylindri subtrahas, relinquitur discus sphæræ (§. 417). Idem cum valeat de singulis discis ex reliquis divisionibus emergentibus, soliditas sphæræ relinquetur soliditate coni ex soliditate cylindri subducta. Est vero Conus $\frac{1}{3}$ Cylindri (§. 547) Ergo sphæra duas ejusdem partes tertias continet. *Q. e. d.*

THEOREMA 29.

552. *Cubus diametri est ad sphæram propemodum ut 300 ad 157.*

DEMONSTRATIO.

Si diameter sphæræ 100, cubus ejus 1000000 (§. 531) & cylindrus eandem cum sphæra basin & altitudinem habens 785000 (§. 541), consequenter sphæra 157000 : 3 (§. 551). Est itaque cubus diametri ad sphæram ut 1000000 ad 1570000 : 3, hoc est, ut 300 ad 157 (§. 178 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

553. *Dico cubum diametri esse ad sphæram propemodum ut 300 ad 157. In demonstratione enim assumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam 100 : 314 (§. 426.).*

THEOREMA 30.

554. *Superficies sphæræ est quadrupla circuli radio sphæræ descripti.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam sphæra æqualis est pyramidi, cujus basis est superficies, altitu-

altitudo radius sphæræ (§. 551) superficies ejus habetur, si soliditas per tertiam semidiametri aut sextam diametri partem dividitur (§. 548). Est vero soliditas sphæræ factum ex $\frac{2}{3}$ Circuli maximi in diametrum (§. 551. 541). Quare si hoc factum per $\frac{1}{6}$ Diametri dividas, seu, quod perinde est, primum per diametrum, ut quotus sint $\frac{2}{3}$ circuli maximi, hoc est, circuli circa diametrum sphæræ descripti, (§. 210 *Arithm.*), & deinde per $\frac{1}{6}$ (§. 208. 210 *Arithm.*); erit quotus $\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. 243 *Arithm.*), hoc est quadruplus circuli maximi (§. 223 *Arithm.*). Sed idem est superficies sphæræ, *per demonstrata*. Ergo sphæræ superficies circuli maximi quadrupla. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

555. Area circuli maximi est factum ex peripheria ejus in quartam diametri partem (§. 429). Ergo quadruplum hujus circuli est factum ex peripheria in diametrum. Superficies ergo sphæræ habetur, peripheria in diametrum ducta, consequenter rectangulo æqualis est, cujus basis peripheria circuli radio sphæræ descripti altitudo, diameter sphæræ (§. 375).

PROBLEMA 21.

556. *Data diametro sphæræ, invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria circuli radio sphæræ describendi (§. 429).
2. Inventa ducatur in diametrum. Factum est superficies sphæræ (§. 556).
3. Hoc si porro multiplicetur per sextam diametri partem; prodibit sphæræ soliditas (§. 550. 540).

E. gr. Sit diameter 5600‴, erit

```
Periph. Circuli    17584''''
Diam.               5600
-------------------------
               10550400
               87920
-------------------------
Superf. Sphær.  984704''|00
                   560''
               ----------
                59082240
               4923520
               ----------
               551434240

 45         4
551434240( 91905706 2/3 Sol. Sphær.
666666666
```

Aliter.

1. Quæratur cubus diametri 175616000‴ (§. 531).
2. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum

cubum inventum 175616000''' numerus quartus proportionalis $91905706\frac{2}{3}$ (§. 302 *Arithm.*), qui erit soliditas sphæræ (§. 552).

SCHOLION.

557. *Segmenta sphæræ ac sectores inferius in Analysi facilius invenire docemus quam hoc loco fieri poterat.*

PROBLEMA 25.

558. *Metiri soliditatem ac superficiem quinque corporum regularium.*

RESOLUTIO.

Cubi soliditas investigatur per probl. 15. (§. 539.). Tetraëdrum cum sit pyramis & Octaëdrum pyramis geminata, icosaëdrum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, dodecaëdrum ex duodecim quinquangularibus constet, quarumbases in superficie icosaëdri & dodecaëdri sunt, vertices in centro coëunt(§.472.475); horum corporum soliditas habetur per probl. 19 (§.548). Superficies eorundem prodit, si area figuræ unius ex terminantibus ipsa quæratur (§. 392. & 402) & inventa per numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur, nempe pro tetraëdro per 4, pro hexaëdro seu cubo per 6, pro octaëdro per 8, pro dodecaëdro per 12, pro icosaëdro per 20 (§. 475).

PROBLEMA 23.

559. *Corporis irregularis cujuscunque soliditatem invenire.* Tab. X. Fig. 170.

RESOLUTIO.

1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo eique aqua aut arena superfundatur & altitudo aquæ seu arenæ AB notetur.
2. Corpore extracto, observetur denuo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC.
3. Subtrahatur AC ex AB, ut relinquatur BC.
4. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo, cujus basis ECGF, altitudo BC; ejus soliditas invenietur per probl. 16 (§. 536).

Sit e. gr. AB 8', AC 5'; erit BC 3'. Sit porro DB 12', BE 4'; erit soliditas corporis 144'.

SCHOLION 1.

560. *Quodsi corpus in aqualiculo istiusmodi commode deponi nequeat, e. gr. si statuam certo loco affixam dimetiri jubeamur; prisma quadrangulare aut parallelepipedum circa ipsum construi debet ex asseribus. Reliqua peragenda sunt ut ante.*

COROLLARIUM.

561. Inveniri ergo potest, quot linearum cubicarum sit aliquod lignum, saxum,

xum, metallum aut materia aliqua quæcunque pendens libram unam.

SCHOLION 2.

562. *Hinc in usus futuros construi potest Tabula gravitatem diversorum corporum ostendens secundum libras, quas pendit eorum pes cubicus: id quod per praxes hydrostaticas aliis adhuc modis fieri potest, uti suo loco ostendemus.*

PROBLEMA 24.

Tab. X. Fig. 171. 563. *Invenire soliditatem corporis cavi.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si corpus cavum in numero Geometricorum non contineatur, resolutio eadem, quæ problematis præcedentis (§. 600).

Casus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, prisma, cylindrus, sphæra, pyramis vel conus; soliditas primum totius corporis cavitate inclusa, dein cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram habere supponitur, per methodos supra traditas (§. 536. 539. 541. 548. 556) inveniatur: hac enim ex ista subducta, relinquitur soliditas corporis cavi.

Sit e. gr. soliditas cylindri cavi AB CD invenienda, sitque diameter totius corporis AB $56''$, longitudo AC $2^{\circ}\,4'\,6''$; erit soliditas cylindri inclusa cavitate $605'592''960'''$. Sit diameter cavitatis $500'''$; erit soliditas $482'775''000'''$: quæ ex supra inventa subducta relinquit soliditatem corporis cavi $122'817''960'''$.

CAPUT IV.

De

SIMILITUDINE AC RATIONE SOLIDORUM.

THEOREMA 31.

564. *Corpora similia sunt, quorum plana terminantia & numero æqualia & similia existunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum corpora ex planorum terminantium concursu gigni posse concipiamus; eodem modo determinantur, si plana terminantia & numero æqualia fuerint & similia (§. 119). Sunt igitur & ipsa similia (§. 120). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

565. Cum in planis similibus anguli

guli.

guli homologi sint æquales (§. 175), anguli vero solidi homologi ex concursu planorum homologorum (§. 446) & in corporibus similibus multitudine æqualium oriantur (§. 564); in corporibus similibus anguli solidi homologi æquales sunt (§. 449).

COROLLARIUM 2.

Tab. X. Fig. 165. 566. Quoniam in planis similibus latera homologa sunt proportionalia (§. 175); si e. gr. juxta parallelepipedum ABDCEHGF aliud simile abdcehgf (quod in tabula non expressimus) poni imaginemur, erit AB : BD = *ab* : *bd* & DB : BG = *db* : *bg*. Quamobrem ex æquo AB : BG = *ab* : *bg* (§. 194 *Arithm.*). Cum adeo sit AB : *ab* = BD : *bd* & AB : *ab* = BG : *bg* (§. 173 *Arithm.*); corporum similium longitudines AB & *ab*, latitudines DB & *db*, itemque altitudines BG & *bg* in eadem ratione existunt.

COROLLARIUM 3.

567. Cubus sex quadratis æqualibus terminatur (§. 460). Sunt vero quadrata omnia similia (§. 98. 175). Ergo cubi omnes sunt similes (§. 564).

COROLLARIUM 4.

568. Quoniam corpora regularia planis regularibus, adeoque similibus (§. 106. 175) & ejusdem quidem speciei numero æqualibus (§. 530) terminantur; corpora quoque regularia ejusdem speciei similia sunt (§. 564).

COROLLARIUM 5.

569. Omnia igitur Tetraëdra, omnia quoque Octaëdra, Dodecaëdra & Icosaëdra similia sunt (§. 530).

THEOREMA 32.

570. *Cylindrorum & Conorum similium altitudines sunt ut radii basium; axes sunt itidem ut radii basium & iis sub eodem angulo junguntur.*

DEMONSTRATIO.

Si Coni & Cylindri similes sunt, ea in iisdem eadem sunt, per quæ a se invicem discerni possunt (§. 24 *Arithm.*). Patet vero Conos & Cylindros non posse distingui nisi per rationem axis CF vel KL ad diametrum basis DE vel NM atque angulum CFE vel KLM, quem efficit axis cum diametro (§. 465 467). Axes igitur in Conis & Cylindris similibus ad diametros basium eandem rationem habent & ad eas similiter inclinantur, seu ad eundem angulum insistunt. *Quod erat unum.* Tab. VIII. Fig. 143. IX. Fig. 144.

Cum in figuris solidis perinde ac in planis (§. 228) altitudo sit recta ex vertice in basin ad angulos rectos ducta; in Conis & Cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 465. 467), adeoque patet *per demonstrata* altitudines tum esse diametris basium proportionales. Et quoniam in ceteris altitudines

in triangulis rectangulis subtendunt eosdem angulos obliquos, sub quibus nempe axes ad diametros inclinantur; ideo axibus (§. 252), consequenter etiam diametris basium (§. 167 *Arithm.*) proportionales sunt. *Quod erat alterum.*

THEOREMA 33.

Tab. IX. Fig. 145.

571. *Omnis sphaera est alteri similis.*

DEMONSTRATIO.

Omnem semicirculum esse alteri similem, patet ex demonstratione theorematis 2 part. 1 (§. 135). Sed sphaera describitur semicirculo K circa diametrum AB gyrato (§. 459): omnes igitur sphaerae eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similes sunt (§. 120). *Q. e. d.*

THEOREMA 34.

572. *Omnia prismata, parallelepipeda, cylindri, pyramides & coni sunt in ratione composita basium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut facta ex basibus in altitudines (§. 536. 539. 541. 548 *Geom.* & §. 178 *Arithm.*): ergo in ratione composita basium & altitudinum (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

573. Quare si bases fuerint aequales, altitudinum; si altitudines, basium rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

574. Cylindrorum & conorum bases sunt circuli (§. 465. 467). Circuli sunt in ratione duplicata diametrorum (§. 409). Ergo cylindri & coni quicunque sunt in ratione composita ex simplici altitudinum & duplicata diametrorum (§. 572); & si fuerint aeque alti, ut quadrata diametrorum (§ 573).

COROLLARIUM 3.

575. Quare si in cylindris altitudo fuerit diametro basium aequalis; erunt in ratione triplicata diametrorum basium (§ 159 *Arithm.*).

PROBLEMA 25.

576. *Invenire cubum dato corpori, cujus soliditas inveniri potest, aequalem, vel qui sit ad hoc in data quacunque ratione, e. gr. ut 3 ad 1, vel ut 1 ad 4.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur soliditas corporis per problemata *cap. praec.* tradita.
2. Ex ea vel ejus multiplo aut submultiplo desiderato, e. gr. triplo aut subquadruplo extrahatur radix cubica (§. 282 *Arithm.*), quae erit latus cubi desiderati (§. 531 *Geom.* & §. 248 *Arithm.*).

E. gr.

E. gr. Sit soliditas cylindri 107°171′875″; reperietur latus cubi æqualis 4°7′5″.

PROBLEMA 26.

577. *Dato corpore, cujus soliditas inveniri potest, invenire dimensiones alterius ipsi æqualis dati generis & altitudinis vel baseos.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur soliditas corporis per problemata *cap. præc.* tradita.
2. Dividatur per basin datam: quotus erit altitudo in prismatis, parallepipedis & cylindris (§. 536. 539. 541 *Geom.* & §. 210 *Arithm.*), tertia vero altitudinis pars in pyramidibus atque conis (§. 548 *Geom.* & §. *cit. Arithm.*).
3. Si altitudo detur, soliditas corporis inventa dividatur per eam, ut habeatur basis prismatum, parallelepipedorum & cylindrorum; per tertiam altitudinis partem, ut habeatur basis pyramidum & conorum (§§. *cit.*).
4. Pro parallelepipedis & prismatis triangularibus & quadrangularibus area baseos discerpatur in factores duos, ut habeatur longitudo & altitudo (§. 387. 392. 402. 456. 462), quorum alteruter pro basi triangulari prismatis per 2 multiplicanda (§. 392) & insuper pro multangularis basi alter per numerum laterum dividendus, ut prodeat latus figuræ polygonæ (§. 402).
5. Pro Cylindro & cono ex basi inventa porro quærenda ejus diameter (§. 434).

E. gr. Sit soliditas alicujus corporis 3°456′978″. Inveniri debet cylindrus, cujus altitudo 2°4′6″. Reperietur basis 1°40′53″ fere; diameter 134″.

THEOREMA 35.

578. *Corpora similia, prismata, parallelepipeda, cylindri, pyramides atque coni sunt in ratione triplicata homologorum laterum, itemque altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim in ratione composita basium & altitudinum (§. 572). Sed bases sunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 406. 570) & altitudines lateribus basium homologis proportionales sunt (§. 566). Ergo corpora ipsa in ratione triplicata laterum homologorum, itemque altitudinum, existunt (§. 150 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 36.

579. *Sphæræ sunt ut cubi diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. * Sit circulo DAEB quadratum GFIH circumscriptum (§. 351). Quodsi semicirculus AEB cum quadrato dimidio AGHB circa axem communem AB in orbem moveatur, ille sphæram, hoc cylindrum describet, cujus altitudo AB diametro basis IH æqualis (§. 470. 465). Quare si ponamus circulum adhuc alium cum quadrato similiter circumscripto; quoniam ex theorematis 2 part. 1. demonstratione constat (§. 135), omnem semicirculum esse alteri similem, & AB ad BH utrobique est ut 1 ad 2, adeoque rectangulum unum alteri simile (§. 175); inde generabitur sphæra & cylindrus alteri similis (§. 119. 120). Cum adeo ea utrobique coincidant, per quæ a se invicem distingui debebat, quod in utroque casu gignitur (§. 24 *Arithm.*); erit cylindrus unus ad suam sphæram ut alter ad suam (§. 132 *Arithm.*), consequenter sphæræ sunt inter se ut isti cylindri (§. 173 *Arithm.*). Habent ergo rationem triplicatam diametrorum (§. 575) hoc est, ut cubi earundem existunt (§. 259 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 37.

580. *Æqualia parallelepipeda, prismata, cylindri, coni & pyramides reciprocant bases & altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si enim hæc corpora fuerint æqualia, facta ex basibus in altitudinem æqualia sunt (§. 536 &c.). Quamobrem altitudo corporis A est ad altitudinem alterius B uti reciproce basis ipsius B ad basin ipsius A (§. 299 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 38.

581. *Cylindrus, cujus altitudo æqualis est diametro baseos, est ad cubum diametri ut 785 ad 1000.* Tab. X. Fig. 172. n. 1.

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100, erit basis 7850 (§. 429). Et quoniam altitudo DC = AB, *per hypoth.* soliditas cylindri 785000 (§. 541). Sed cubus diametri AB = 1000000 (§. 531). Ergo Cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

CA-

CAPUT V.

De

STEREOMETRIA DOLIORUM.

PROBLEMA 27.

582. *Virgulam construere, cujus ope haud difficulter invenitur numerus mensurarum fluidi alicujus, e.gr. vini, cerevisiæ &c, in vase cylindrico contenti.*

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. 172. n. 1. 2. 1. Diameter vasis cylindrici AB DE uni mensuræ, qua ad fluida mensuranda utimur, æqualis A B jungatur lineæ indefinitæ A7 ad angulos rectos (§. 249).

2. Ex A transferatur in 1 rectæ AB æqualis; erit B 1 diameter vasis, quod duas mensuras capit, sed eandem cum vase priori altitudinem habet.

3. Fiat A2 = B1, erit B2 diameter vasis tres mensuras capientis, sed ejusdem denuo altitudinis cum vase, quod nonnisi unam capit. Eodem modo inveniuntur diametri valorum capaciorum A4, A5, A6, A7 &c.

4. In unum virgulæ latus transferantur divisiones inventæ A1, A2, A3, A4 &c. in alterum vero altitudo cylindri uni mensuræ æqualis, quoties fieri potest. Ita virgula constructa est.

Aliter.

Diametri A2, A3, A4, A5, A6, A7 &c. etiam per calculum inveniri in numeris & in particulis diametri A B per modum scalæ Geometricæ divisæ (§. 277) centesimis aut millesimis determinari possunt. Sit nempe diameter A B = 1000; erit ejus quadratum 1000000. Ex hujus duplo extracta radix quadrata (§. 269 *Arithm.*) erit A 2. Si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix extrahatur; prodibunt diametri A 3, A 4, A 5 &c. quem in usum constructa est tabula sequens:

Mens.	Diam.	Mens.	Diam.	Mens.	Diam.
1	1.000	17	4.123	33	5.744
2	1.414	18	4.242	34	5.831
3	1.732	19	4.359	35	5.916
4	2.000	20	4.472	36	6.000
5	2.236	21	4.582	37	6.082
6	2.449	22	4.690	38	6.164
7	2.645	23	4.796	38	6.244
8	2.828	24	4.898	40	6.324
9	3.000	25	5·000	41	6.403
10	3.162	26	5.099	42	6.480
11	3.316	27	5.196	43	6.557
12	3.464	28	5.291	44	6.633
13	3.605	29	5.385	45	6.708
14	3.741	30	5.477	46	6.782
15	3.873	31	5.567	47	6.855
16	4.000	32	5.650	48	6.928

DEMONSTRATIO.

Cylindri eandem altitudinem habentes ſunt inter ſe ut quadrata diametrorum (*§.* 574). Ergo quadratum diametri vaſis duas, tres, quatuor &c. menſuras capientis eſt duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vaſis menſuram nonniſi unam capientis. Quare ſi inde radices extrahantur, habebuntur in reſolutione altera diametri ipſæ (*§.* 246 *Arithm.*). Quoniam vero in prima AB = A1, erit ipſius B1 quadratum duplum, quadratum ipſius B2 triplum, quadratum ipſius B3 quadruplum &c. quadrati ipſius A1 (§. 417). Unde denuo patet eſſe rectas A2, A3, A4 &c. diametros vaſorum quæſitas. Quodſi itaque has diviſiones ad diametrum vaſis cylindrici applices; illico conſtabit, quot menſuras capiat vas cylindricum eandem cum iſto baſin, ſed altitudinem illius habens, quod unam menſuram capit. Quare ſi porro ope alterius diviſionis in virgula factæ inveſtiges, quoties altitudo unius menſuræ in altitudine vaſis dati contineatur & per hunc numerum diametrum modo inventam multiplices; prodibit numerus menſurarum cavitatem vaſis dati adimplentium. *Q. e. d.*

SCHOLION 1.

583. *E. gr. Sit diameter vaſis cylindrici* 8, *altitudo* 12; *erit numerus menſurarum, quas capit,* 96.

SCHOLION 2.

584. *Altitudo cylindi menſuram unam capientis quo minor aſſumitur, eo diameter baſis fit major. Unde tam ipſa, quam diametri cylindrorum plures menſuras capientium poſtea facilius in ſuas minutias ſubdividuntur.* Bayerus (c) *ſuadet, ut altitudo nonniſi unius digiti aſſumatur.*

SCHOLION 3.

585. *Inveniuntur autem diametri vaſorum*

(c) in der vollkommenen Visierkunst c. 25. p. 126.

ſorum unam vel plures partes decimas menſuræ capientium, ſi decima vel plures decimæ partes vaſis, unam menſuram capientis, dividantur per hujus altitudinem, ut habeatur baſis cylindri circularis (§. 541): etenim hac data diameter habetur per probl. 58 (§. 434). Eodem modo inveniuntur diametri pro ſcrupulis vaſorum duas & plures menſuras capientium.

SCHOLION 4.

586. *Quodſi altitudo vaſis conſtanter eadem retineatur, diametri pro menſuris integris earumque partibus decimalibus hac ratione inveniuntur. Sit e.gr. diameter unius menſuræ* 1 *ſeu* 1000 *partium decimalium; erit ejus quadratum* 1000000*: cujus pars decima* 100 000. *Inde extracta radix quadrata* 316 *continet partes decimales diametri unius menſuræ, quæ conveniunt diametro cylindri decimam menſuræ partem continentis, ejusdem tamen cum cylindro integram menſuram capiente altitudinis. Si ex duplo hujus decimæ nempe* 200000 *radix extrahatur; prodit diameter baſis* $\frac{2}{10}$ *unius menſuræ capientis* 447 *& ita porro. Quodſi quadrato diametri unius menſuræ* 1000000 *adjicias partem decimam* 100000 *& ex ſumma extrahas radicem quadratam* 1.049; *erit ea diameter vaſis, quæ capit* $1\frac{1}{10}$ *menſuræ. Ratio patet per demonſtrationem problematis præſentis. Atque ſic patet, quomodo virgula pithometrica accuratius conſtrui poſſit, ut intervalla inter menſuras integras ſubdividantur in partes decimales.*

Diametri pro menſuris integris & earum partibus decimalibus.

0.1	316	3.0	1.732	6.0	2.449	9.0	3.000
2	447	1	1.761	1	2.469	1	3.016
3	548	2	1.788	2	2.489	2	3.033
4	632	3	1.816	3	2.509	3	3.049
5	707	4	1.844	4	2.529	4	3.066
6	775	5	1.871	5	2.549	5	3.082
7	837	6	1.897	6	2.569	6	3.098
8	894	7	1.923	7	2.588	7	3.114
9	949	8	1.949	8	2.607	8	3.130
		9	1.975	9	2.626	9	3.146
1.0	1.000	4.0	2.000	7.0	2.645	10.0	3.162
1	1.049	1	2.025	1	2.664	1	3.178
2	1.095	2	2.049	2	2.683	2	3.194
3	1.140	3	2.073	3	2.702	3	3.210
4	1.183	4	2.097	4	2.720	4	3.226
5	1.225	5	2.121	5	2.738	5	3.241
6	1.265	6	2.145	6	2.756	6	3.256
7	1.304	7	2.168	7	2.774	7	3.271
8	1.342	8	2.191	8	2.792	8	3.286
9	1.378	9	2.214	9	2.810	9	3.301
2.0	1.414	5.0	2.236	8.0	2.828	11.0	3.316
1	1.449	1	2.258	1	2.846	1	3.331
2	1.483	2	2.280	2	2.864	2	3.346
3	1.517	3	2.302	3	2.881	3	3.361
4	1.549	4	2.324	4	2.898	4	3.371
5	1.581	5	2.345	5	2.915	5	3.391
6	1.612	6	2.366	6	2.932	6	3.406
7	1.643	7	2.387	7	2.949	7	3.421
8	1.673	8	2.408	8	2.966	8	3.436
9	1.703	9	2.429	9	2.383	9	3.451

SCHOLION 5.

587. *Ceterum me non monente patet, cylindrorum menſuram hic conſtitui cylindrum, quemadmodum ſupra ſolidorum omnium menſura aſſumtus eſt cubus. Unde & virgula pithometrica ſic conſtructa* virga cylindrica *appellatur. Similiter hic circulorum menſura conſtitu-*

stituitur circulus, sicuti supra omnium superficierum mensura quadratum.

PROBLEMA 28.

588. *Invenire soliditatem dolii, hoc est, determinare numerum mensurarum, quas capit.*

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. 173. 1. Virga pithometrica vi probl. præc. (§. 583) decenter applicata, exploretur tam longitudo dolii AC, quam utraque diameter GH & AB.

2. Cum experientia non invita, rigore licet geometrico repugnante, dolium pro cylindro habeatur, cujus basis inter fundum & ventrem dolii media æquidifferens; inter AB & GH quæratur numerus medius æquidifferens (§. 348 *Arithm.*), qui *diameter æquata* dici solet.

3. Numerus inventus multiplicetur per longitudinem dolii AC, erit factum *vi demonstrationis probl. præced.* (§. 583) numerus mensurarum, quas capit dolium.

Sit e. gr. AB = 8 AC = 15.
GH = 12 ½AB + GH 10

erit AB + GH = 20 capac. dolii 150 mensf.

½(AB + GH) = 10

SCHOLION 1.

589. *Quodsi contingat, fundum non esse perfecte circularem, sed unam diametrum esse altera longiorem, utramque diametrum metiri & earum semisummam pro diametro circuli fundo dolii æqualis assumere solent.*

SCHOLION 2.

590. *Tabulæ, ex quibus inter se coaptatis dolia construi solent, ultra fundum prominent. Pro longitudine igitur dolii non assumenda est recta FE, sed AC, quæ habetur, si quantitas prominentiæ tabularum una cum ejus dimidio, cui fundi crassities æqualis supponitur, a recta FE utrinque subtrahitur. Solent autem quantitates subtrahendas creta notare utrinque in ipsa superficie dolii, e. gr. in K, si quantitas subtrahenda fuerit IK. Eum in finem peculiarem virgulam parant, in partes minutas æquales divisam.*

SCHOLION 3.

591. *Alios decepturi ex tabulis in medio gracilibus, circa extrema crassis & orbibus ligneis pariter crassis dolium construunt: qua fraus non facile detegitur.*

SCHOLION 4.

592. *Possemus equidem soliditatem cavitatis dolii eodem modo explorare, quo supra corpora cava metiri docuimus (§. 563): si enim per soliditatem unius mensuræ divideretur, prodiret dolii capacitas. Enimvero prolixitas calculi obstat, quo minus ea methodo utantur.*

SCHOLION 5.

593. *Prostat etiam methodus, qua sine ullo calculo capacitas dolii invenitur. Utuntur ea in Batavia & variis Germa-*

Germaniæ locis. Sed cum ſupponat, omnia dolia eſſe inter ſe ſimilia & longitudinem duplam diametri æquatæ, hoc eſt, ſemiſummæ diametrorum AB & GH; non tuto ubique adhibetur. Keplerus (d) *illam omnibus reliquis præfert, quia omnes cautelas menſorum in ſe continet.* Virga enim, *inquit*, introrſum immiſſa eliminat craſſitiem tabularum, circulorum qui vincula ſunt, viminumque quibus circuli lignei ſtringuntur. Eliminat & exceſſum marginum, quorum in crenis hærent orbes. Hoc autem ratio alia menſurandi una eademque opera præſtare nulla poteſt. *Unde ad privatorum ſecuritatem fraudesque eliminandas ſuadet*, ut lex illa dolii conſtruendi, quæ tertia parte longitudinis tabularum jubet deſcribere circulum orbium ligneorum magiſtratuum autoritate diligentiaque conſervetur, pœnisque & proſcriptione vaſorum, quæ hanc figuram non habent, vindicetur. *Ea nimirum proportio in doliis Auſtriacis obſervatur.*

SCHOLION 6.

594. *Sunt, qui aſſumunt, dolium ex duobus conis truncatis componi, & ejus ſoliditatem per probl.* 20 (§. 549) *quærunt. Alii cum aliis corporibus Geometricis id comparant.* Clavius (e) *alia pro duobus conis truncatis, alia pro fruſto ſphæroidis Archimedeæ habet, quoad prius conſentiente, quoad poſterius vero contradicente* Keplero. (f) Clavio *tamen aſſentitur* Oughtredus *eumque in finem regulam a ſe inventam propoſuit* (g). Walliſius *pro fruſto fuſi parabolici habet* (h). *Enimvero cum methodus propoſita praxi ſatis reſpondeat, reliquæ vero, quæ ab Anglis potiſſimum proponuntur,* (i) *utut ex profundiori Geometria derivatæ, moleſtiores ſint nec ex Elemeutis Geometriæ demonſtrari poſſunt; illa contenti eſſe poſſumus. Pauca attamen adhuc dicemus de Virgæ menſoriæ a* Keplero *tantopere deprædicatæ fabrica.*

PROBLEMA 29.

595. *Conſtruere virgulam pithometricam, qua ſine calculo capacitatem dolii explorare licet.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 172. n. 1.

1. Cum vaſa, pro quibus virga hæc paratur, eſſe debeant cylindri, quorum altitudo DC æqualis diametro AB, ſi fiat ut 785 ad 1000 ita ſoliditas unius menſuræ ad numerum quartum proportionalem, per probl. 29 (§. 302 *Arithm.*) inveniendum; reperietur cubus diametri cylindri unam menſuram capientis (§. 581).

2. Inde ergo ſi extrahitur radix cubica

(d) in Stereometria doliorum vinariorum part. 3. art. 3. f. n. 3. (e) Geom. pract. lib. 5. c. 10. Tom. II. Oper. f. 145. (f) in Stereometria part. 2. fol. H 3. (g) in Clave Mathematica c. 19. p. m. 103. (h) in Algebra c. 81. Vol. II. Oper. f 350. (i) vid. The general Gauger by Mr. Dougharty p. 141 & ſeqq.

cubica (§. 282 *Arithm.*); prodibit diameter vaſis cylindrici menſuram unam capientis.

3. Jam cum vas illud habeat altitudinem AE vel CD diametro AB æqualem & diagonalis BE aſſumatur pro indice capacitatis *per hypoth.* ſi ex duplo quadrati diametri modo inventæ AB extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*); prodibit index vaſis BE menſuram unam capientis (§. 417).

4. Ut porro inveniantur diagonales ſimilium vaſorum, quæ capiunt menſuras duas, tres, quatuor &c. tenendum eſt, ea eſſe ut cubos diametrorum (§. 578), conſequenter etiam ob ſimilitudinem triangulorum, quale ABE (§. 183), ut cubos diagonalium (§. *cit.* & §. 260 *Arithm.*). Quare ſi diagonalis vaſis unam menſuram capientis concipiatur in 1000 partes diviſa & ex cubi 1000000000 duplo 2000000000, triplo 3000000000: quadruplo 4000000000 &c. extrahantur radices cubicæ (§. 282 *Arithm.*); prodibunt diagonales vaſorum, quæ duas, tres, quatuor &c. menſuras capiunt.

5. Denique longitudo diagonalis primæ transferatur in virgulam & una dividatur in 1000 partes æquales (§. 277): ita enim ex parata hac ſcala particulas milleſimas diagonalibus reliquis competentes in virgulam transferre licet.

Quoniam itaque dolium in præſente caſu habetur pro cylindro gemino, cujus altitudo æqualis eſt ſemiſummæ diametrorum orbis AB & ventris GH eſtque FB = ½ (AB + GH), adeoque GB diagonalis in cylindro, cujus diameter ſemiſumma diametrorum AB & GH; capacitas ejus ſtatim innoteſcit, ſi per orificium G virgula usque ad B detrudatur. *Q. e. i. & d.* Tab. X. Fig. 173.

SCHOLION 1.

596. *Conſtructioni virgulæ itaque inſervit Tabula ſequens.*

Menſ.	Diag.	Menſ.	Diag	Menſ.	Diag	Menſ.	Diag
1	1000	16	2519	31	3141	46	3583
2	1259	17	2571	32	3174	47	3608
3	1442	18	2620	33	3207	48	3634
4	1587	19	2668	34	3239	49	3659
5	1709	20	2714	35	3271	50	3683
6	1817	21	2758	36	3301	51	3708
7	1912	22	2802	37	3332	52	3732
8	2000	23	2843	38	3361	53	3756
9	2080	24	2884	39	3391	54	3779
10	2154	25	2924	40	3419	55	3802
11	2223	26	2962	41	3448	56	3825
12	2289	27	3000	42	3476	57	3848
13	2351	28	3036	43	3503	58	3870
14	2410	29	3072	44	3530	59	3892
15	2466	30	3107	45	3556	60	3914

SHO-

SCHOLION 2.

597. Virgula *hæc* cubica *appellari solet, quemadmodum præcedens* cylindrica. *Et facile ad alia dolia similia construitur, in quibus longitudo dimidia GF fuerit ad diametrum æquatam FB in quacunque ratione, modo in cylindro unam mensuram capiente altitudo AE ad diametrum AB in eadem fuerit.*

PROBLEMA 30.

598. *Virgam pithometricam construere ad determinandam quantitatem fluidi in dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Assumatur dolium aqua plenum, cujus capacitas jam cognita & numerus mensurarum e. gr. per 20 aut numerum alium minorem vel majorem dividatur, prout dolii capacitatem in partes majores vel minores dividi commodum visum fuerit.
2. Tab. IV. Fig. 81. Dolio beneficio libellæ Q ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, virga per orificium ventris intrudatur, donec fundum dolii attingat.
3. Ea quantitate fluidi ex dolio emissa, quæ numero mensurarum per divisionem paulo ante n. 1. invento respondet, in virgula notetur decrementum altitudinis in fluido, quod exprimit totius capacitatis partem vigesimam.
4. Eodem modo notabis decrementum altitudinis, reliquis particulis vigesimis quantitatis fluidi in dolio contenti respondens.
5. Horum decrementorum intervallis in una virgulæ facie notatis; altera dividitur in partes quotcunque minutas inter se æquales, ultra vigesimarum intervalla inæqualia continuandas, e. gr. in 200 aut plures.

Ita virga pro dolio non pleno metiendo constructa est.

SCHOLION.

599. *Quodsi in usum domesticum pro eodem dolio istiusmodi virgulam parare volueris, sufficit decrementorum intervalla in una ejus facie notari, nec opus est faciei alterius in partes æquales divisione. Decrementa quoque altitudinis fluidi notantur numeris, qui quantitati ex dolio emissæ responderit, e. gr. si integrum dolium capiat 64 mensuras & una effluxerit, in fine decrementi altitudinis scribitur 63.*

PROBLEMA 31.

600. *Determinare quantitatem fluidi in dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur capacitas totius dolii *per probl. 28.* (§. 588).
2. Dolio libellæ beneficio ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, ne scilicet fluidum in- Tab. X. Fig. 173.

in una dolii parte altius ſit, quam in altera, virga per problema præcedens (§. 599) parata per orificium dolii G intrudatur, donec fundum in H attingat.

3. Ea rurſus extracta notetur, quot partes in facie æqualium vino madidæ ſint.

4. Hinc inferatur: ut numerus partium æqualium in altera virgulæ facie profunditati totius dolii GH reſpondentium ad numerum ſimilium partium altitudini fluidi LH convenientium, ita numerus earundem partium, quæ intervallo ſcrupulorum vigeſimorum congruunt, ad numerum quartum proportionalem *per probl. 33. Arithm.* (§. 302) inveniendum.

5. Capiatur circino intervallum tot partium æqualium in virga, quot numerus inventus exprimit & transferatur in ſcalam ſcrupulorum vigeſimorum, noteturque eorum numerus, quæ ipſi congruunt.

6. Per hunc dividatur numerus menſurarum, quas dolium integrum capit: quotus erit numerus menſurarum, quas fluidum in dolio contentum replere poteſt. *Q. e. i*

F. gr. ſit GH 160, HL 58, numerus partium æqualium, quæ integro ſcrupulorum vigeſimorum intervallo congruunt, 120, capacitas denique dolii 128 menſurarum.

Fiat:	160 —	58 —	120	~~1~~2	
40)	4	3	3	~~1~~~~7~~4 (	$43\frac{1}{2}$
		174		~~4~~~~4~~	

Ponamus partibus $43\frac{1}{2}$ æqualibus reſpondere in ſcala inæqualium $\frac{4}{20}$ ſive $\frac{1}{5}$. Quodſi itaque 128 per 5 dividas, quotus $25\frac{3}{5}$ numerum menſurarum indicabit, quas fluidum in dolio contentum replere poteſt.

SCHOLION.

601. *Si dolia omnia eſſent ſimilia, per methodum propoſitam ſatis accurate inveniretur quantitas fluidi in dolio non pleno: ſed in diſſimilibus eadem exacte reperiri hac ratione nequit. Nondum autem inventa eſt methodus, & rigori geometrico ſatisfaciens & praxi reſpondens. Quam enim* Keplerus *dedit* (k), *ea nec demonſtrativa, nec praxi adaptata. Unde neque ipſi ſatisfacit. Et quamvis aliam poſtea eidem ſubſtituerit* (l); *ſatis tamen intricata eſt. Intricatiores adhuc ſunt, quas* Bayerus (m) *&* Dougharty (n) *tradunt.*

(k) in Srereometria Doliorum f. O 2. b. (l) in dem Auszuge der uhralten Messe-Kunst Archimedis §. 88 f. 95. (m) in Conometriæ Mauritianæ c. 9 p. 102 & ſeqq. (n) the General gauger p. 164 & ſeqq.

FINIS.

Elementorum Geometriæ.

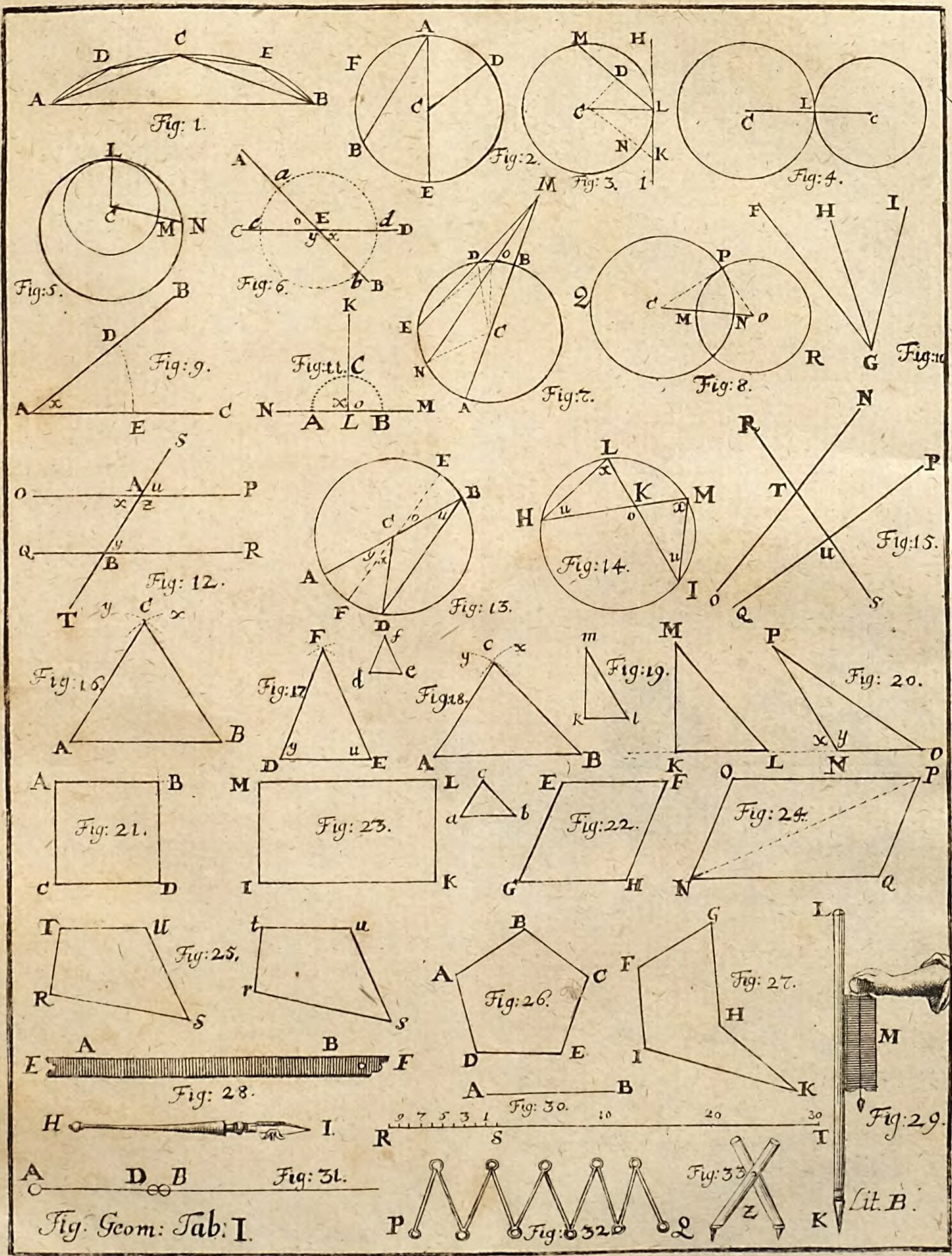
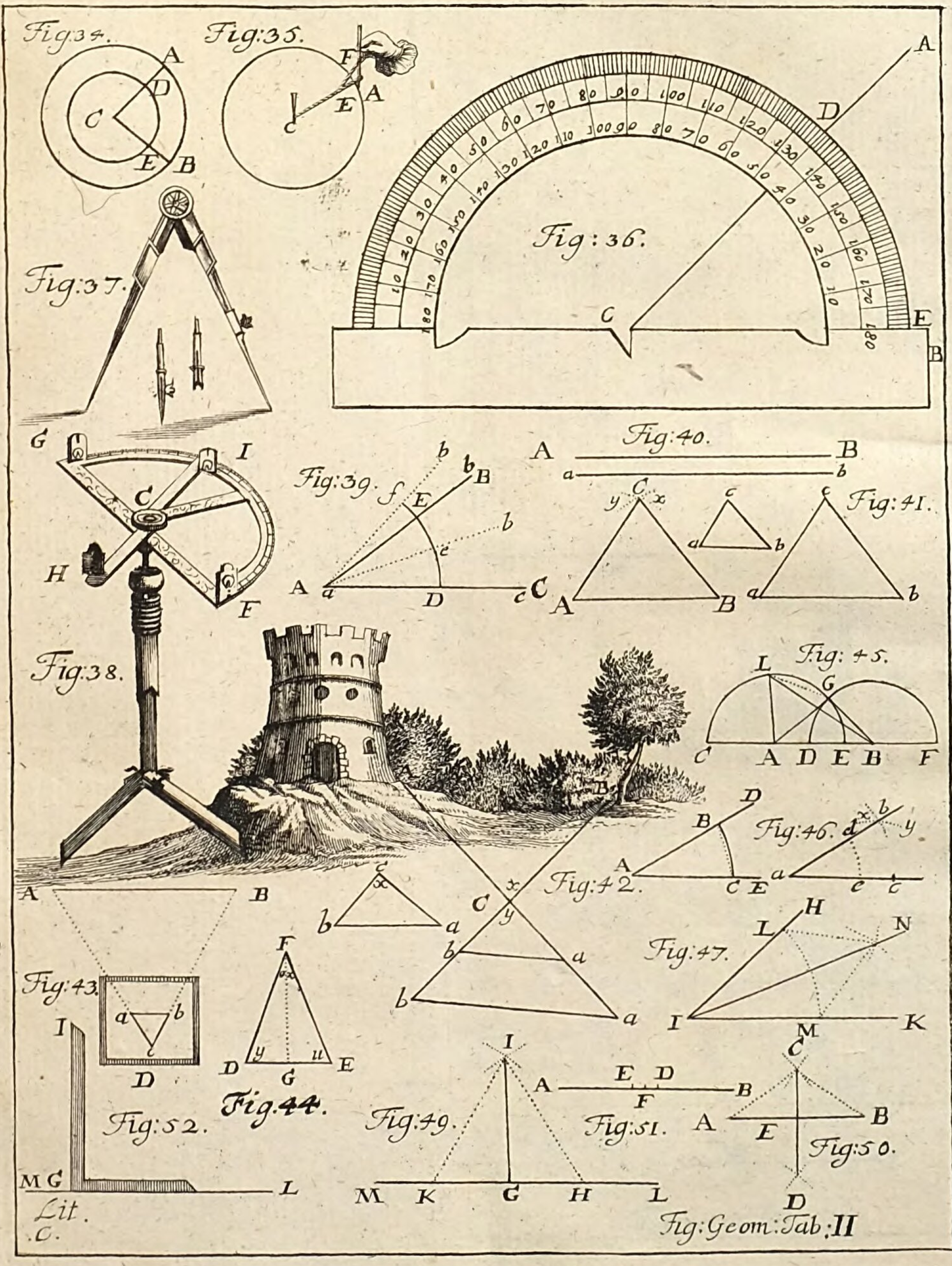


Fig. Geom: Tab: I.


Fig:34.
Fig:35.
Fig:36.
Fig:37.
Fig:38.
Fig:39.
Fig:40.
Fig:41.
Fig:42.
Fig:43.
Fig.44.
Fig:45.
Fig:46.
Fig:47.
Fig:49.
Fig:50.
Fig:51.
Fig:52.
Lit. C.
Fig: Geom: Tab: II

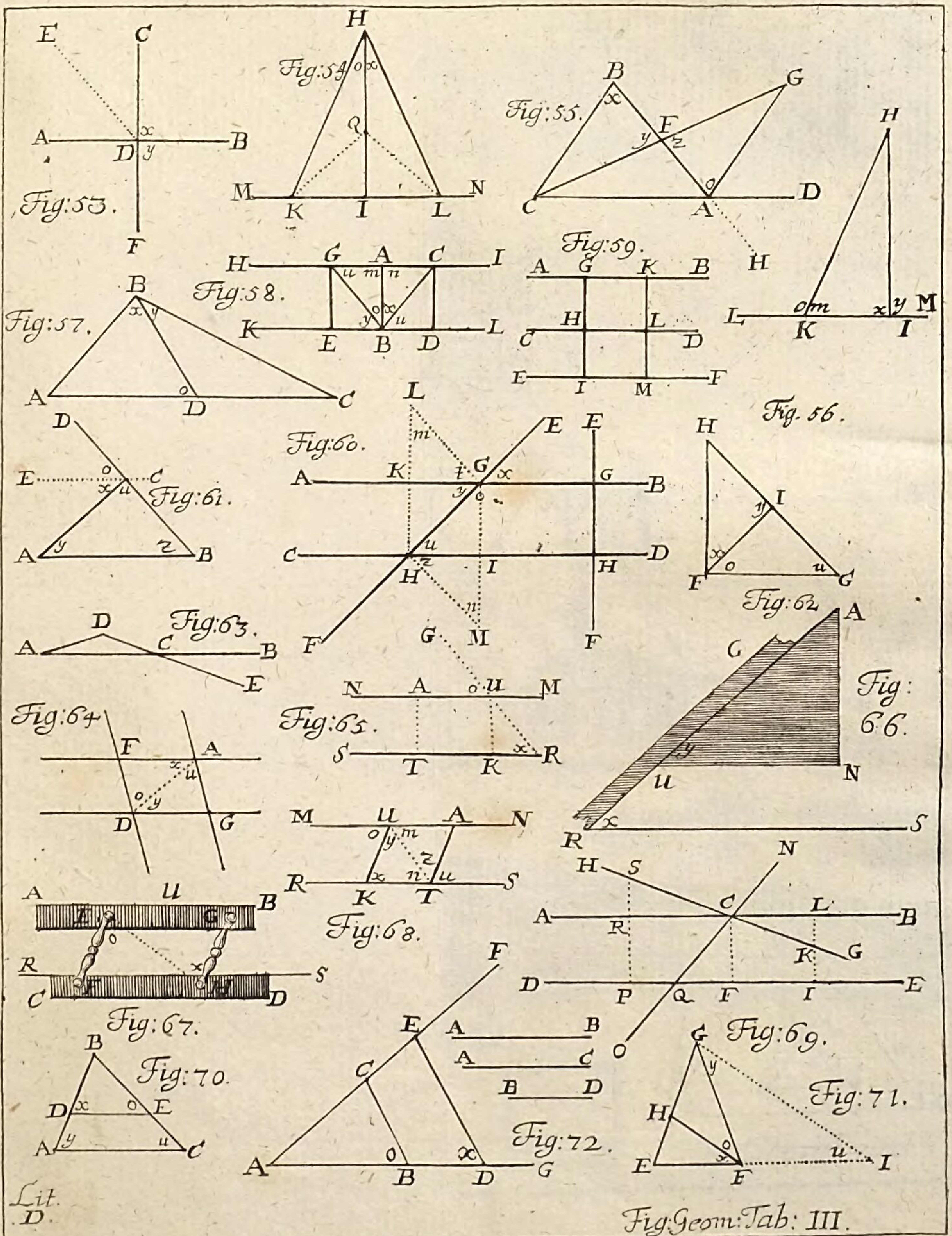


Fig:Geom:Tab: III.

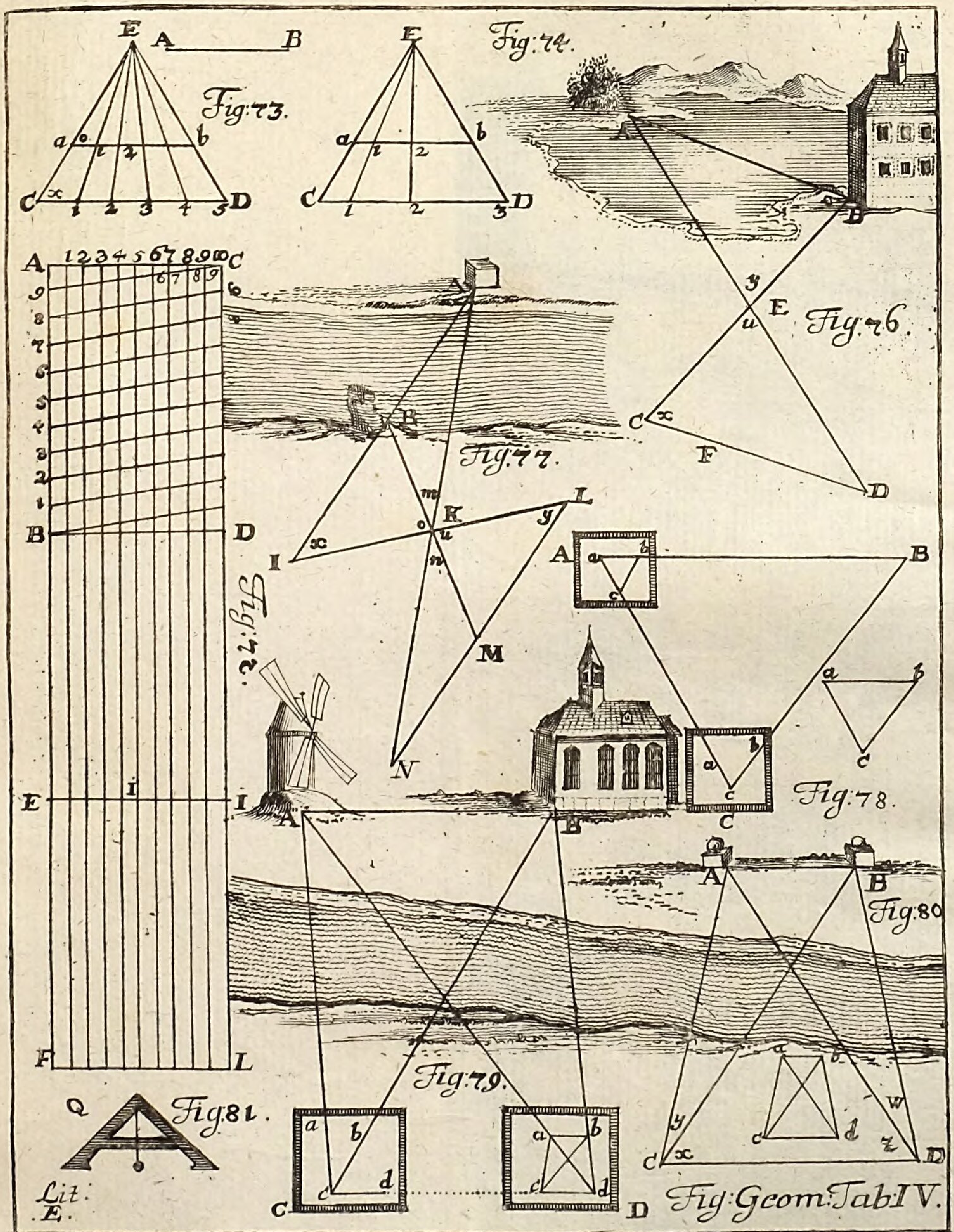
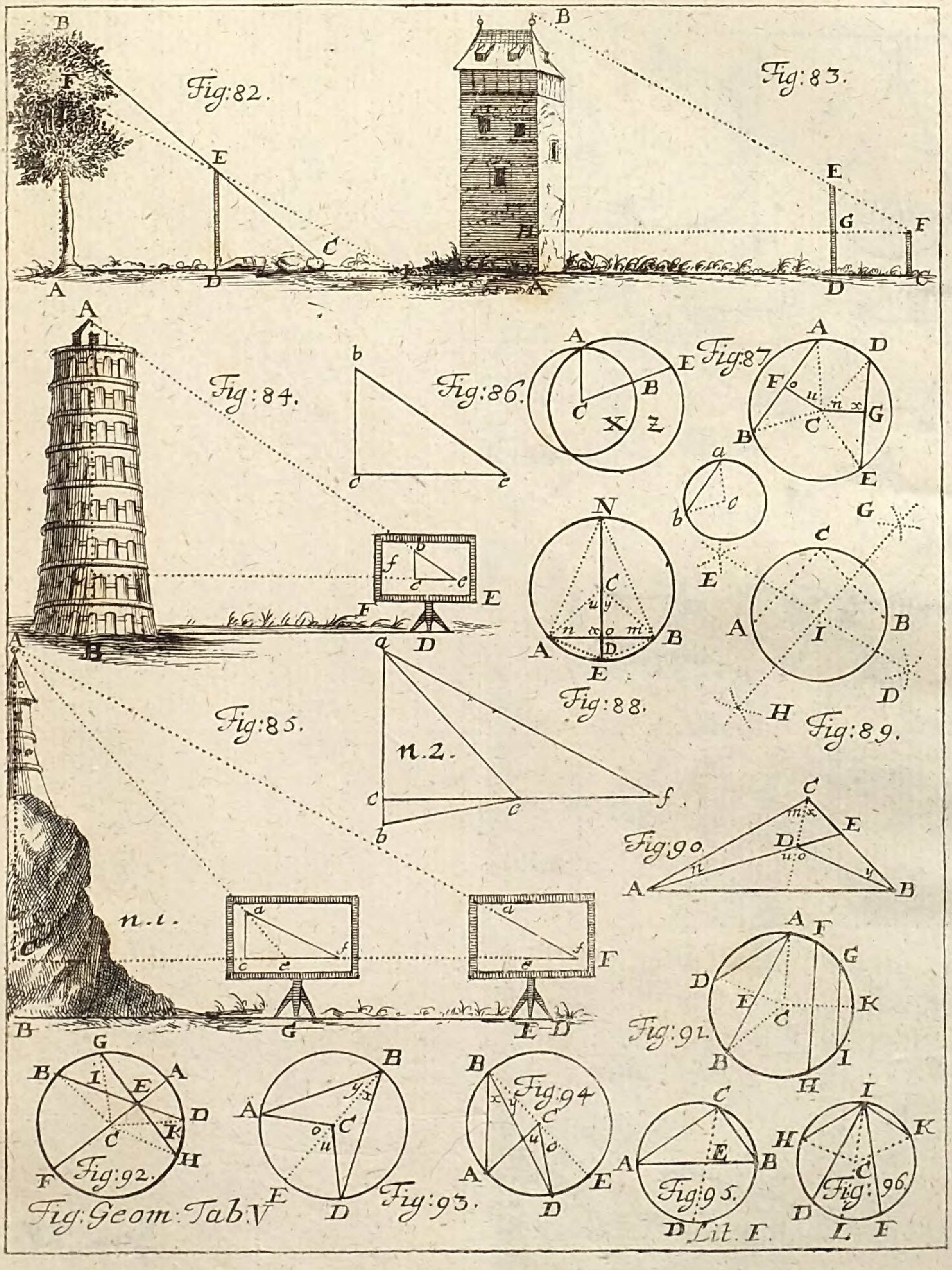


Fig: Geom: Tab IV.


Fig:82.
Fig:83.
Fig:84.
Fig:85.
n.1.
n.2.
Fig:86.
Fig:87
Fig:88.
Fig:89.
Fig:90
Fig:91.
Fig:92.
Fig:93.
Fig:94
Fig:95.
Fig:96.
Lit. F.
Fig: Geom: Tab. V

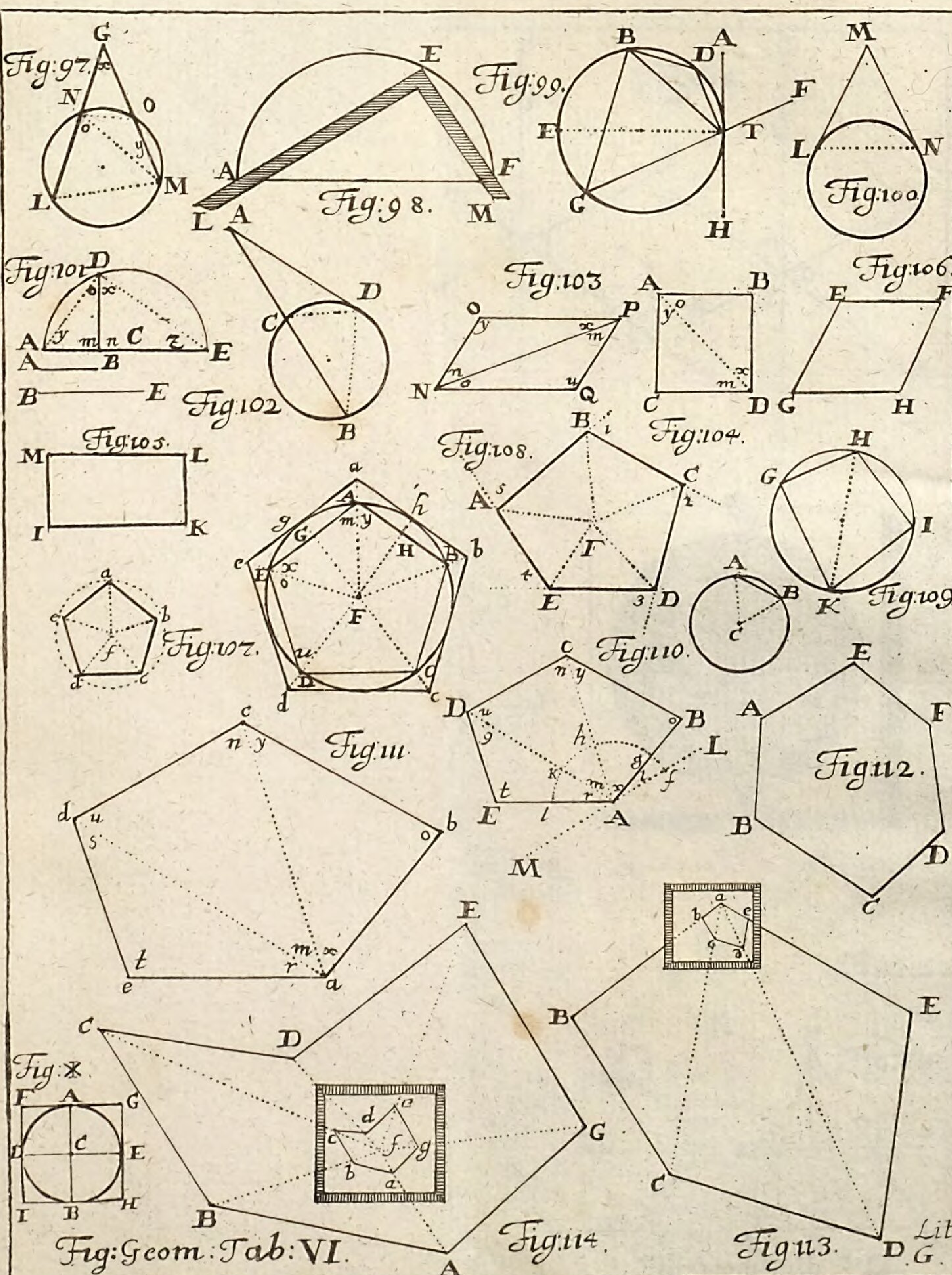


Fig: Geom: Tab: VI.

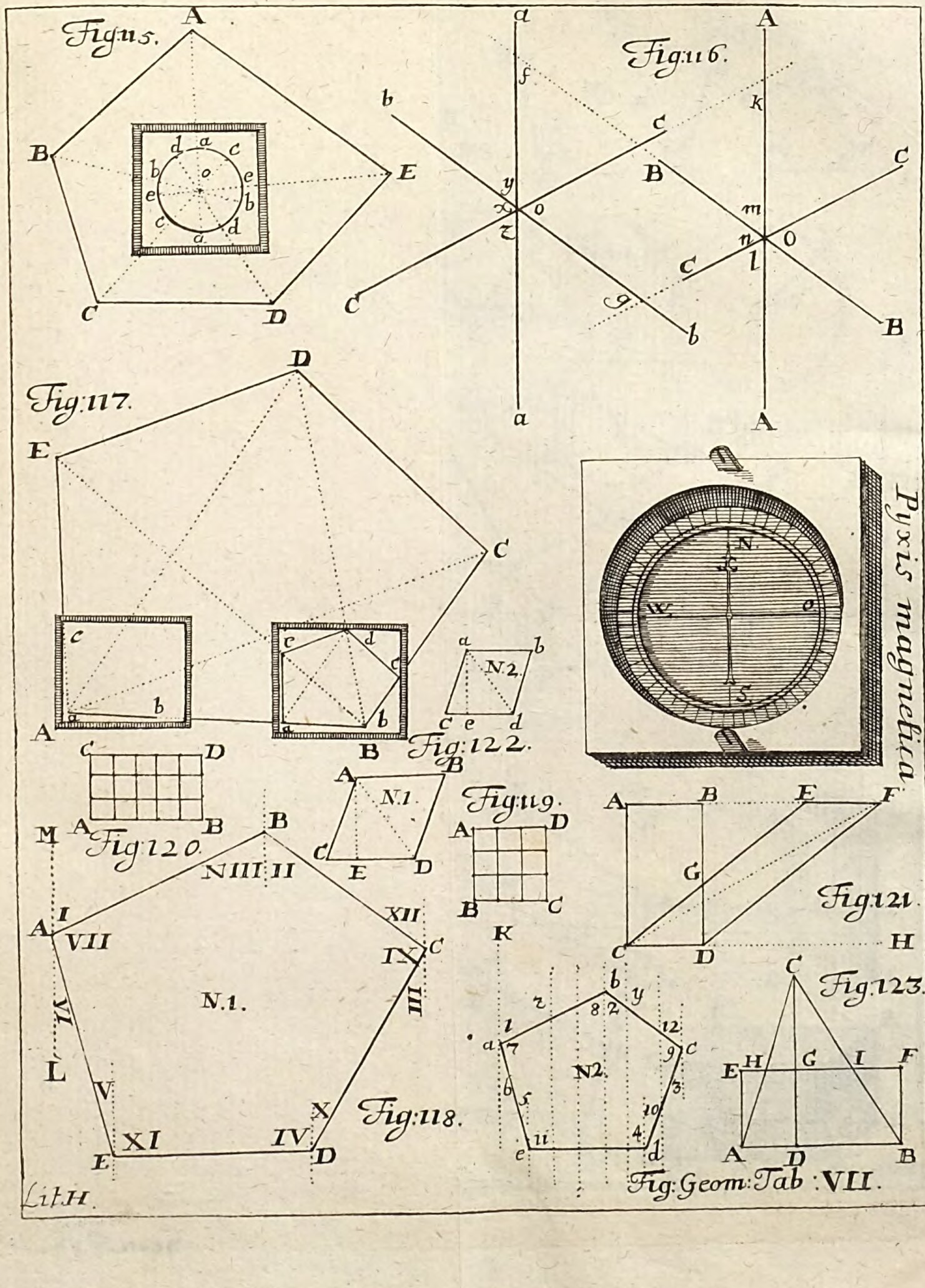


Fig: Geom: Tab: VII.

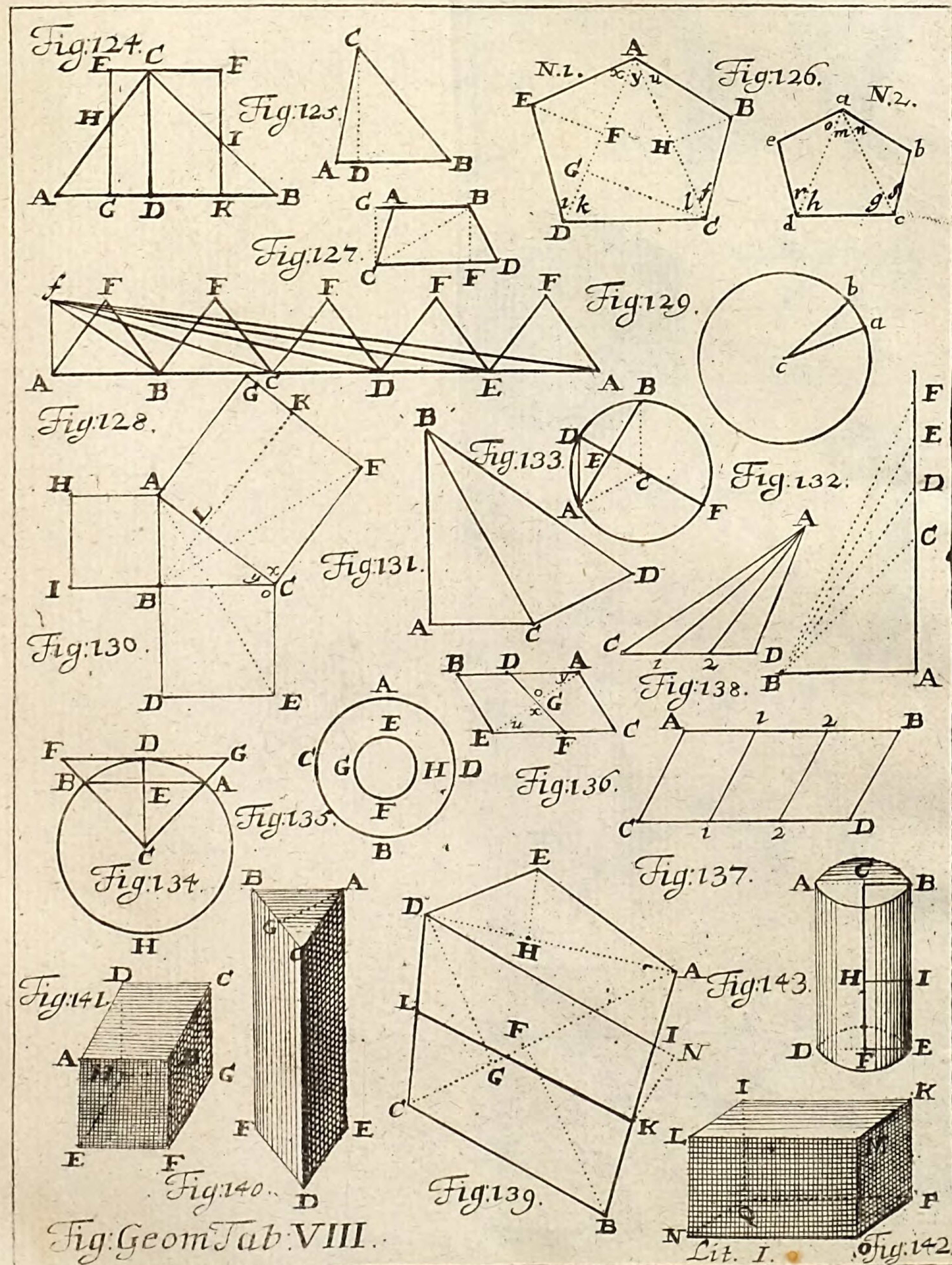
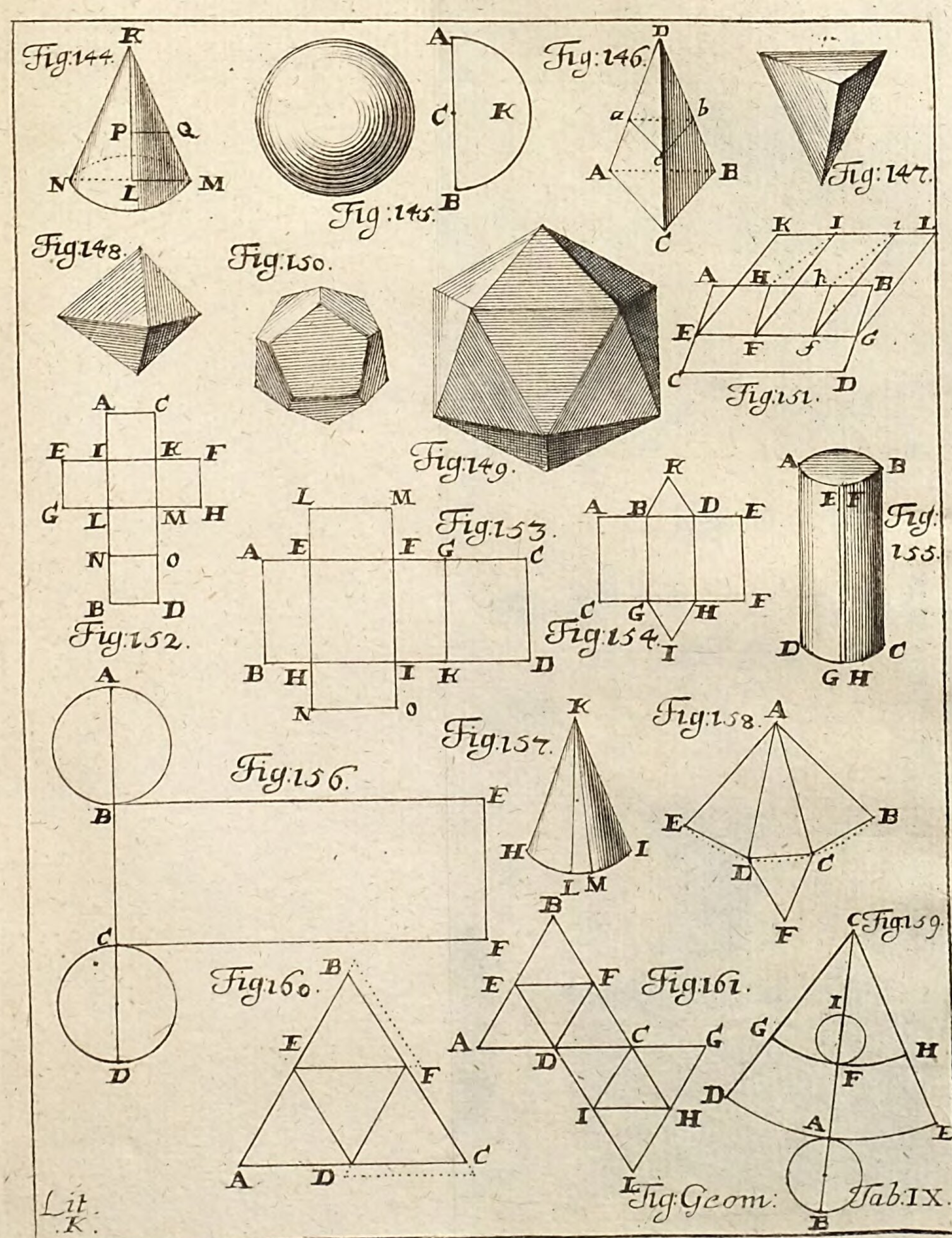


Fig: Geom Tab: VIII.


Fig:144.
Fig:145.
Fig:146.
Fig:147.
Fig:148.
Fig:149.
Fig:150.
Fig:151.
Fig:152.
Fig:153.
Fig:154.
Fig:155.
Fig:156.
Fig:157.
Fig:158.
Fig:159.
Fig:160.
Fig:161.
Lit. K.
Fig: Geom: Tab. IX.

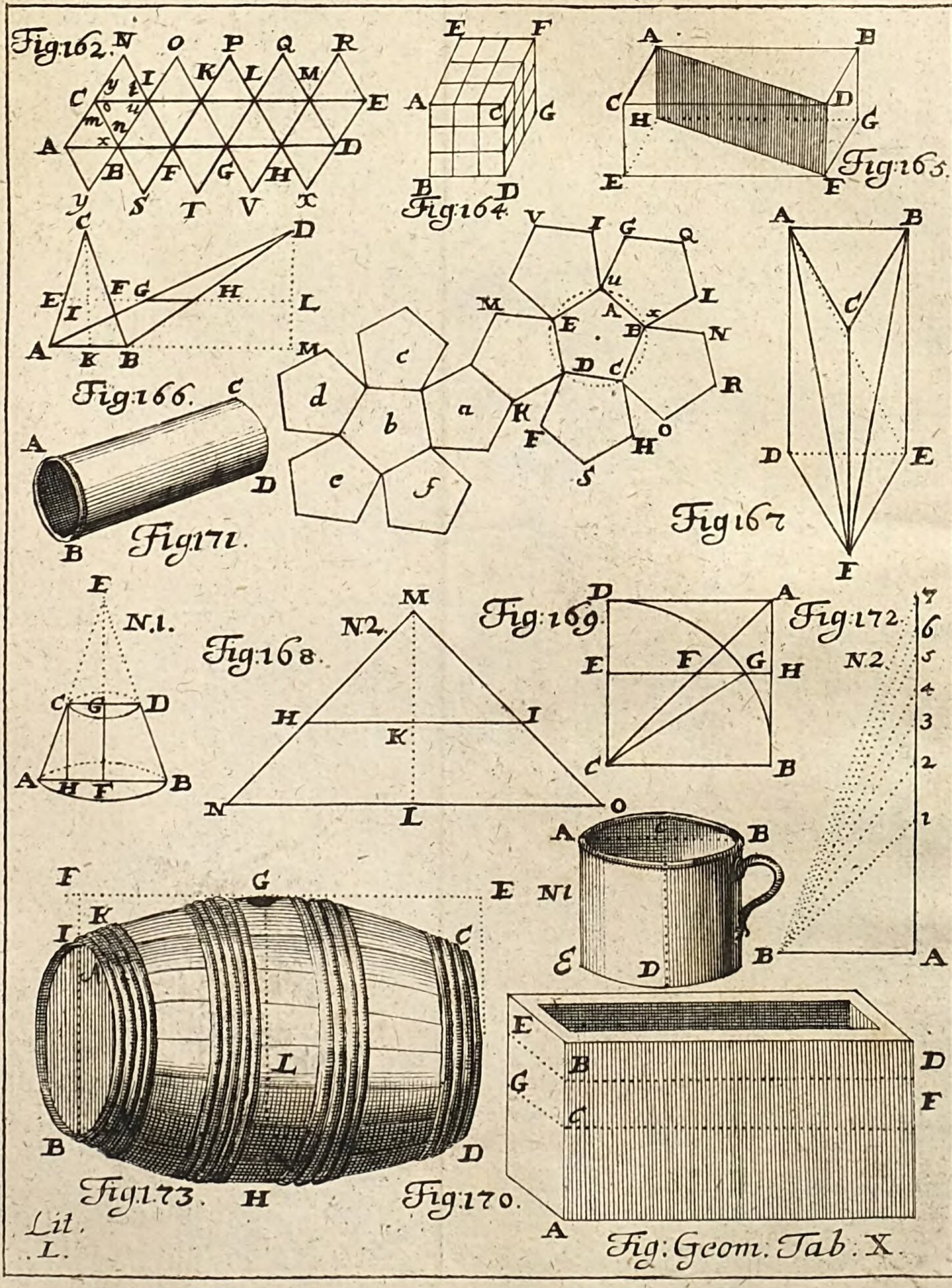


Fig: Geom: Tab: X.

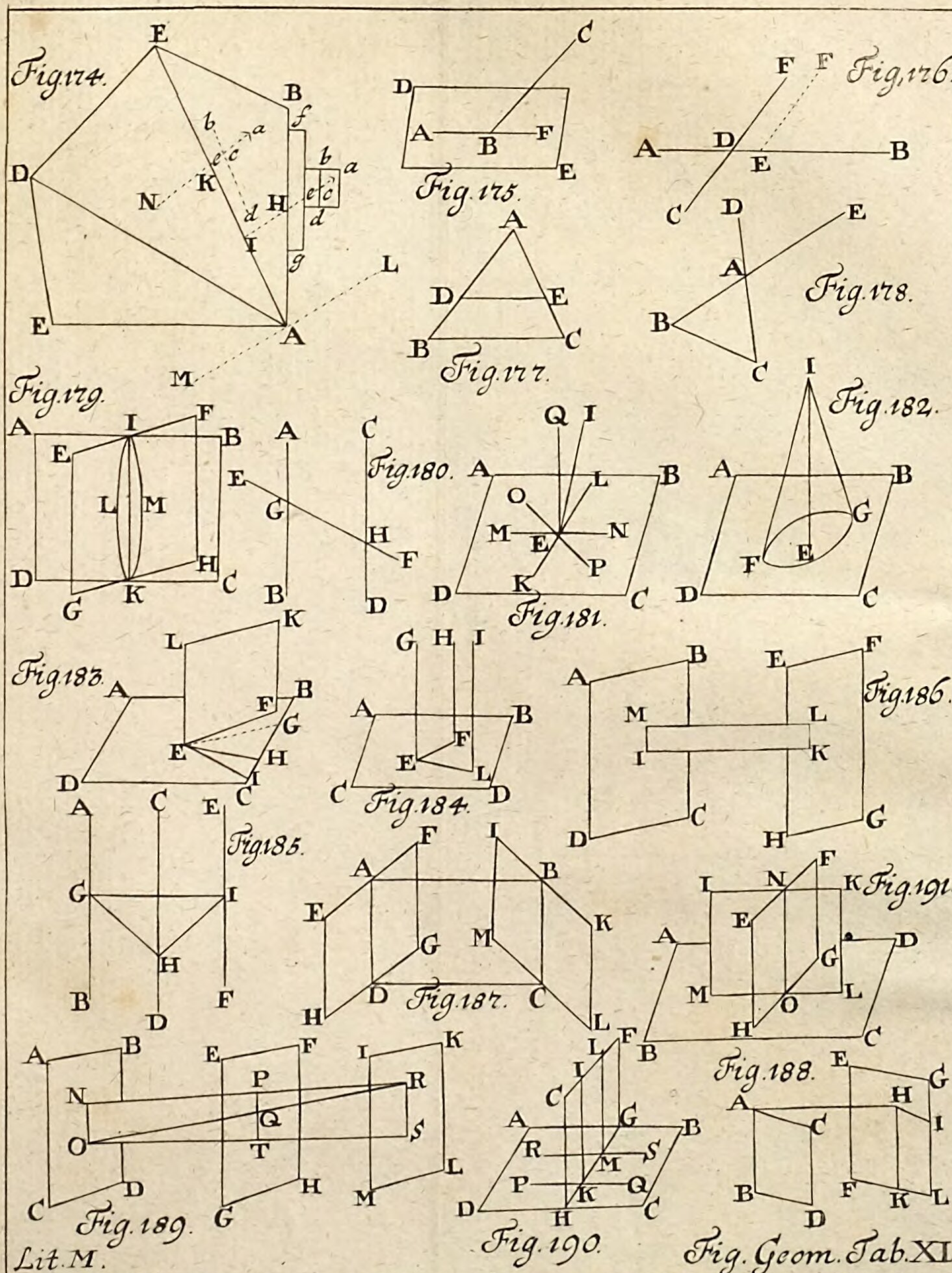


Fig. 174.
Fig. 175.
Fig. 176.
Fig. 177.
Fig. 178.
Fig. 179.
Fig. 180.
Fig. 181.
Fig. 182.
Fig. 183.
Fig. 184.
Fig. 185.
Fig. 186.
Fig. 187.
Fig. 188.
Fig. 189.
Fig. 190.
Fig. 191.
Lit. M.
Fig. Geom. Tab. XI.

ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

PRÆFATIO.

MOmenti perquam exigui tyronibus videtur Trigonometria, utilitatis prorſus nullius. Enimvero rerum Mathematicarum periti ore unanimi confitentur, quod, ſublata Trigonometria, maxima eorum pars pereat, quæ in Matheſi admiramur. Certe ſtellarum magnitudinem, diſtantiam a Terra, motum, eclipſum tam ſolarium, quam lunarium computum, magnitudinem globi terraquei & innumera alia prorſus ignoraremus, ſi nobiliſſimæ hujus ſcientiæ auxilio deſtituеremur. Trigonometria igitur pro arte haberi debet, qua maxime abſcondita & a cognitione hominum remota in apricum producuntur. Eam qui neſcit, non magnos in Matheſi mixta ſentiet progreſſus: ſæpius ipſi in Philoſophia naturali hærebit aqua, e. gr. iridis phænomena ad rationes ſuas revocaturo aliaque meteora emphatica explicaturo. Studium igitur Trigono-

gonometriæ addiſcendæ afferatur indefeſſum, nec impatiens ſit mora, donec in partibus Matheſeos ſubſequentibus ineffabilis ejusdem uſus ex his ipſis etiam elementis pateſcat. Fides oculata impediet, quo minus in poſterum judicia de rerum uſu (quod vulgo plerumque fieri ſolet) præcipitemus. Paucis problematibus comprehendi, quæ alias per caſus plures diſtribuuntur: in elementis enim præter neceſſitatem multiplicanda non ſunt, quæ ſpinoſa videntur tyronibus, nec culpatur brevitas, quæ perſpicuitati non officit, memoriæ levamen certiſſimum exiſtit. Cumque Trigonometria etiam in Geometria practica uſum habeat, quam cum theoretica conjungi conſultum duximus; ideo hunc uſum ſub finem annectere placuit.

ELE-

ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

CAPUT I.

De CONSTRUCTIONE CANONIS SINUUM, TANGENTIUM ATQUE SECANTIUM TAM NATURALIUM, QUAM ARTIFICIALIUM.

DEFINITIO 1.

1.

Tab. I. Fig. 1. TRigonometria plana est scientia ex tribus trianguli rectilinei partibus inveniendi reliquas. E. gr. Ex duobus lateribus AB & AC atque angulo B inveniuntur anguli reliqui B & C cum latere tertio BC.

DEFINITIO 2.

Tab. I. Fig. 2. 2. *Sinus rectus* AD arcus AE & AI est chordæ AB arcus dupli AEB dimidium. *Sinus totus* est radius HC, seu sinus Quadrantis HE. *Sinus versus* est pars radii ED inter sinum rectum AD & arcum AE intercepta.

COROLLARIUM. 1.

3. Sinus ergo AD ad radium EC perpendicularis (§.291. *Geom.*): consequenter sinus omnes eidem radio insistentes inter se paralleli (§.256. *Geom.*).

COROLLARIUM. 2.

4. Quoniam arcus AE est mensura anguli ACE, & AI ejus contigui ACI (§. 57. *Geom.*); quadrans vero HE mensura anguli recti (§.143. *Geom.*): AD etiam sinus rectus & ED sinus versus est angulorum ACE & ACI; sinus vero totus est sinus anguli recti.

COROLLARIUM 3.

5. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps, eundem habent sinum.

COROLLARIUM 4.

6. Angulorum adeo obtusorum sinus iidem sunt, quos habent eorum complementa ad duos rectos (§. 147. *Geom.*).

DEFINITIO 3.

7. *Tangens* arcus EA est portio rectæ tangentis circulum EF inter rectas ex centro C per extrema arcus E & A ductas interceptæ. Recta FC dicitur *secans* ejusdem arcus. Tab. I. Fig. 2.

COROLLARIUM 1.

8. Tangens EF ad radium EC perpendicularis est (§. 308. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

9. Est etiam FE tangens & FC secans anguli ACE, itemque ACI (§. 57. *Geom.*).

COROLLARIUM 3.

10. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps, eandem habent tangentem atque secantem.

DEFINITIO 4.

Tab. I. Fig. 2. 11. *Cosinus* est sinus; *Cotangens* tangens; *Cosecans* secans arcus AH, qui est alterius AE complementum ad quadrantem. Ita e.gr. AG sinus arcus AH dicitur Cosinus arcus AE. Vocantur etiam *Sinus*, *Tangentes* atque *Secantes complementi*.

THEOREMA 1.

12. *Sinus arcuum similium ad radios suos eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Chordæ enim arcuum similium ad radios eandem rationem habent (§. 290. *Geom.*). Sed sinus sunt chordarum dimidia (§. 2.). Ergo & hi ad radios rationem eandem habent (§. 181. *Arithm.*). *Q.e.d.*

HYPOTHESIS.

13. *Sumatur radius pro unitate & per ejus fractiones decimales determinetur quantitas sinuum, tangentium atque secantium.*

SCHOLION.

14. *Ex* Ptolemæi *Almagesto discimus, veteres radium in 60 partes, quas gradus vocabant, divisisse & inde chordas per minuta prima, secunda, tertia &c. hoc est, fractiones radii sexagesimales determinasse, quibus in analysi triangulorum utebantur. Dimidiis chordis seu sinibus primum usi sunt, quantum constat, Saraceni.* Johannes Regiomontanus *primum radio cum veteribus tribuit 60 gradus & sinus singulorum graduum per ejus fractiones decimales determinavit. Enimvero postea animadvertit, commodius fore, si radius sumatur pro unitate, ac ideo hypothesin præsentem in Trigonometriam introduxit. In tabulis sinuum & tangentium ordinariis radius concipitur in* 10000000 *partes divisus & ultra has fractiones in determinanda sinuum & tangentium quantitate non descenditur. Qui tamen tabulas istas construxerunt, ad fractiones multo minores descenderunt, ne error irreperet in scrupulis primis assignabilis. Secantibus hodie opus non habemus, cum omnia Trigonometriæ problemata absque illarum ope solvi possint.*

COROLLARIUM.

15. Cum latus hexagoni regularis sextam circuli partem subtendat (§. 116. 342. *Geom.*) atque radio æquale sit (§. 356. *Geom.*); sinus graduum triginta est 5000000 (§. 2. *Trigon.* & §. 41. *Geom.*)

PRO-

PROBLEMA I.

Tab. I. Fig. 2. 16. *Dato sinu AD, invenire cosinum AG.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam EC sinus ipsius EH (§.2.) ad HC & AG sinus arcus AH (§.2.) perpendicularis ad eandem HC (§.3.); erit AG parallela ipsi DC (§.256.*Geom.*) & ad G angulus rectus (§.78.*Geom.*), adeoque △ AGC rectangulum (§. 91. *Geom.*). Quare cum AD & AC sint ad EC perpendiculares (§.3.); erit GC=AD (§.226.*Geom.*). Si ergo

1. Ex quadrato radii AC subtrahatur quadratum sinus AD vel GC; relinquetur quadratum Cosinus AG (§.417.*Geom.*). Unde si
2. Radix quadrata extrahatur (§. 269.*Arithm.*); prodibit Cosinus AG.

E. gr. Sit AC 10000000; AD 5000000: reperietur AG 8660254, sinus 60°.

PROBLEMA 2.

Tab. I. Fig. 2. 17. *Dato sinu AD arcus AE, invenire sinum arcus dimidii ½ AE.*

RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcus AE (§.423. *Geom.*). Hujus enim dimidium est ejus sinus (§.2.).

E. gr. Sint AC & AD ut in probl. præc. reperietur sinus arcus ½ AE seu sinus 15° = 2588190.

PROBLEMA 3.

18. *Dato sinu DG arcus DF, invenire sinum DE arcus dupli DB.* Tab. I. Fig. 3.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad E & G recti sint (§.3.) & angulus B utrique triangulo BCG & DEB communis; erit BC : CG = BD : DE (§. 267. *Geom.*). Quare cum CG inveniri possit, dato sinu DG (§.16.), & BD sit duplum ipsius DG (§.2.): invenietur quoque DE (§.302. *Arithm.*). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA 4.

19. *Datis sinibus FG & DE arcuum FA & DA, quorum differentia DF 45′ major non est, invenire sinum quemcunque intermedium IL.* Tab. I. Fig. 4.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad differentiam arcuum FD, quorum sinus dantur, differentiam arcus, cujus sinus quæritur, AI atque arcus AD sinui dato majori respondentis IF & differentiam sinuum datorum DH quartus numerus proportionalis §.302. *Arithm.*).

 2. Is

2. Is addatur sinui dato minori FG. Erit aggregatum sinus quæsitus IL.

DEMONSTRATIO.

Cum arcus DF & FI paucorum sint minutorum, *per hypoth.* pro lineis rectis citra errorem sensibilem haberi poterunt. Porro FG, IL & DE parallelæ sunt (§. 3.). Quare si ex F ad DE perpendicularis demittatur FH (§.216. *Geom.*); erit HE=FE (§.226. *Geom.*), adeoque DH differentia sinuum datorum FG & DE (§. 64. *Arithm.*) Unde ob parallelas IK & DH *per demonstrata*; DF : FI = DH : IK (§.268. *Geom.*) *Q. e. d.*

PROBLEMA 5.

Tab. I. Fig. 5. 20. *Datis sinibus BD & FE duorum arcuum quorumcunque AB & AF, invenire sinum arcus semidifferentiæ eorundem BF.*

RESOLUTIO.

1. Sinus minor BD subtrahatur a majore FE, relinquetur differentia FK.
2. Ex datis sinibus BD & FE inveniantur Cosinus BI & FH (§.16).
3. Cosinus minor FH subtrahatur e majore BI, erit BK differentia.
4. Ex summa quadratorum differentiarum BK & FK extrahatur radix quadrata (§.269. *Arithm.*); prodibit chorda arcus differentiæ BF, cujus dimidium est sinus quæsitus (§.2.). *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

BD, FE & GC, tum AC, BI & FH inter se parallelæ & illæ ad AC, hæ ad GC perpendiculares (§. 3.), consequenter FH=KI & BD=EK (§.226. *Geom.*) & angulus BKF rectus (§. 230. 78. *Geom.*) Quamobrem FK differentia sinuum BD & FE, BK vero differentia cosinuum FH & BI atque FKB triangulum rectangulum (§. 91. *Geom.*). Ergo cum sit $BF^2 = BK^2 + FK^2$ (§. 417. *Geom.*); reperietur chorda BF, si ex summa quadratorum differentiæ sinuum FK & cosinuum BK radix quadrata extrahitur, (§.246. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 6.

21. *Invenire sinum 45. graduum.* Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Sit HI circuli quadrans; erit HCI angulus rectus (§. 143. *Geom.*) adeoque △ cognomine rectangulum (§. 91. *Geom.*), consequenter $HI^2 = HC^2 + CI^2$ (§.417. *Geom.*) $= 2\ HC^2$ (§.40. 374. *Geom.*) Quare cum HC sinus totus (§.2.) sit 10000000 (§. 13); si ex $2HC^2$ quadrato 200000000000000 extrahatur radix

radix 14142136. (§.269. *Arithm.*); prodibit chorda HI (§.246. *Arithm.*), cujus dimidium 7071068 sinus 45° desideratus. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

22. *Inferius in Analysi docebimus, quomodo ex dato radio latus pentagoni regularis, hoc est, 72° (§. 342. Geom.), consequenter sinus 36° (§. 2.). inveniatur.*

PROBLEMA 7.

Tab. I. Fig. 4. 23. *Dato sinu unius minuti seu 60″ FG, invenire sinum unius vel aliquot secundorum MN.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AM & AF sunt admodum exigui, AMF pro linea recta haberi potest citra errorem in fractionibus radii decimalibus, quibus sinus exprimimus, assignabilem, hoc est, arcus AM & AF chordis eorum proportionales assumere licet. Quare cum MN sit ipsi FG parallela (§. 3.); erit AF : FG = AM : MN (§.268 *Geom*). Datis ergo AF, FG & AM, *per hypoth.* invenitur MN (§. 302 *Arithm.*). *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

24. *Eadem ratione, si opus foret, inveniri posset sinus aliquot scrupulorum tertiorum.*

PROBLEMA 8.

25. *Datis sinibus 30 (§. 15.), 15 (§. 17), 45 (§. 21) & 36 graduum (§. 22); canonem omnium sinuum construere, nonnisi unico minuto aut denis secundis, immo unico secundo inter se differentibus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex sinu 36 graduum inveniatur Sinus 18°, 9°, 4° 30′, 2° 15′ (§. 17); sinus 54°, 72°, 81°, 85° 30′, 87° 45′ (§. 16): porro sinus 27°, 13° 30′, 6° 45′, 40° 30′, 20° 15′, 42° 45′ (§. 17): inde sinus 63°, 76° 30′, 83° 15′, 49° 30′, 69° 45′, 47° 15′ (§. 16): ulterius sinus 31° 30′, 15° 45′, 38° 15′, 24° 45′ (§. 17): hinc sinus 58° 30′, 74° 15′, 51° 45′, 65° 15′, (§. 16): denique sinus 29° 15′ (§. 17) & ejus cosinus 60° 45′ (§. 16).
2. Ex sinu 45° inveniantur sinus 22° 30′ & 11° 15′ (§. 17), sinus 67° 30′ & 78° 45′ (§. 16), sinus denique 33° 45′ (§. 17) & 56° 15′ (§. 16).
3. Ex sinu 30° & sinu 54° inveniatur sinus 12° (§. 20).
4. Ex sinu 12° inveniantur sinus 6°, 3°, 1° 30′, 45′ (§. 17), sinus 78°, 84°, 87°, 88° 30′, 89° 15′ (§. 16): porro sinus 39°, 19° 30′, 9° 45′, 42°, 21°, 10° 30′, 5° 15′, 43° 30′, 21° 45′, 44° 15′ (§. 17): ulterius sinus 51°, 70° 30′, 80° 15′, 48°, 69°, 79° 30′, 84° 45′, 46° 30′,

30′, 68° 15′, 45° 45′ (§. 16): inde ſinus 25° 30′, 12° 45′, 35° 15′, 24°, 34° 30′, 17° 15′, 39° 45′, 23° 15′ (§. 17): hinc ſinus 64° 30′, 77° 15′, 54° 45′, 66°, 55° 30′, 72° 45′, 50° 15′, 66° 45′ (§. 16): hinc porro ſinus 32° 15′, 33°, 6° 30′, 8° 15′, 27° 45′ (§. 17): inde ulterius ſinus 57° 45′, 57°, 73° 30′, 81° 45′, 62° 15′ (§. 16): porro ſinus 28° 30′, 14° 15′, 36° 45′ (§. 17) & horum coſinus 61° 30′, 75° 45′, 53° 45′, (§. 16): denique ſinus 30° 45′ (§. 17) & ejus coſinus 59° 15′ (§. 16).

5. Ex ſinu 15° inveniantur ſinus 7° 30′ & 3° 45′ (§. 17): hinc ſinus 75°, 82° 30′, 86° 15′ (§. 16): inde 37° 30′, 18° 45′, 41° 15′ (§. 17) & horum coſinus 52° 30, 71° 15′, 48° 45′ (§. 16): denique ſinus 26° 15′ (§. 17) & ejus coſinus 63° 45′ (§. 16).

6. Quodſi ſinus hac ratione inventi in ordinem redigantur, numero 120, & differentiam inter duos immediate ſibi mutuo ſuccedentes 45′ deprehendes: quemadmodum ex Tabula, quem eum in finem hic apponimus, primo intuitu apparet:

1	0°45′	21	15°45′	41	30°45′	61	45°45′	81	60°45′	101	75°45′		
2	1. 30	22	16. 30	42	31. 30	62	46. 30	82	61. 30	102	76. 30		
3	2. 15	23	17. 15	43	32. 15	63	47. 15	83	62. 15	103	77. 15		
4	3. 0	24	18. 0	44	33. 0	64	48. 0	84	63. 0	104	78. 0		
5	3. 45	25	18. 45	45	33. 45	65	48. 45	85	63. 45	105	78. 45		
6	4. 30	26	19. 30	46	34. 30	66	49. 30	86	64. 30	106	79. 30		
7	5. 15	27	20. 15	47	35. 15	67	50. 15	87	65. 15	107	80. 15		
8	6. 0	28	21. 0	48	36. 0	68	51. 0	88	66. 0	108	81. 0		
9	6. 45	29	21. 45	49	36. 45	69	51. 45	89	66. 45	109	81. 45		
10	7. 30	30	22. 30	50	37. 30	70	52. 30	90	67. 30	110	82. 30		
11	8. 15	31	23. 15	51	38. 15	71	53. 15	91	68. 15	111	83. 15		
12	9. 0	32	24. 0	52	39. 0	72	54. 0	92	69. 0	112	84. 0		
13	9. 45	33	24. 45	53	39. 45	73	54. 45	93	69. 45	113	84. 45		
14	10. 30	34	25. 30	54	40. 30	74	55. 30	94	70. 30	114	85. 30		
15	11. 15	35	26. 15	55	41. 15	75	56. 15	95	71. 15	115	86. 15		
16	12. 0	36	27. 0	56	42. 0	76	57. 0	96	72. 0	116	87. 0		
17	12. 45	37	27. 45	57	42. 45	77	57. 45	97	72. 45	117	87. 45		
18	13. 30	38	28. 30	58	43. 30	78	58. 30	98	73. 30	118	88. 30		
19	14. 15	39	29. 15	59	44. 15	79	59. 15	99	74. 15	119	89. 15		
20	15. 0	40	30. 0	60	45. 0	80	60. 0	100	75. 0	120	90. 0		

Inve-

Inveniantur ergo ſinus intermedii per probl. 4. (§. 19).

7. Denique ſinus ſcrupulorum ſecundorum ab 1 usque ad 60 inveniantur per probl. præc. (§. 13).

Ita Canon ſinuum erit conſtructus, *Q. e. f.*

PROBLEMA 9.

Tab. I. Fig. 2. 26. *Dato ſinu AD arcus AE invenire tangentem EF & ſecantem FC ejusdem arcus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quia ſinus AD & tangens FE ad radium EC perpendicularis (§. 3. 8); erit ille huic parallelus (§. 256 *Geom.*). Quare ut Coſinus DC ad ſinum AD, ita ſinus totus ad tangentem EF: item ut Coſinus DC ad ſinum totum AC ita ſinus totus EC ad ſecantem CF (§. 268 *Geom.*). Invenietur adeo per illationem primam tangens EF; per alteram ſecans FC (§. 302. *Arithm.*) *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

27. *Conſtructo igitur Canone ſinuum (§. 25), haud difficilis eſt conſtructio Canonis tangentium atque ſecantium. Uterque junctim ſumtus Canon triangulorum naturalis dici ſolet, quia triangulorum analyſi inſervit. Equidem paſſim apud Autores theoremata non inelegantia occurrunt, quibus multi ſinus facilius inveniuntur, quam expoſita hactenus methodo.* Urſinus (a) *præſertim docet, quomodo ex ſinu Canonis omnium primi, e gr. unius ſecundi, per ſolam quaſi additionem & ſubtractionem totus Canon derivetur. Enimvero cum ab aliis dudum conſtructus ſit; ſufficit utcunque oſtendiſſe, quomodo conſtrui potuerit.*

PROBLEMA 10.

28. *Invenire ſinus cujuscunque dati logarithmum.*

RESOLUTIO.

Ut logarithmi eo accuratiores inveniantur, aſſumendi ſunt ſinus ad radium 100000000000 conſtructi. Mulctantur nempe Sinus in Canone *Pitiſci* majore 4 ultimis notis. Cum adeo ſinus ſint numeri 10 ut plurimum notis conſtantes, in canone autem logarithmorum, qui proſtat, maximo numeri naturales ultra 5 notas non aſcendunt; logarithmi eorum inveniuntur *per probl.* 37. *Arithm.* (§. 349). Utendum vero eſt canone logarithmorum majore.

E. gr. Sit inveniendus logarithmus Sinus 23°, qui apud *Pitiſcum* 390731 1284. Reſectis verſus ſiniſtram quinque notis

(a) Trigon. lib. 2. c. 5. p. 164.

notis 39073, ipsis respondens logarithmus est 4. 5918768, consequenter logarithmus numeri 3907300000 est 9. 5918768. Differentia tabularis est 111. Quare infertur: ut 100000 ad 111 ita notæ residuæ sinus dati 11284 ad numerum quartum proportionalem 12: qui si addatur logarithmo 9. 5918768, prodit logarithmus quæsitus 9.5918780, qualis in Canone triangulorum artificiali reperitur.

PROBLEMA 12.

29. *Invenire logarithmum tangentis, dato logarithmo sinus & cosinus.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus sinus addatur logarithmo sinus totius.
2. A summa subtrahatur logarithmus cosinus. Residuum est logarithmus tangentis (§. 26 *Trigon.* & §. 359. *Arithm.*).

E. gr. Inveniri debet logarithmus tangentis 23°.

Addantur Log. Sin. 23° =	9. 5918780
Log. Sin. tot. =	100000000
a summa =	195918780
subtrahatur Log. Cos. =	99640261
relinquitur Log. tang. =	96278519

PROBLEMA 12.

30. *Invenire logarithmum secantis arcus cujuscunque, dato sinu complementi ejusdem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus sinus totius multiplicetur per 2.
2. Ab ejus duplo subtrahatur sinus complementi datus. Residuus fiet logarithmus secantis (§. 26 *Trigon.* & §. 359. *Arithm.*).

E. gr. Quærendus est logarithmus secantis arcum 23°. Calculi typus talis est:

Log. sin. tot. =	100000000
Ejus duplum =	200000000
Log. Sin. Compl. =	99640261
Log. Secant. 23° =	10.0359739

SCHOLION.

31. Johannes Neperus, *qui primus logarithmos in Trigonometriam introduxit, sinus totius logarithmum facit* 0. *Hinc crescunt logarithmi sinuum, sinibus decrescentibus, & tangentium atque secantium sinu toto majorum logarithmi sunt defectivi seu nihilo minores.* Neperus *logarithmos cosinuum* Antilogarithmos, *logarithmos vero tangentium* differentiales; Keplerus *etiam* Mesologarithmos *vocat. Dicuntur quoque hi logarithmi* Sinus & tangentes artificiales.

CAPUT

CAPUT II.

De ANALYSI TRIANGULORUM.

THEOREMA 2.

Tab. I. Fig. 2. 32. *Tangens 45° EF æquatur radio EC.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AE 45°, *per hypoth.* erit quoque angulus ACE 45° (§. 59 *Geom.*), consequenter angulus F 45° (§. 241. *Geom.*). Quare EF = CE (§. 253 *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA 3.

Tab. I. Fig. 1. 33. *In omni triangulo ABC latera sunt ut sinus oppositorum angulorum.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim omne triangulum circulo inscriptibile sit (297 *Geom.*); erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 38 *Geom.*), consequenter latera dimidia sinus arcuum dimidiorum (§. 2). Sed arcus dimidii sunt mensuræ angulorum oppositorum B, A & C (§. 314 *Geom.*). Ergo ut latus AC ad sinum anguli sibi oppositi B; ita latus BC ad sinum anguli sibi oppositi A, ita etiam AB ad sinum anguli sibi oppositi C. *Q. e. d.*

SCHOLION.

34. *Ut vero evidentius appareat, in triangulo obtusangulo pro sinu anguli obtusi utendum esse sinu anguli acuti, qui eidem deinceps ponitur, & quem esse etiam sinum anguli obtusi supra annotavimus (§. 6), sequens addere lubet theorema.*

THEOREMA 4.

35. *In triangulo obtusangulo AGC est ut latus angulo obtuso G oppositum AC ad sinum anguli acuti AGI eidem deinceps positi, ita latus angulo obtuso adjacens GA ad sinum anguli eidem oppositi C.* Tab. I. Fig. 8.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex A in basin continuatam GC perpendicularis AE; erunt AEG & AEC triangula rectangula (§. 78. 91 *Geom.*). Cum itaque sit ut sinus totus ad AC ita sinus anguli C ad AE & ut AG ad sinum totum ita AE ad sinum anguli AGE (§. 33); erit etiam ut AG ad AC ita sinus anguli C ad sinum anguli AGE (§. 197 *Arithm.*),

Arithm.), consequenter latus angulo obtuso adjacens GA est ad sinum anguli eidem oppositi C sicuti latus angulo obtuso oppositum AC ad sinum anguli acuti eidem deinceps positi AGE (§. 173 *Arithm.*) *Q. e. d.*

PROBLEMA 13.

Tab. I. Fig. 1. 36. *Datis duobus angulis A & C, una cum latere uni eorum C opposito AB, invenire latus alteri A oppositum BC.*

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 33):
ut sinus anguli C
ad latus sibi oppositum datum AB.
Ita Sinus anguli alterius A
ad latus quæsitum BC.

Invenietur adeo Logarithmorum ope BC *per probl.* 38. *Arithm.* (§. 351).

E. gr. Sit C = 48° 35', A = 57° 28', AB = 74'. Calculus talis erit:

Log. Sin. C	9.8750142
Log. AB	1.8692317
Log. Sin. A	9.9258681
Sum. Log. AB & Sin. A	11.7950998
Log. BC	1.9200856.

cui in Canone logarithmorum pro numeris vulgaribus respondent 83'. Cum vero logarithmus in tabulis non exactus reperiatur; inveniri possunt numeri inventi 83' fractiones decimales, hoc est, in casu nostro digiti, si sub characteristica 2 post 830' denuo logarithmus ipsius BC evolvatur: cui proxime respondet numerus 831''. Quodsi præter digitos etiam lineas desideres; eundem logarithmum quære post 8310''' & ei quam proxime respondere deprehendes 8319''''. Immo si canon major ad manus sit, ipsa scrupula quarta expiscari licet, si logarithmus inventus post 83190'''' evolvatur: ubi eidem quam proxime respondet logarithmus numeri 83192. Est ergo BC 8° 3' 1'' 9''' 2'''' (§. 355. *Arithm.*).

SCHOLION.

37. *Quid factu opus sit, si logarithmi characteristica fuerit 3, in Arithmetica loco citato docuimus.*

PROBLEMA 14.

38. *Datis duobus lateribus AB & BC una cum angulo C uni eorum opposito, invenire angulos reliquos A & B.* Tab. I. Fig. 1.

RESOLUTIO.

I. Inferatur (§. 33):
ut latus unum AB
ad sinum anguli dati sibi oppositi C:
Ita latus alterum BC
ad sinum anguli quæsiti sibi oppositi A.

Invenietur adeo logarithmus sinus anguli A utendo logarithmis *per probl.* 38. *Arithm.* (§. 351).

II. Quod-

Tab. I. Fig. 8. II. Quodsi latus AG vel AB dato angulo C oppositum fuerit minus latere AC, quod opponitur angulo quæsito, quæsitus angulus & obtusus esse potest, & acutus B (§. 234 *Geom.*), adeoque constare debet, utrum triangulum datum sit obtusangulum, an acutangulum. In casu posteriori satisfacit numerus graduum, qui sinui reperto respondet; in priori pro angulo obtuso sumitur ejus complementum ad 180° (§. 35).

Tab. I. Fig. 8. III. Quodsi angulus datus G in triangulo GAC fuerit obtusus & datis præterea cruribus AG & AC quæratur obtusus, in solutione pro sinu obtusi anguli AGC sumitur deinceps positi acuti AGE sinus (§. 35).

Tab. I. Fig. 1. E. gr. Sit AB = 94', BC = 69', C = 72° 15'.

Log. AB	1.9731279
Log. Sin. C	9.9788175
Log. BC	1.8388491
Sum. Log. Sin. C & BC	11.8176666
Log. Sin. A	9.8445387,

cui in canone proxime respondent 44° 21'. Quodsi Canon major non fuerit ad manus & præter scrupula prima etiam secunda desiderentur *vi probl.* 4. (§. 19) hunc in modum inveniuntur.

A logarith. invento 98445387 subtrahe
Tabul. prox. min. 98445018
& notetur Differ. I. 369
Simil: ex prox. maj. 98446310 subduc
prox. min. 98445018
& notetur Diff. II. 1292

Inferatur: 1292 : 60 = 369
2) 646 : 30 30
11070 (18
646 :
4610
5168
4 2

Est ergo angulus A = 44° 21' 18"

Sed C	= 72	15	0
Quare A + C	= 116	36	18
Quon. A + C + B	= 179	59	60
erit B	= 63°	23'	42"

Similiter dentur in triangulo rectangulo præter rectum A hypothenusa BC & cathetus AC pro angulo B. Sit nempe BC 49', AC 36'. Calculus talis erit: Tab. I. Fig. 6.

Log. BC	1.6901961
Log. Sin. tot.	10.0000000
Log. AC	1.5563025
Log. Sin. B	9.8661064,

cui in canone proxime respondent 47° 16'. Ergo C = 42° 44' (§. 241 *Geom.*)

Quodsi AG = 349", AC = 382", angulus A = 57° 25'; erit Tab. I. Fig. 2.

Log. AG	25428254
Log. Sin. C	99256261
Log. AC	25820634
Sum. Log. Sin. C & AC	125076895
Log. Sin. G	9964 8641,

 cui

cui in Canone proxime respondent 67° 15′. Est igitur angulus acutus B in triangulo ABC 67° 15′: quem si subtraxeris ex 180°, relinquetur pro obtuso AGC 112° 45′.

Detur denique in triangulo obtusangulo AGC angulus obtusus G 165° 17′, una cum cruribus AG = 179″ & AC 223″ pro acuto C. Inferatur (§. 35).

Log. AC	2.3483049
Log. Sin. AGE	9.4049009
Log. AG	2.2528530
Sum. Log. Sin. G & AG	11 65.775.39
Log. Sin. C	9.3094490, cui

in Canone respondent quam proxime 11° 46′.

LEMMA.

39. *Si a semisumma duarum quantitatum subtrahatur semidifferentia, relinquitur quantitas minor: Si vero illi hæc addatur, prodit major.*

DEMONSTRATIO.

Numerus major componitur ex minore & differentia (§. 64 *Arithm.*): ergo summa ex minore bis sumta & differentia, consequenter semisumma ex minore & semidifferentia. Quare si a semisumma semidifferentia subtrahatur, minor quantitas relinquitur (*§. cit. Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodsi vero semisummæ semidifferentia addatur, aggregatum erit compositum ex quantitate minore & differentia (*§.* 61 *Arithm.*), adeoque numerus major, *per demonstr. Quod erat alterum.*

PROBLEMA 15.

40. *Datis duobus lateribus BA & AC cum angulo intercepto A, invenire angulos reliquos.*

RESOLUTIO.

I. Si triangulum ABC fuerit rectangulum; assumto crure uno cira rectum AB pro radio, erit alterum CA tangens anguli oppositi B (§. 7. 8) Inferatur ergo: Tab. I. Fig. 6.

ut crus unum AB
ad alterum AC;
Ita sinus totus
ad tangentem anguli B.

E. gr. Sit BA 79′, AC 54′: erit

Log. BA	18976271
Log. AC	17323938
Log. Sin. Tot.	100000000
Log. Tang. B.	9.8347667, cui in

Canone respondent quam proxime 34° 21′. Ergo angulus C 55° 39′ (*§.* 241 *Geom.*).

II. Si angulus A fuerit obliquus; Tab. I. Fig. 7.

1. inferatur:

ut summa laterum datorum
AB & AC
ad differentiam eorundem.

Ita

Ita tangens semisummæ angulorum quæsitorum C & B.

ad tangentem semidifferentiæ eorundem.

2. Addatur semidifferentia ad semisummam; aggregatum erit angulus major C. Eadem a semisumma subtrahatur, residuus fiet angulus minor B.

E. gr. Sit AB 75′, AC 58′, A 108° 24′, erit

AB 75	AB 75	A + B + C	179° 60′
AC 58	AC 58	A	108 24
Sum: 133	Diff. 17	B + C	71 36
		$\frac{1}{2}$(B + C)	35 48

Log. AB + AC	2.1238516
Log. AB − AC	1.2304489
Log. Tang. $\frac{1}{2}$(B + C)	9.8580694
Summa Logg.	11.0885183

Log. Tang. $\frac{1}{2}$(C − B) 89646667, cui in tabulis proxime respondent 5° 16′.

$\frac{1}{2}$(B + C) = 35° 48′	$\frac{1}{2}$(B + C) = 35° 48′
$\frac{1}{2}$(C − B) = 5 16	$\frac{1}{2}$(C − B) = 5 16
C = 41 4	B = 30 32

DEMONSTRATIO.

Crure majore dato AB ex vertice anguli dati A describatur circulus (§. 131 *Geom.*), & crus minus AC utrinque continuetur (§. 21 *Geom.*), donec circulo in E & D occurrat. Erit ob AE = AB = AD (§. 40 *Geom.*) CE summa laterum datorum, CD differentia eorundem. Quoniam DE diameter (§. 39 *Geom.*); erit EBD semicirculus (§. 135 *Geom.*), consequenter angulus EBD rectus (§. 317 *Geom.*), adeoque EB ad BD perpendicularis (§. 78 *Geom.*). Quare si BD sumatur pro sinu toto; erit EB tangens anguli EDB (§. 7. 8). Est vero $o = x + y$ (§. 239 *Geom.*) & inde ob $u = \frac{1}{2} o$ (§. 313 *Geom.*), $u = \frac{1}{2}(x + y)$. Ergo EB tangens semisummæ angulorum quæsitorum x & y. Quoniam $x = u + n$ (§. 239 *Geom.*); erit n semidifferentia angulorum x & y (§. 39). Sumto itaque DB denuo pro radio si describatur arcus DG (§. 131 *Geom.*) & in D excitetur perpendicularis DF (§. 249 *Geom.*); erit DF tangens anguli n (§. 7. 8), hoc est, semidifferentiæ angulorum quæsitorum x & y *per demonstr.* Jam cum anguli EBD & FDB sint recti *per demonstr.* & hinc FD & EB parallelæ (§. 256), adeoque BED & FDE æquales (§. 233 *Geom.*), item verticales ad C æquales (§. 156 *Geom.*); erit CE : BE = DC : DF (§. 266 *Geom.*), consequenter & CE : DC = BE : DF (§. 173 *Arithm.*). Data itaque per

tangen-

tangentem DF angulorum quæsitorum semidifferentia, reliqua in resolutione manifesta sunt per lemma præcedens (§. 39). *Q. e. d.*

PROBLEMA 16.

Tab. I. Fig. 8. 41. *Datis tribus lateribus AB, BC & CA, invenire angulos A, B & C.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex vertice anguli A latere minimo AB describatur circulus (§. 131 *Geom.*); erit ob AD = AB (§. 40 *Geom.*) CD summa crurum AC & AB; CF vero differentia eorundem. Et ideo inferre licet (§. 333 *Geom.*);

 ut Basis BC
 ad summam crurum CD,
 Ita differentia crurum CF
 ad segmentum basis CG.

2. Inventum adeo segmentum CG (§. 302 *Arithm.*) si subtrahatur a basi CB; relinquitur chorda GB.

3. Demittatur ex A perpendicularis AE ad chordam GB (§. 216 *Geom.*), erit BE = EG = $\frac{1}{2}$ GB (§. 291 *Geom.*). Datis adeo in triangulo rectangulo AEB lateribus AB & BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; inveniuntur anguli B atque A (§. 38). *Q. e. f. & d.*

E. gr. Sit AB = 36′, AC = 45′, BC = 40′: erit

AC = 45′	AC = 45′
AB = 36	AB = 36
AC + AB = 81	FC = 9

Log. BC	= 1.6020600
Log. AC + AB	= 1.9084850
Log. FC	= 0.9542425
Logg. summa	= 2.8627275
Log. CG	= 1.2606675,

cui in tabulis quam proxime respondent 18′ 2″ 2‴ (§. 355 *Arithm.*).

BC = 4000‴	EG = 1089‴
CG = 1822	CG = 1822
BG = 2178	CE = 2911

BE = 1089

Log. AB	= 3.5563025
Log. Sin. tot.	= 10.0000000
Log. EB	= 3.0370279

Log. Sin. EAB = 9.4807254, cui in tabulis quam proxime respondent 17° 36′, adeoque angulus ABE 72° 24′ (§. 241 *Geom.*).

Log. AC	= 3.6532125
Log. Sin. tot.	= 10.0000000
Log. CE	= 3.4640422

Log. Sin. EAC = 9.8108297, cui in tabulis quam proxime respondent 40° 10′. Ergo ACE 49° 42′ (§. 241 *Geom.*) & CAB 57° 54′ (§. 86 *Arithm.*).

CAPUT

CAPUT III.

De

USU TRIGONOMETRIÆ PLANÆ IN GEOMETRIA PRACTICA.

PROBLEMA 17.

42. *Construere instrumentum transportatorium rectilineum, hoc est, scalam secundum eam proportionem divisam, quam habent subtensæ arcuum ad radium.*

RESOLUTIO.

1. Ex communi canone sinunm excerpantur sinus arcuum 2°30′, 5°, 7° 30′, 10°, 12° 30′ &c. nempe in progressione arithmetica progredientium, in qua terminorum differentia est $2\frac{1}{2}$. Eos multiplica per 2; erunt facta chordæ arcuum 5, 10, 15, 20, 25 &c. (§.2): ut hic in tabella factum vides.

Gr.	Chor. dimid	Chor. integ.	Gr.	Chor. dimid	Chor. integ.
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500.0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	642.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414

(*Wolfii Math. Tom. I.*)

2. Ducatur recta AD & ad eam erigatur perpendicularis AB (§. 212 *Geom.*) pro arbitrio in quinque, decem, viginti, &c. partes æquales dividenda, prout vel solos gradus, vel gradus dimidios, vel partes quartas &c. indicare debent subtensæ. Tab. I. Fig. 9.

3. Per singula divisionum puncta agantur rectæ ipsi AD parallelæ (§. 258 *Geom.*).

4. In lineam AD, incipiendo semper a puncto A, transfer particulas chordarum integrarum gradibus 5°, 15°, 25°, 35° &c. respondentes ex scala Geometrica in particulas minutissimas divisa (§. 277 *Geom.*): in linea vero superiori BC eodem modo designentur particulæ chordarum respondentes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c. Quodsi scala Geometrica non continet particulas adeo minutas, quales desiderantur; utendum est chordis dimidiis: quod perin-

de ac si particulæ in scala bifariam dividerentur. Negligenda autem est nota puncto a reliquis separata, vel si major fuerit, ejus loco addenda est unitas ultimæ earum, quæ retinentur. E. gr. loco 258.8 assume 259. Ultimas nimirum notas ideo adjecimus, ut appareret, quomodo earum dupla pro chordis computata fuerint.

5. Ducantur transversæ ex B in 5, ex 5 in 10, ex 10 in 15, ex 15 in 20, ex 20 in 25 &c.

Cum enim A 5, B 10 &c. sint chordæ 5, 10 &c. graduum & chordæ a quinis ad quinos gradus fere arcubus proportionaliter crescant; erit c 1 subtensa arcus 1°, d 2 subtensa 2 &c. graduum (§. 268 *Geom.*).

COROLLARIUM 1.

43. Quia subtensa 60° est radius (§. 356 *Geom.*); anguli quantitatem investigaturus intervallo B 60 describat ex vertice anguli intra crura ejus arcum, qui est mensura ipsius (§. 57 *Geom.*), & ejus chordam ad scalam applicet, quæ, si e. gr. ex *d* in 42 pertingat, ostendit angulum esse 42°.

COROLLARIUM 2.

Tab. I. Fig. 10. 44. Angulus datæ quantitatis construetur, si radio B 60 describatur ex centro B arcus CF & subtensa gradus dati e. gr. 23, in scala reperta transferatur ex C in D. Erit enim DC mensura anguli B (§. 57 *Geom.*), adeoque tot graduum, quot arcus continet (§. 59 *Geom.*).

SCHOLION.

45. *Hujus instrumenti beneficio quantitatem angulorum etiam in scrupulis satis accurate explorari experientia loquitur.*

PROBLEMA 18.

46. *Circulo polygonum regulare inscribere & circumscribere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Assumto radio 10000 partium, quales in Canone triangulorum habere supponitur, inde excerpatur sinus ejus arcus, qui prodit, peripheria integra 360° per duplum numerum laterum polygoni, aut (quod perinde est) semiperipheria, hoc est 180°, per numerum laterum polygoni divisa. Illius enim duplum est chorda arcus dupli (§. 2), adeoque latus AB polygoni circulo inscribendi (§. 342 *Geom.*). Tab. I. Fig. 11.

2. Quodsi radius circuli, cui e. gr. pentagonum inscribendum, detur juxta certam aliquam mensuram, e. gr. 345″; latus polygoni in eadem mensura inveni-

tur

tur per regulam trium (§. 302 *Arithm.*), inferendo nempe

```
10000 — 1176 — 3450'
              3450
           ————————
             58800
            4704
           3528
          —————————
          4057|200 ⁄ 4° 0' 5" 7''' Lat.
          1  0|000 (   Pentag.
```

3. Dato radio deſcribatur circulus & in eo applicetur latus polygoni, quoties fieri poteſt (§. 342 *Geom.*).
4. Polygono regulari circulo inſcripto ſimile circumſcribetur (§. 355 *Geom.*).

SCHOLION.

47. *Ne moleſta ſit rationis lateris polygoni ad radium ex canone ſinuum inveſtigatio, in tabula hic exhibemus latera polygonorum iſtiusmodi particulis expreſſa, qualium radius habet* 10000000: *In praxi tot notæ verſus dexteram reſecantur, quot per circumſtantias ſingulares ſuperfluæ judicabuntur.*

Num. Later.	Quantitas Lateris	Num. Later.	Quantitas Lateris
III	17320508	VIII	7653668
IV	14142135	IX	6840402
V	11755705	X	6180339
VI	10000000	XI	5634651
VII	8677674	XII	5176380

PROBLEMA 19.

48. *Super data recta AB polygonum regulare deſcribere: & dato polygono regulari ABCDE circulum circumſcribere.* Tab. I. Fig. 11.

RESOLUTIO.

Non alia re opus eſt, quam ut ratione lateris ad radium ex tabula præcedente aſſumta quæratur radius in ea menſura, in qua datur latus AB (§. 302 *Arithm.*): dato enim latere AB & radio AL, polygonum deſcribi poteſt (§. 342 *Geom.*). Si vero intervallo radii ex A & B ſuper latere polygoni uno fiat interſectio in L, habebitur centrum L circumſcribendi circuli (§. 37 *Geom.*).

PROBLEMA 20.

49. *Datis ſinu verſo AB & ſinu BC in menſura communi, non in particulis radii decimalibus, invenire arcum FC in gradibus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Quæratur ex his datis ſemidiameter AD (§. 328 *Geom.*). Tab. I.
2. Datis jam in triangulo DBC præter rectum B (§. 3) lateribus BC & DC, invenitur angulus ADC (§. 40): qui indicat numerum graduum in arcu AC (§. Fig. 12.

59 *Ge-*

59 *Geom.*), cujus duplus est arcus FC (§. 291 *Geom.*). *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

50. *Hujus problematis usus est in inveniendo segmento circuli* (§. 436 Geom.).

PROBLEMA 21.

Tab. I. Fig. 13. 51. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA & angulis* o & y; *invenire diagonales.*

RESOLUTIO.

1. In △ ABE datis duobus lateribus AB & AE una cum angulo *o* invenitur primum angulus A (§. 40); dein diagonalis BE (§. 36).
2. Eodem modo resoluto triangulo BCD invenitur diagonalis BD. *Q. e. f.*

PROBLEMA 22.

Tab. I. Fig. 13. 52. *Datis in figura rectilinea quacunque duobus lateribus AB & BC, una cum diagonalibus BE & BD atque angulis* o, x & y; *invenire latera reliqua CD, DE & EA.*

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABE duobus lateribus AB & BE cum angulo intercepto *o* invenitur primum angulus *u* (§. 40) & deinde porro AE (§. 36).
2. Eodem prorsus modo in triangulis reliquis BED & BCD investigantur latera ED & DC. *Q. e. f.*

PROBLEMA 23.

53. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA & tot angulis, quot sunt latera, demtis tribus C & D, invenire diagonales BD & BE.* Tab. I. Fig. 13.

RESOLUTIO.

1. In triangulo BCD datis lateribus BC & CD cum angulo intercepto C investigetur angulus *m* (§. 40), quo ex angulo D subducto relinquitur angulus *n*, atque porro diagonalis BD (§. 36).
2. Datis jam in triangulo BDE lateribus BD & DE cum angulo intercepto *n*, eodem prorsus, quo ante, modo reperitur diagonalis BE. *Q. e. f.*

PROBLEMA 24.

54. *Datis in figura rectilinea quacunque latera AB una cum angulis* o, x, y, e, u & n; *invenire diagonales AC, AD, BD & BE una cum lateribus BC & AE.* Tab. II. Fig. 22.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABC angulis

lis o & B (= $e + u + n$) una cum latere AB inveniuntur latus BC & diagonalis AC (§. 36).

2. Similiter datis in triangulo ABD angulis $o + x$ & $e + u$ una cum latere AB, inveniuntur diagonales BD & AD (§. cit.).

3. Denique datis in triangulo ABE angulis A (= $o + x + y$) & e una cum latere AB, inveniuntur latus AE & diagonalis BE. *Q. e. f.*

SCHOLION.

55. *Cum ichnographia arearum optime perficiantur, datis omnibus lateribus itemque diagonalibus* (§. 363 Geom.); *horum problematum in planimetria usus est non contemnendus. Qui tamen praxi operam dant molestias calculi fugiunt; lucro magis quam accurationi intenti.*

PROBLEMA 25.

Tab. I. Fig. 14. 56. *Metiri distantiam duorum locorum BC ex eodem tertio A accessorum.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas anguli A, puncto A ad arbitrium assumto (§. 152 *Geom.*), nec non rectarum AB & AC (§. 126 *Geom.*).

2. Datis in △ BAC duobus lateribus BA & BC cum angulo intercepto A, inveniatur primum angulus B (§. 40) & hinc porro distantia BC (§. 36). *Q. e. f.*

SCHOLION.

57. *Exempla non addimus, cum problemata, quibus triangula in hac trigonometria applicatione solvuntur, jam in superioribus fuerint exemplis illustrata. Ut tamen de commoda stationis electione A judicari possit, quædam adhuc addenda sunt. Nimirum lineas AB & AC, quæ sunt latera trianguli resolvendi BAC satis accurate in campo metiri licet* (§. 126); *sed in metiendo angulo facile aliquot scrupulis primis vel in excessu, vel in defectu peccamus: cum tamen hoc angulo erroneo in calculo utamur tanquam vero, fieri omnino non potest ut distantia erronea obtineatur. Quamobrem de quantitate erroris admittendi hic nobis dispiciendum.*

THEOREMA 5.

58. *Si error aliquot scrupulorum in quantitate anguli A admittatur, laterum vero BA & AC magnitudo fuerit accurata; erit arculi CD errorem CAD metientis quantitas ad DE differentiam distantiæ veræ BC ab erronea per calculum producta BD ut sinus totus ad sinum anguli BCA, qui lateri AB opponitur.* Tab. II. Fig. 15.

DEMONSTRATIO.

Etenim si in angulo BAC metiendo peccetur, ut prodeat tantillo

tillo major BAD, ob rectarum AC & AD æqualitatem *per hypoth.* triangulum BAC degenerat in alterum BAD. Describatur ex A intervallo AC tanquam radio arcus CD, qui per punctum D ob AC=AD (§. 40 *Geom.*) necessario transit. Quoniam angulus CAD nonnisi aliquot scrupulorum est, arcus exiguus CD, qui eum metitur (§. 57 *Geom.*), pro recta haberi, &, si ejus ad peripheriam detur ratio, in eadem mensura determinari potest, in qua datur latus AC (§.435 *Geom.*). Describatur similiter ex centro B intervallo BC arcus CE, qui ex eadem ratione pro recta haberi poterit, eritque ob BC=BE (§. 40 *Geom.*) ED differentia inter distantiam veram BC & erroneam BD: anguli vero ACD, BCE & CED sunt recti (§. 308 *Geom.*), consequenter BCE=ACD (§.145 *Geom.*), atque adeo BCA=ECD (§. 91 *Arithm.*). Est vero ut sinus totus ad CD ita sinus anguli ECD sive BCA *per demonstr.* ad ED (§. 33): ergo etiam ut sinus totus ad sinum anguli BCA ita CD ad ED (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

59. Eodem ergo manente errore CD in angulo A metiendo admisso, error in distantia admissus ED major est, si angulus BCA major fuerit; minor autem, si hic quoque minor fuerit (§. 205. 206 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

61. Statio itaque in A ea eligenda, quæ acutum valde efficit angulum BCA (§. 59): quod obtinetur, si angulus A fuerit major recto (§. 240 *Geom.*) & latus AC > AB (§. 189 *Geom.*).

COROLLARIUM 3.

63. Cum angulus BAD major sit angulo BMD (§. 188 *Geom.*); præstat eligi stationem A viciniorem, quam remotiorem (§. 59).

SCHOLION.

62. *Supponimus hic parti lateris AB congruere semidiametrum instrumenti goniometrici, dum angulum metimur, lateri vero AC respondere regulam mobilem* (§. 152 Geom.).

COROLLARIUM 4.

63. Quoniam error ED in distantia definienda admissus major est, si quantitas arcus CD major fuerit (§. 58), quantitas autem arcus CD major prodeat, eodem errore CAD admisso, si latus AC longius, quam si brevius fuerit, ideo hinc quoque patet, stationem viciniorem præstare remotiori.

SCHOLION.

64. *Ceterum hinc apparet, praxes accuratissimas esse, quæ solis lineis in campo mensuratis nituntur, ubi in earum positione ob errorem in angulorum quantitate commissum aberrari*

aberrari nequit. Dedimus hic specimen aliquod eorum, quæ circa praxin Geometriæ accuratam expendi merentur, ut ostenderemus, theoriam accuratam parere praxin accuratam, & ad theoriam perfecte addiscendam excitemus, qui olim praxi operam daturi. Falluntur enim, qui sibi persuadent, per theoriam addisci non posse certas praxium accuratarum circumstantias, tum demum observandas, ubi manum praxi admoveris. Etenim plerumque tantum confuse observantur; per theoriam vero accurate determinantur.

PROBLEMA 26.

Tab. II. Fig. 16. 65. *Invenire distantiam duorum locorum AC, quorum unus A tantum accessibilis.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas angulorum A & B, statione in B electa (§. 152 *Geom.*), itemque rectæ AB (§. 126 *Geom.*).
2. Inveniatur AC (§. 36). *Q. e. f.*

THEOREMA 6.

Tab. II. Fig. 23. 66. *Si in distantia AB ex duobus angulis A & ACB una cum latere AC investiganda nonnisi in angulo uno ACB metiendo aberretur; arcus BE, qui errorem in angulo BCD admisso metitur, erit ad BD differentiam inter distantiam veram AB & erroneam AD ut sinus anguli tertii o distantiæ stationum AC oppositi ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Illud per se patet in hoc casu distantiam erroneam calculo productam AD continuo in directum jacere veræ AB, consequenter latus CD terminans angulum erroneum ACD secare distantiam veram in præsente casu productam in D. Describatur ergo ex centro C radio CB arcus CE, qui est mensura erroris BCD (§. 57 *Geom.*), cumque nonnisi paucorum minutorum sit *ex hypothesi*, pro recta haberi potest. Quamobrem cum anguli BED & CBE sint recti (§. 309 *Geom.*), erunt anguli *o* & *u* (§. 147 *Geom.*), itemque *u* & *x* æquales recto (§. 241 *Geom.*), consequenter $o + u = x + u$ (§. 145 *Geom.*), atque ideo $o = x$ (§. 91 *Arithm.*). Est vero ut sinus anguli *x* (sive *o per demonstr.*) ad arcum BE ita sinus totus ad BD (§. 33). Ergo BE est ad BD ut sinus anguli *o* ad sinum totum (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM 1.

67. Cum sinus anguli *o* majorem habeat ad sinum totum rationem, si major, quam ubi minor fuerit (§. 203 *Arithm.*); eodem errore in metiendo

tiendo angulo ACB admisso, hoc est, arcu BE existente eodem, minor erit error in distantia determinanda admissus BD, ubi angulus *o* major, quam ubi minor fuerit (§. 206 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

68. Unde consequitur, talem hoc in casu fieri debere stationum A & C electionem, ut anguli A & C sint admodum obliqui, angulus vero *o* evadat recto proximus: id quod obtinetur si anguli A & C junctim sumti tantillo excedant rectum (§. 240 *Geom.*).

COROLLARIUM 3.

69. Anguli obtusi eundem sinum habent cum acutis, qui ipsis deinceps ponuntur (§. 5). Quamobrem si recto fuerint multo majores, perinde est in præsenti casu, ac si angulus o esset valde acutus. Quodsi autem angulum *o* in electione stationum obtusum desideres, tantillo rectum excedere debet, consequenter anguli A & C simul a recto tantillo deficiant necesse est.

COROLLARIUM 4.

70. Si angulus *o* fuerit rectus, arcus BE cum ipsa BD coincidit, atque adeo errori in distantia admisso æqualis reperitur, ubi in eadem mensura determinatur, in qua datur distantia stationum AC ex radio nempe CB (§. 435 *Geom.*).

COROLLARIUM 5.

71. Errore adeo in angulo C existente eodem, qui in distantia admittitur minimus omnium est, ubi angulus *o* fuerit rectus.

THEOREMA 7.

72. *Si in dimetienda distantia locorum AB ex duobus angulis A & C & uno latere AC error etiam in altero angulo metiendo A admittatur præter eum, qui in angulo C committitur; erit errorem in angulo A commissum metiens arcus D I distantia uno errore implicita AD tanquam radio descriptus ad errorem inde in distantia productum IH ut sinus anguli tertii o quantitate erroris primi m diminuti ad ejus cosinum.* Tab. II. Fig. 23.

DEMONSTRATIO.

Etenim si AH fuerit recta positione data, in quam ob errorem in angulo A metiendo admissum promovetur distantia AB, recta errorem primum *m* terminans CD continuanda, donec illi in H occurrat, eritque AH distantia ex duplici errore *m* & *k* admisso. Jam distantia uno errore implicita AD tanquam radio describatur arcus DI mensura erroris *k* (§. 57 *Geom.*); erit is tum ad AD, tum ad AI perpendicularis (§. 309 *Geom.*), consequenter anguli DIH & ADI recti (§. 75 *Geom.*), cumque arcus DI sit paucorum minutorum (§. 59) *Geom.*) pro recta haberi potest. Hinc porro ut in

ut in demonstratione præcedente colligitur esse $y = x = o - m$ (§. 239 *Geom.*). Est vero ut sinus anguli y ad DI ita sinus anguli z ad IH (§. 36). Ergo DI ad IH ut sinus anguli y ad sinum anguli z (§. 173 *Arithm.*), sive cosinum anguli y (§. 241 *Geom.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

73. *Si in dimetiendo angulo peccetur in defectu, error in distantia admissus eodem modo determinatur, nisi quod tum fiat subtractivus, atque adeo unus alterum imminuere, immo prorsus compensare possit, ubi alter additivus, alter subtractivus fuerit. Sed plura non addimus ob rationem paulo ante dictam.*

PROBLEMA 27.

Tab. II. Fig. 17. 74. *Invenire distantiam duorum locorum inaccessorum AB.*

RESOLUTIO.

1. Statione commoda in C electa investigetur quantitas anguli ACB, itemque angulorum D & E atque BCE (§. 152 *Geom.*), punctis D & E cum C in eadem linea designatis (§. 125 *Geom.*).
2. Investigetur etiam quantitas rectarum DC & CE (§. 126 *Geom.*).
3. Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E subtrahatur ex 180°, ut relinquantur anguli ACD & CBE (§. 148 (*Wolfii Math. Tom. I.*) *Geom.*): eodemque modo inveniatur angulus DAC.
4. Datis jam in triangulis DAC & CBE angulis cum latere uno, nempe DC in primo, CE in altero, inveniuntur AC & CB (§. 36) & hinc porro angulus CAB (§. 40), tandemque AB (§. 36).

PROBLEMA 28.

75. *Invenire altitudinem accessibilem AB.* Tab. II. Fig. 18.

RESOLUTIO.

1. Statione in E electa instrumentoque (§. 284 *Geom.*) rite collocato, investigetur quantitas anguli ADC (§. 152 *Geom.*).
2. Quæratur porro distantia stationis ab altitudine DC (§. 126 *Geom.*), quæ erit ad AC perpendicularis (§. 227 *Geom.*).
3. Cum adeo C sit rectus (§. 78 *Geom.*), in triangulo ACD invenietur AC (§. 36).
4. Huic si addatur BC; prodibit altitudo integra AB. *Q. e. i.*

THEOREMA 8.

76. *Si in quantitate anguli A investiganda aberretur, erit altitudo vera BD ad falsam BC ut tangens anguli veri DAB ad tangentem anguli captionei CAB.* Tab. II. Fig. 19.

DEMONSTRATIO.

Assumto AB pro sinu toto, erit

DB tangens anguli DAB; CB autem tangens anguli CAB (§. 7). Sunt itaque altitudines BD & BC ut tangentes angulorum DAB & BAC. *Quod erat unum.*

Eodem modo se habet demonstratio, si angulus erroneus sit minor vero.

COROLLARIUM 1.

77. Quoniam posita eadem quantitate anguli veri atque erronei eadem est ratio altitudinis veræ ad erroneam (§. 76); error plurium pedum committitur in altitudine majore quam in minore.

COROLLARIUM 2.

78. Quia tangentes arcuum majorum & valde exiguorum seu recto vel minuto proximorum minorem rationem inter se habent quam tangentes mediocrium seu semirecto vicinorum, minore nempe ad majorem relata canone tangentium teste; si idem error committitur in angulo majore aut valde exiguo & mediocri; error in altitudine admissus major erit in casu priore, quam in posteriore.

SCHOLION.

79. *Sit e. gr. angulus verus DAB* 30°, *AB* 67′: *erit altitudo vera* 3°8′6″. *Ponamus assumi angulum erroneum BAC* 31°: *is producet altitudinem erroneam BC* 4°0′2″ (§. 36). *Sit in distantia minore DE angulus DEB recto proximus* 86° *& assumatur per errorem angulus* 87°: *reperietur altitudo erronea* 5°1′6″, *quæ erroneam supra inventam excedit* 1°1′4″.

COROLLARIUM 3.

80. Quoniam itaque in distantia minore EB angulus E major est quam DAB in majore AB (§. 188 *Geom.*), in distantia autem valde remota difficulter anguli admodum exigui quantitas exacte determinatur: in metiendis altitudinibus distantia stationis ab altitudine assumenda est mediocris, ita ut angulus DEB non multum abeat a semirecto.

THEOREMA 9.

81. *Si instrumentum in A non fuerit horizontaliter collocatum, sed vel quantitate anguli BAD versus horizontem inclinatum vel quantitate anguli EAB ab eodem reclinatum; erit altitudo vera ad falsam ut tangens anguli veri CAB ad tangentem erronei CAD.* Tab. II. Fig. 20.

DEMONSTRATIO.

Sumto enim AB pro radio, CB est tangens anguli veri CAB (§. 7). Inferendum ergo: ut sinus totus ad tangentem CAB ita AB ad altitudinem veram. Infertur autem per errorem: ut sinus totus ad tangentem CAD ita AB ad altitudinem erroneam. Quamobrem ut tangens CAB ad tangentem CAD ita altitudo vera ad erroneam (§. 196 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

Idem

Idem eodem modo oſtenditur, ſi inſtrumentum quantitate anguli EAB a ſitu horizontali reclinetur. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

82. *Eadem ergo hic locum habent corollaria, quæ modo theoremati præcedenti ſubjecimus. Cæterum patet altitudines exactas non inveniri ob duplicem errorem, ex vitioſo nempe ſitu tam lineæ AC, quam AB commiſſum.*

PROBLEMA 29.

Tab. II. Fig. 21. 83. *Metiri altitudinem inacceſſam AB.*

RESOLUTIO.

1. Eligantur duæ ſtationes G & E cum altitudine AB in eadem recta (§. 284 *Geom.*) tanto intervallo DF diſtantes, ut angulus FAD non ſit nimis exiguus, nec altera ſtatio G nimis vicina altitudini AB (§. 78. 80).

2. Inveſtigetur quantitas angulorum ADC, AFC & CFB (§. 152 *Geom.*), itemque diſtantiæ FD longitudo (§. 126 *Geom.*).

3. Inveniatur primum in triangulo AFD ex datis angulo D *per obſervationem*, & angulo AFD (§. 149 *Geom.*) & latere FD latus AF (§. 36); dein ex notis in triangulo ACF præter rectum C angulo F & latere AF, latus AG itemque CF (§. 36); tandem ex cognitis in triangulo FCB præter rectum C angulo CFB & latere CF latus CB (§. 36).

4. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo quæſita AB (§. 86 *Arithm.*).

FINIS

Trigonometriæ planæ.

Trigon.

Trig. T. II.

ELEMENTA ANALYSEOS MATHEMATICÆ

TAM FINITORUM QUAM INFINITORUM.

PRÆFATIO.

APicem totius eruditionis humanæ conſcendimus Analyſin tradituri: eſt enim ars per calculum quantitatum generalem proprio Marte inveniendi veritates in Matheſi non minus pura, quam applicata. Elementis Arithmeticæ communis atque Geometriæ hactenus expoſitis inſtructus & Analyſi adjutus multa inveniet, quæ ex aliorum ſcriptis non ſine tædio alias haurire deberet; immo omnibus adhuc ignorata deteget. Ea vero perfectiſſima eſt ſtudiorum noſtrorum ratio, quæ paucis memoriæ mandatis aptos reddit ad inveniendum quodlibet eo maxime tempore, quo ejus cognitione opus. Nec major intellectus perfectio concipitur promptitudine ex datis quibusdam alia incognita eliciendi. Accedit, in moderna Analyſi artis ratiocinandi perfectiſſima occurrere exempla. Notiones enim ſignis expreſſæ imaginationi præſentia ſiſtunt, quæ alias ultra ejus ſphæram aſcenderent: longa ratiociniorum ſeries, quibus non ſine multa attentione ac circumſpectione notionum nexus detegitur, in artem ſignorum combinatoriam convertitur, conſtanter eandem & principiis paucis ac manifeſtis ſuperſtructam. Illud autem prorſus mirabile exiſtit, ope analyſeos unica ſæpius linea tot veritates exprimi, quas juxta communem methodum exponendas ac demonſtrandas volumina integra non caperent.

Hinc

Hinc unius lineæ intuitu integras fere disciplinas paucorum minutorum spatio addiscere licet, quibus juxta communem methodum comprehendendis anni complures vix sufficerent. Solidam ergo in Mathesi eruditionem consecuturus Analysi studeat opus est. Ne autem, non tam difficultate (ea enim revera nulla est), quam novitate rei deterritus a præstantissimo studiorum genere arceatur; Arithmeticam speciosam familiarem sibi reddat, neglectis sub initium regularum rationibus, sicubi difficultatem facessant, & exemplis numericis in locum earundem substitutis. Ubi ad exempla Algebraica pervenerit, non inutile judicamus, ut tyrones data per numeros variis modis explicent & idem problema in casibus specialibus aliquoties solvant: ita enim futurum, ut calculo facilius adsuescant & ejus rationes simplices perspiciant. Neque vero putandum est, integram Analysin jamdum esse inventam; quin potius tenendum, plurima adhuc subsidia deesse posterorum industria detegenda. Certe quæ in elementis Geometriæ docuimus, per modernam analysin non omnia eruuntur, inprimis si a linearum & superficierum situ pendent. Quamobrem *Leibnitius*, vir in omni eruditione summus, pro ea, quæ ipsi est, ingenii perspicacitate novam quandam *Analysin situs* excogitavit, peculiari calculi generi (quem *calculum* situs appellat) superstructam, a calculo magnitudinum, quibus in nostra Analysi utimur, toto cœlo differentis. Immo qui hactenus reperta animo comprehenderit & ad solvenda problemata cum cura adhibuerit; pluribus regulis inveniendi artem ipse locupletabit. Cæterum quæ vel in Arithmetica, vel in Geometria elementari studio prætermissa, ea per Analysin eruimus, ex Geometria quoque subliminiori investigantes, quæ præ reliquis scitu necessaria.

ELE-

ELEMENTA ANALYSEOS MATHEMATICÆ.

Pars I.

ELEMENTA ANALYSEOS FINITORUM TRADIT.

Sectio I. De ARITHMETICA SPECIOSA.

CAPUT I. *De* ARITHMETICA RATIONALIUM.

DEFINITIO 1.

1\.

ANalyſis Mathematica eſt methodus reſolvendi problemata mathematica.

DEFINITIO 2.

2\. *Arithmetica ſpecioſa* eſt, quæ computum quantitatum ſeu numerorum indeterminatorum docet. Vocatur etiam *Logiſtica ſpecioſa.*

HYPOTHESIS 1.

3\. *Quantitatum datarum ſigna ſint literæ Alphabeti priores,* a, b, c, d &c. *quæſitarum poſtremæ* z, y, x &c. *Quantitates æquales eadem litera indigitentur.*

SCHOLION 1.

4\. *Nempe cum quantitates datæ ac quæſitæ tanquam diſtinctæ intellectui repræſententur per diverſas notiones; eadem quoque tanquam diſtinctæ repræſentandæ ſunt imaginationi per ſigna diverſa.*

SCHOLION 2.

5\. *Nos* Carteſium *ſequimur in Geometria. Angli nonnulli exemplo* Harrioti

(*Wolſii Math. Tom. I.*)

rioti

rioti *in Artis analyticæ praxi incognitas quantitates vocalibus; cognitas consonantibus designant.* Vieta *hujus logisticæ inventor usus est literis majoribus; qui eam primus perfecit* Harriotus *& ipsum secutus* Cartesius *literas minores substituerunt.*

HYPOTHESIS 2.

6. *Si quantitatum denominandarum quædam relationes mutuæ dantur, aut aliunde tanquam cognitæ supponi possunt; eas quoque in denominatione exprimi consultum est.* E. gr. Si fuerint duæ quantitates quæsitæ, quarum una alterius tripla, & una vocetur x, major rectius dicetur $3x$, quam y. Similiter cum quantitas major sit aggregatum ex semisumma duarum quantitatum & earundem semidifferentia; minor vero differentia inter semisummam & semidifferentiam earundem quantitatum (§. 39 *Trigonom.*); consultum sæpius est, ut semisumma dicatur x & semidifferentia y, atque hinc quantitas major $x+y$, minor $x-y$, quam ut ipsa major x & minor y vocetur.

SCHOLION.

7. *Quinam fructus ex commoda quantitatum denominatione exspectandi, ex subsequentibus patebit. Breviatur calculus idemque facilitatur: resolutiones problematum sæpe magis genuinæ inveniuntur. Alii suo loco sese offerent. Plura circa denominationem moneri possent, nisi consultius judicaremus ea per exemplum, quam per præcepta doceri.*

HYPOTHESIS 3.

8. *Signa operationum arithmeticarum retineantur, quæ in Arithmetica communi tradidimus* (§. 63. 65. 68. 71. 254. 295.), *nisi quod quantitates se mutuo dividentes, ubi commodum fuerit, instar fractionum scribantur.*

E. gr. $\frac{a}{b} = a:b$; $\frac{3}{4} = 3:4$.

SCHOLION.

9. *Vulgo multiplicationis signum est* X. *E. gr.* ab *scribitur* a X b. *Sed cum hoc signum facile cum litera* x *a typothetis confundatur; usus ejus merito improbatur.*

HYPOTHESIS 4.

10. *Si vel unus, vel ambo factores ex pluribus literis componuntur; compositi parenthesi () includuntur.* E. gr. factum ex $a+b-c$ in d ita scribitur: $(a+b-c)d$. Similiter factum ex $a+b-c$ in $d-g$ hunc in modum: $(a+b-c)(d-g)$.

SCHOLION.

11. *Vulgo hæc facta ita scribunt:* $d \times \overline{a+b-c}$ & $\overline{a+b-c} \times \overline{d-g}$. *Sed cum hæc scriptio typothetis molestias creet, inprimis si ex alio capite linearum supra literas ducendarum numerus multiplicatur, signis Leibnitianis utendum esse judicamus, quæ non inutiliter*

in Actis

in actis Eruditorum Lipsiensibus usurpantur & ab admodum R. P. Guidone Grando (a) *in Italia primum introducta.*

HYPOTHESIS 5.

12. *Si quantitatum se mutuo dividentium una, vel ambæ ex literis pluribus componuntur; signo parentheseos () similiter utimur, nisi circumstantiæ singulares suadeant, eas fractionum instar scribi.* E. gr. Quotus ex $a+b$ per c ita scribitur; $(a+b):c$. Quotus vero ex $a+b$ per $c-d$ ita exprimitur; $(a+b):(c-d)$. Similiter $a:(a+b)$ designat quotum ipsius a per $a+b$ divisi. Iidem quoti communiter ita scribuntur: $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+b}{c-d}$, $\frac{a}{a+b}$.

HYPOTHESIS 6.

13. *Exponentes indeterminati tam rationum, quam dignitatum indicentur per m, n, r, s, t &c.* E. gr. x^m, y^m, z^r &c. designant potentias indeterminatas diversi generis (§. 254 *Arithm.*); mx, ny, rz multipla vel submultipla diversa quantitatum x, y, z, prout m, n, r vel numeros integros, vel fractos designant (§. 136 *Arithm.*).

HYPOTHESIS 7.

14. *Si radix ex pluribus literis componitur, parenthesi includitur & exponens ipsi suffigitur, ut ante.* E. gr. $(a+b-c)^2$ designat quadratum ex $a+b-c$; $(a+b-c)^m$ potentiam quamlibet seu indeterminatam ipsius $a+b-c$.

SCHOLION.

15. *Communiter ita scribunt*: $\overline{a+b-c}^{\,2}$, $\overline{a+b-c}^{\,n}$.

DEFINITIO 3.

16. *Quantitas* signo + affecta dicitur *positiva*, item *affirmativa* atque *nihilo major*: quæ vero signo — afficitur, *privativa*, item *negativa* atque *nihilo minor*, a nonnullis *absurda*.

COROLLARIUM 1.

17. Quoniam + est signum additionis (§. 63 *Arithm.*); — vero signum subtractionis (§. 65 *Arithm.*): quantitas positiva prodit, si vera aliqua nihilo additur, e. gr. $0+3=+3$, $0+a=+a$; privativa relinquitur, si quantitas aliqua vera ex nihilo subtrahitur, e. gr. $0-3=-3$, $0-a=-a$.

SCHOLION.

18. *Ponamus, te habere nummorum nihil tibique donari* 100: *habebis ergo* 100 *nummos, adeoque plus nihilo. Plus nempe habes quam ante. Hi nummi quantitatem positivam constituunt. Ponamus e contrario, te nihil habentem solvere debere* 100 *nummos*; 100 *ergo nummorum debitum contrahes, adeoque, antequam solutio fiat, minus nihilo habebis. Solvendi enim sunt* 100 *nummi, ut nihil habeas. Hoc debitum quantitas*

(a) in Quadratura circuli & Hyperbolæ part. 2. p. m. 58.

tas negativa est. Notandum vero quantitates positivas initio vel solitarie positas signo nullo affici. Cur vero positivæ dicantur nihilo majores, negativæ nihilo minores; ex corollario patet.

COROLLARIUM 2.

19. Sunt adeo quantitates privativæ verarum, per quas intelliguntur, defectus; consequenter non quantitates veræ.

SCHOLION 2.

20. *Defectum per eam quantitatem metimur, quæ deficit, & sic intelligibilis evadit.*

COROLLARIUM 3.

21. Si residuo additur, quod fuerat ablatum, ea prodit quantitas, ex qua subtractio facta (§. 106 *Arithm.*). Ergo $-a+a=0$, $-3+3=0$ (§. 17), hoc est, $-a$ & $+a$, itemque -3 & $+3$ se mutuo destruunt.

COROLLARIUM 4.

22. Quoniam defectus unus alterum excedere potest (e. gr. si 7 deficiunt, plura desunt, quam ubi 3 deficiunt), quantitates vero privativæ sunt verarum defectus (§. 19); ideo quantitas una privativa aliquoties sumta alteram superare potest. Quamobrem quantitates privativæ inter se homogeneæ sunt (§. 32 *Arithm.*).

COROLLARIUM 5.

23. Sed quia defectus positivæ quantitatis aliquoties sumtus positivam superare nequit, cum potius multo magis ab ea deficiat (§. 17); quantitates privativæ positivis heterogeneæ sunt (§. 32 *Arithm.*).

COROLLARIUM 6.

24. Cum adeo quantitates privativæ positivis heterogeneæ (§. 23), privativis homogeneæ sint, (§. 22); inter privativam & positivam ratio intercedere nequit, inter privativas vero ratio datur (§. 126 *Arithm.*). E. gr. $-3a : -5a = 3 : 5$.

SCHOLION 3.

25. *Non mirum videri debet inter quantitates privativas* $-3a$ & $-5a$ *eandem esse rationem, quæ est inter positivas* $+3a$ & $+5a$. *Quod enim quantitates quatuor, quarum binæ binis heterogeneæ sunt, proportionales esse possint, tum ex rationum doctrina intelligitur, tum ex Geometria manifestum est, in qua eandem rationem inter lineas esse demonstravimus, quæ inter superficies datur. E. gr. Parallelogramma æqualium basium rationem altitudinum habent* (§. 389 Geom.) *& in praxi regulæ trium pretia sumuntur ut mercium quantitates, licet pretia mercibus heterogenea sint. Falluntur autem, qui inter* 1 & -1 *atque inter* -1 & 1 *rationem eandem esse sibi persuadent* (§. 24).

THEOREMA 1.

26. *Quantitas quælibet pro unitate assumi potest.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas enim quælibet in se una est (§. 3 *Arithm.*), nec ad aliam determinatam tanquam ad unitatem jam refertur (§. 13 *Arithm.*). Ergo ipsa pro unitate assumi

assumi potest (§. 4 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA 1.

27. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas addere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ eodem signo afficiuntur; numeri iis præfixi adduntur ut in Arithmetica communi.
2. Si signis diversis afficiuntur, additio mutatur in subtractionem & residuo præfigitur signum majoris.
3. Quantitates diversis literis notatæ junguntur mediante signo + (§. 3).

$4a + 2b - 2c - 5d - g$	$a - b$
$5a - 2b + 6c + 2d - 3g$	c
$9a + 4c - 3d - 4g.$	$a - b + c$

DEMONSTRATIO.

Cum litera quælibet, qua quantitas aliqua indigitatur, pro unitate assumi possit (§. 26); erit $a + a + a + a = 4a$, consequenter $4a + 5a = 9a$ (§. 96 *Arithm.*). Eodem modo patet esse $-g - 3g = -4g$. *Quod erat unum.*

Quoniam $6c = 4c + 2c$, *per demonst.* erit $6c - 2c = 4c + 2c - 2c$ (§. 91 *Arithm.*). Sed $2c - 2c = 0$ (§. 21). Ergo $6c - 2c = 4c$. Similiter $-5d = -3d - 2d$, *per demonstr.* Sed $-5d + 2d = -3d - 2d + 2d$ (§. 88 *Arithm.*) & $-2d + 2d = 0$ (§. 21). Ergo $-5d + 2d = -3d$. *Quod erat alterum.*

Tertium per se patet (§. 8).

SCHOLION.

28. *Ut hic calculus facilius intelligatur, ponamus* a *denotare thalerum,* b *grossum,* c *nummum; habebimus*

$7a - 9b + 5c =$	7 th.	− 9 gr.	+ 5 num.
$3a + 5b - 9c =$	3	+ 5	− 9
$10a - 4b - 4c =$	10 th.	− 4 gr.	− 4 num.

Atque per idem exemplum facilius quoque capitur ratio, cur in casu diversitatis signorum additio in subtractionem mutetur & residuo signum majoris quantitatis relinquatur. Nimirum in summa 10 thalerorum deficiunt 9 grossi: quamobrem si quinque addantur, defectus minuitur & ad 4 reducitur. Quoniam vero non 5 grossi integri, sed demtis 9 nummis, summæ adjiciendi, summa 10 th. − 4 gr. *excedit genuinam 9 nummis, qui adeo auferendi. Jam cum in numero superiori, cui inferior additur, occurrant 5 nummi, hi quidem actu auferri possunt: qui vero adhuc desiderantur 4, tanquam defectus notandi. Et hac quidem ratione regula a primo inventore detecta.*

THEOREMA 2.

29. *In subtractione quantitatum com-*

compositarum signa subtrahendæ mutantur in contraria, nempe + in — & — in +.

DEMONSTRATIO.

Si $c+d$ fuerit subtrahenda ex $a+b$; differentiam esse debere $a+b-c-d$, adeoque signa + in quantitate subtrahenda in — mutari, ex hypoth.; (§. 8) patet. Sed si $c-d$ subtrahenda ex $a+b$ & integrum c subtrahitur, quantitas major subducta, quam fieri debebat. Ergo quod plus justo subtractum est d, iterum addendum. Prodit ergo $a+b-c+d$. *Q. e. d.*

PROBLEMA 2.

30. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ signa eadem habent & minor e majore subtrahenda; subtractio ut in Arithmetica communi (§. 103 *Arithm.*) absolvitur.
2. Si vero major e minori subducenda; contraria ratione minor e majore subtrahitur & residuo præfigitur signum —, si quantitates signo + afficiuntur; signum vero +, si signo — gaudent.
3. Si quantitates diversa signa habent; in additionem mutatur subtractio & aggregato præfigitur signum ejus quantitatis, ex qua subtractio facta est.
4. Si quantitates diversis literis notatæ, signa subtrahendæ tantum in contraria mutantur.

$$8a - 5c + 9d = 8\ \text{th.} - 5\ \text{gr.} + 9\ \text{num.}$$
$$6a - 8c - 7d = 6 \quad - 8 \quad - 7$$
$$\overline{2a + 3c + 16d = 2\ \text{th.} + 3\ \text{gr.} + 16\ \text{num.}}$$

$$9b + 15c - 7d + 8e - f$$
$$6b + 20c - 9d - 9e + 7f$$
$$\overline{3b - 5c + 2d + 17e - 8f}$$

$$a + b - c \qquad\qquad a + d$$
$$d - e + f \qquad\qquad c - e - g$$
$$\overline{a + b - c - d + e - f \qquad a + d - c + e + g}$$

DEMONSTRATIO.

Cum quantitates eadem litera notatæ sint vel unitates eædem, vel ejusdem unitatis multiplæ aut submultiplæ (§. 26); erit $8a - 6a = 2a$ (§. 35. 103 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si quantitas major $20c - 9d$ ex minore $15c - 7d$ subtrahenda; erit residuum $15c - 7d - 20c + 9d$ (§. 29). Sed $15c - 20c = -5c$ & $-7d + 9d = 2d$ (§. 27). Ergo $15c - 7d - 20c + 9d = -5c + 2d$. *Quod erat alterum.*

Si

Si $-9e+7f$ ſubtrahi debent ex $8e-f$; erit reſiduum $8e-f+9e-7f$ (§. 29). Sed $-f-7f=-8f$ & $8e+9e=17e$ (§. 27). Ergo $8e-f+9e-7f=17e-8f$. *Quod erat tertium.*

Quartum patet per theor. 2. (§. 29).

Aliter.

1. Signa quantitatis ſubtrahendæ mutentur in contraria (§. 29): quo facto
2. Additio fiat (§. 27) ſeu, quæ ſe mutuo deſtruunt, deleantur.

E. gr. ex $9b+15c-7d+8e-f$ ſubtrahi debet $6b+20c-9d-9e+f$ fiat (§. 29) $-6b-20c+9d+9e-f$; erit (§. 27) reſiduum $3b-5c+2d+17e-8f$. Nimirum $+6b-6b$, $+15c-15c$, $-7d+7d$, ſe mutuo deſtruunt (§. 21).

SCHOLION.

31. *Mirum videri poterat, quod cum quantitates privativæ poſitivis heterogeneæ ſint* (§. 23), *heterogeneæ autem nec addi* (§. 61 Arithm.), *nec a ſe invicem ſubtrahi poſſint* (§. 64 Arithm.), *privativæ tamen poſitivis addantur & ab iis ſubtrahantur. Enimvero rem curatius perpendens animadvertes proprie loquendo, privativam nunquam addi poſitivæ, nec ab eadem ſubtrahi: ſed in additione ſubtrahi, quod plus juſto fuerat additum* (§. 27); *in ſubtractione addi, quod plus juſto fuerat ſubductum* (§. 30).

THEOREMA 3.

32. *Si quantitas poſitiva per poſitivam multiplicetur aut dividatur, in utroque caſu quantitas prodit poſitiva.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim in multiplicatione ut unitas ad factorem unum, ita alter ad productum (§. 66 *Arithm.*). Sed uterque factor eſt poſitivus, *per hyoth.* Ergo & factum poſitivum eſſe debet (§. 24). *Quod erat unum.*

Si $+a$ ducitur in $+b$, factum eſt $+ab$, *per demonſtr.* Ergo ſi $+ab$ dividitur per $+a$, quotus erit $+b$; ſi per $+b$, quotus $+a$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 4.

33. *Si quantitas negativa per poſitivam multiplicetur aut dividatur, in utroque caſu quantitas prodit negativa.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicare idem eſt ac quantitatem aliquam aliquoties ſibimetipſi addere (§. 67 *Arithm.*).

Eſt

Est vero summa quantitatum negativarum negativa (§. 27). Ergo factum ex negativa in positivam negativum est. *Quod erat unum.*

Factum ex $-a$ in $+b$ est $-ab$ *per demonstr.* Ergo si $-ab$ dividitur per $+b$, quotus est $-a$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 5.

34. *Si quantitas negativa per negativam multiplicetur aut dividatur, quantitas positiva prodit.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas privativa per privativam proprie loquendo multiplicari nequit (§. 66 *Arithm.*): id quod ipsa notio quantitatis privativæ insinuat (§. 19), utpote quæ repugnat actui positivo, qualis est iterata ejusdem quantitatis additio, in qua multiplicatio consistit (§. 67 *Arithm.*). Quare hæc multiplicatio proprie tantum locum habet, ubi privativæ positivis junguntur, ita ut addi rursus debeat, quod plus justo fuerat subtractum: id quod evidentissime ita demonstramus.

Sit ACDB parallelogrammum rectangulum & in eo $AC = a$, $CD = b$. Ducatur EF ipsi CD parallela (§. 258 *Geom.*); erit ob rectos ad E & F (230 *Geom.*) & $EF = AB$, itemque $AE = BF$ (§. 238 *Geom.*), ABFE rectangulum (§. 100 *Geom.*). Tab. I. Fig. 1. Eodem modo ostenditur, ducta HG ipsi BD parallela; fore GHBD & BHIF, consequenter AEIH rectangula. Sit ergo $AE = c$, $GD = d$: erit $EC = a - c$, $CG = b - d$, atque hinc $ACDB = ab$, $AEIH = bc - dc$ & $HGDB = ad$ (§. 375 *Geom.* & §. 33 *Analys.*). Quodsi areas rectangulorum AI, & HD subtrahas ab area rectanguli AD; relinquitur area rectanguli ECGI, hoc est, factum ex $a - c$ in $b - d$ (§. 375 *Geom.*). Reperitur adeo $(a - c)(b - d) = ab - ad - bc + cd$ (§. 30). Unde apparet, factum ex $-c$ in $-d$ esse $+cd$. *Quod erat unum.*

In divisione quærimus, quoties quantitas una in altera contineatur (§. 69 *Arithm.*). Divisurus ergo quantitatem privativam per privativam quærit, quoties defectus unus in altero contineatur (§. 19): quotus adeo qui idem indicat (§. 69 *Arithm.*), utique quantitas positiva esse debet. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

35. *Possunt etiam theorema 3 & 4 ope rectanguli demonstrari.*

THE-

THEOREMA 6.

36. *Si quantitas positiva per negativam multiplicatur aut dividitur, quantitas privativa prodit.*

DEMONSTRATIO.

Cum in multiplicatione quantitas multiplicanda toties sibimetipsi addatur, quoties multiplicans unitatem continet (§. 66 *Arithm.*); quantitas vero privativa sit defectus alicujus quantitatis (§. 19): proprie loquendo positiva per privativam multiplicari nequit. Hinc denuo multiplicatio tantum locum habet, ubi privativæ positivis junguntur, ita ut subtrahatur, quod plus justo fuit additum: id quod ita demonstramus.

Tab. I. Fig. 2. Sint LMON & PMOQ rectangula & in iis NO $= a$, MO $= b$, QO$=c$, erit NQ $= a - c$, area PQOM$=bc$, LNOM$=ab$, (§. 368 *Geom.*), consequenter LNQP $= b\,(a-c) = ab - bc$. Ergo b ductum in $-c$ efficit $-bc$. *Quod erat unum.*

Factum ex $-c$ in $-d$ est $+cd$ (§. 34). Ergo si $+cd$ dividis per $-c$, quotus esse debet $-d$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA 7.

37. *In multiplicatione ac divisione eadem signa efficiunt $+$, diversa $-$.*

DEMONSTRATIO.

Si quantitates se mutuo multiplicantes aut dividentes fuerint positivæ vel privativæ; quantitas prodit in utroque casu positiva (§. 32. 34): si vero altera privativa, altera positiva, quantitas prodit privativa (§. 33. 36). Ergo eadem signa efficiunt $+$, diversa $-$. *Q. e. d.*

PROBLEMA 3.

38. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas in se invicem ducere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 111 *Arithm.*), nisi quod notetur regula: *eadem signa faciunt $+$; diversa $-$* (§. 37).

$$\begin{array}{r} a+c \\ b+d \\ \hline +ad+cd \\ ab+bc \\ \hline ab+ad+bc+cd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a+b-d \\ a-b-d \\ \hline -ad-bd+dd \\ -ab-bb+bd \\ aa+ab-ad \\ \hline aa-bb-2ad+dd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 = 8+4-2 \\ 2 = 8-4-2 \\ \hline -16-8+4 \\ -32-16+8 \\ 64+32-16 \\ \hline 20 = 68-48 \end{array}$$

Item $8 = 10 - 2$
$7 = 10 - 3$

$-30 + 6$
$100 - 20$

$56 = 100 - 50 + 6$
$= 50 + 6$

SCHOLION.

39. *Exemplum posterius demonstrationem exhibet ocularem multiplicationis per digitos. Nimirum 2 & 3 sunt distantiæ factorum a denario per digitos in utraque manu erectos repræsentari solitæ; quod relinquitur, factis ex distantiis istis in denarium a 100 subductis, indicatur digitis residuis in utraque manu &, ut ab erectis distinguantur, depressis, singulis nempe pro totidem denariis sumtis. Ita in nostro casu in altera manu deprimuntur digiti 2, in altera 3, simul 5, adeoque quinque numerantur decades. Summæ adjicitur factum ex digitis in utraque manu erectis in se invicem.*

PROBLEMA 4.

40. *Quantitates compositas dividere.*

RESOLUTIO.

Si quantitas una per alteram actu dividi potest, orta nempe ex divisore in aliam (§. 210 *Arithm.*); divisio instituitur ut in numeris (§. 117 *Arithm.*), notata tamen regula: *eadem signa faciunt* +, *diversa* — (§. 87).

In aliis casibus tantum observanda, quæ supra præcepimus (§. 8).

E. gr. dividere jubemur $aa - bb - 2ad + dd$ per $a - b - d$.

$$aa - bb - 2ad + dd \ (a + b - d$$
$$a - b - d) \ aa - ab - ad$$

$$+ab - bb - ad + dd$$
$$+ab - bb - bd$$

$$+bd - ad + dd$$
$$-ad + bd + dd$$

$$0$$

PROBLEMA 5.

41. *Fractionem fractioni addere, aut unam ex altera subtrahere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 236. 237. *Arithm.*).

E. gr. Sint fractiones addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Reductæ ad eandem denominationem erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, (§. 35 *Arithm.*). Ergo summa $\frac{ad + bc}{bd}$ (§. 27).

Similiter sit fractio $\frac{a}{b}$ subtrahenda ex

ex $\frac{c}{d}$ Reductæ erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, ut ante.

Ergo differentia $\frac{bc - ad}{bd}$ (§ 30).

PROBLEMA 6.

42. *Fractionem per fractionem multiplicare aut dividere.*

RESOLUTIO.

Denuo hic omnia fiunt ut in Arithmetica communi (§.239.243 *Arithm.*).

E. gr. Sint fractiones se mutuo multiplicaturæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: erit factum $\frac{ac}{bd}$.

Sint fractiones se mutuo divisuræ $\frac{ac}{db}$ & $\frac{a}{b}$; erit quotus $\frac{ac}{bd}$. $\frac{b}{a} = \frac{acb}{abd}$ $= \frac{c}{d}$ (§.231 *Arithm.*).

COROLLARIUM 1.

43. Cum $a = \frac{a}{1}$ (§.59 *Arithm.*);

erit factum ex a in $\frac{c}{d}$, hoc est, ex integra quantitate in fractam, $\frac{c}{d} . \frac{a}{1} = \frac{ac}{d}$.

Unde patet, numeratorem fractæ multiplicandum esse per integram, si fractio per integrum multiplicari debet: quemadmodum fit in Arithmetica communi (§. 242 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

44. Ergo quotus ex $\frac{c}{d}$ per a, hoc est, ex quantitate fracta per integram divisa, $\frac{c}{d} . \frac{1}{a} = \frac{c}{ad}$. Unde patet, denominatorem dividendi mulplicandum esse per divisorem & factum subscribendum numeratori immutato, si fractio per integrum dividenda.

PROBLEMA 7.

45. *Quantitatem quamcunque per divisorem compositum dividere, utut divisionem exactam non admittat.*

RESOLUTIO.

Divisio instituatur ut in Arithmetica communi (§. 117 *Arithm.*), tamdiu continuanda, donec quotus legem manifestet, juxta quam termini ejus in infinitum progrediuntur, observata subtractionis, itemque multiplicationis ac divisionis lege de signorum mutatione (§. 29. 37).

E. gr. Sit quantitas dividenda b, dividens $a + c$, erit:

$$a+c\,)\;b\;\left(\frac{b}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{bc^2}{a^3}-\frac{bc^3}{a^4}\right.\text{ \&c. in infin.}$$

$$b+\frac{bc}{a}$$

$$\overline{-\frac{bc}{a}}$$

$$-\frac{bc}{a}-\frac{bc^2}{a^2}$$

$$\overline{+\frac{bc^2}{a^2}}$$

$$+\frac{bc^2}{a^2}+\frac{bc^3}{a^3}$$

$$\overline{-\frac{bc^3}{a^3}}\text{ \&c. in infinitum.}$$

Nimirum si b per a dividitur, quotus est $\frac{b}{a}$ (§. 8). Factum ex $\frac{b}{a}$ in $a+c$ est $\frac{ab}{a}+\frac{bc}{a}$ (§. 43), hoc est, $b+\frac{bc}{a}$ (§. 223 *Arithm.*): quod ex dividenda b subductum relinquit $-\frac{bc}{a}$ (§. 29). Si porro $-\frac{bc}{a}$ per a dividitur, erit quotus $-\frac{bc}{a^2}$ (§. 44). Factum ergo ex $a+c$ in $-\frac{bc}{a^2}$, hoc est, $-\frac{abc}{a^2}-\frac{bc^2}{a^2}$ (§. 43. 37), seu $-\frac{bc}{a}-\frac{bc^2}{a^2}$ (§. 223 *Arithm.*), ex dividenda $-\frac{bc}{a}$ subtractum relinquit $+\frac{bc^2}{a^2}$ (§. 29). Unde patet, quomodo divisio continuanda. Inventis autem vel quinque terminis, tum quotus, tum ipsa divisionis ratio insinuat, quotum constare ex infinita terminorum serie, quorum numeratores sunt potentiæ ipsius c, quarum exponentes a numero ordinis unitate differunt, per b multiplicatæ; denominatores vero potentiæ ipsius a, quarum exponentes æquantur numero ordinis terminorum. E. gr. in termino tertio potentia ipsius c in numeratore secunda est, potentia vero ipsius a in denominatore tertia.

COROLLARIUM 1.

46. Si $b=1$ & $a=1$, substituto valore hoc in quoto, prodit $1-c+c^2-c^3$ &c. in infin. Quare $\frac{1}{1+c}=1-c+c^2-c^3$ &c. in infin.

COROLLARIUM 2.

47. Quodsi termini in quoto continuo decrescant, series dat quotum vero quantumlibet propinquum. E. gr. si $b=1$, $c=1$ & $a=2$; valoribus his substitutis in serie generali, aut divisione ut in exemplo universali instituta, repe-

reperietur $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ &c. Ponamus jam seriem terminari in termino quarto; in defectu quidem peccabitur, sed qui minor quam $\frac{1}{32}$. Si eadem terminetur in sexto; denuo peccabitur in defectu, sed qui minor $\frac{1}{128}$. Series igitur quo longius continuatur, eo propius ad verum quotum accedit.

SCHOLION.

48. *Similiter invenietur* $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ &c. in infin. $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256}$ &c. in infin. $\frac{1}{6} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625}$ &c. in infin. *En legem constantem, juxta quam omnes fractiones, quarum numerator unitas, per series infinitorum terminorum exprimere licet. Sunt nempe illæ series progressiones geometricæ decrescentes, ita quidem ut numerator semper sit unitas, denominator termini primi idemque exponens rationis unitate differat a denominatore fractionis resolvendæ.*

COROLLARIUM 3.

49. Si termini in quoto continuo crescunt, series a quoto tanto magis discedit, quo longius continuatur, nec quoto æqualis fit, nisi terminetur ultimumque residuum sub signo suo adjiciatur. E. gr. Sit $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$; reperietur quotus $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 64 + 128$ &c. Terminus unus 1 superat $\frac{1}{3}$ excessu $\frac{2}{3}$: termini duo deficiunt $\frac{4}{3}$. Termini tres excedunt $+\frac{8}{3}$, quatuor deficiunt $\frac{16}{3}$. Et ita porro. Ponamus seriem terminari in -8; erit $\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \frac{16}{3}$. Sed $1 - 2 + 4 - 8 = -5 = -\frac{15}{3}$. Ergo $\frac{1}{1+2} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = \frac{1}{3}$. Similiter si sit $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$; reperietur quotus $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. ubi termini numero pares $= 0$ deficiunt continuo $\frac{1}{2}$; termini autem numero impares conficiunt 1, consequenter excessus $= \frac{1}{2}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}$, vel $= 0 + \frac{1}{2}$. Ponamus seriem universalem (§. 46) terminari in $-c^3$; erit $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^2}{1+c} = \frac{1+c-c-c^2+c^2+c^3-c^3-c^4+c^4}{1+c}$ (§. 235 *Arithm.*) $= \frac{1}{1+c}$ (§. 21).

SCHOLION 1.

50. *Tyrones hoc problema cum suis corollariis sub initium prætermittere possunt, donec inferius ad illud provocetur.*

SCHOLION 2.

51. *Quoniam si* $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ *in seriem resolvitur, quotus a fractione proposita, quantumlibet continuatus, continuo differt* $\frac{1}{2}$ (§. 49), *resolutio in præsenti casu irrita evadit. Unde patet fons erroris, quem commisit* Guido Grandus *in Tractatu de quadratura circuli & hyperbolæ cor. 3. prop. 7. part. 1. p. m. 29, ubi infert ob* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. *in infinitum* $= 0$ *summam infinitarum nullitatum esse* $\frac{1}{2}$. *Nec veritatem attigisse liquet* Leibnitium *in Actis Eruditorum Tom. 5. Supplement. p. 264. & seqq.*

DEFINITIO 4.

52. Series *quæ ad verum valorem continuo appropinquant, dicuntur* convergentes: *quæ ab eodem continuo recedunt*, divergentes.

COROLLARIUM 1.

53. Ergo series fractionum continuo decrescentium (§. 47. 48) sunt convergentes; ceteræ vero, quarum termini continuo crescunt (§. 49), divergentes.

PROBLEMA 8.

54. *Potentiam quamcunque per aliam ejusdem radicis multiplicare vel dividere.*

RESOLUTIO.

I. In multiplicatione addantur exponentes, summa est exponens facti.

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & y^m & y^m & a^m & x^n \\ x^4 & y^m & y^n & a^r & x^s \\ \hline x^7 & y^{2m} & y^{m+n} & a^{m+r} & x^{n+s} \end{array}$$

II. In divisione exponens dignitatis dividentis subtrahatur ab exponente dividendæ; residuum est exponens quoti.

$$\frac{x^7}{x^4} \left(x^3 \quad \frac{y^{m+n}}{y^n} \left(y^m \quad \frac{a^m x^n}{a^r x^s} \left(a^{m-r} x^{n-s} \right.\right.\right.$$

DEMONSTRATIO.

Cum exponentes dignitatum in progressione Arithmetica (§. 251 333 *Arithm.*), dignitates in Geometrica (§. 250. 332 *Arithm.*) progrediantur; illi pro harum Logarithmis recte habentur (§. 334 *Arithm.*). Ergo summa exponentium, quos habent dignitates se mutuo multiplicantes, est exponens facti (§. 337 *Arithm.*); differentia exponentium, quos habent dignitates se mutuo dividentes, est exponens quoti (§. 343 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION.

55. *Progressiones istæ hæ sunt:*

$x^0 . x^1 . x^2 . x^3 . x^4 . x^5 . x^6 . x^7$ &c.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 &c.

Nempe $x : x = x^1 : x^1 = x^0$ (§. 54). *Sed* $x : x = 1$ (§. 69 Arithm.). *Ergo* $x^0 = 1$ (§. 87 Arithm.).

PROBLEMA 9.

56. *Potentiam quamcunque datam ad aliam dati exponentis evehere, aut ex eadem dati similiter exponentis radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Quoniam potentia data intuitu ejus, ad quam evehenda, radix est (§.246 *Arithm.*) & exponentes logarithmi dignitatum existunt *per demonstr. in probl. præc.* (§.54): exponens potentiæ novæ habebitur, potentiæ datæ exponente in exponentem ejus, ad quam evehi debet, ducto (§.341 *Arithm.*).

E. gr. Potentia x^m evecta ad dignitatem n est x^{mn}. Potentia y^3 evecta ad dignitatem 2 est y^6.

II. Non absimili modo liquet, Exponentem radicis haberi, si exponens dignitatis datæ dividatur per exponentem radicis datum (§.341 *Arithm.*).

E. gr. Radix quadrata ex x^6 est x^3: radix n ex x^{mn} est x^m: radix n ex x^m est $x^{m:n}$.

COROLLARIUM.

57. Est itaque $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$, $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 341 *Arithm.*), consequenter quantitates irrationales ad expressionem rationalem reduci possunt.

SCHOLION.

58. *Quantum in Analysi commodi afferat hæc reductio ex capite subsequente elucescet. Etenim si quantitates irrationales ad formam rationalium reducantur; peculiari pro iis calculo opus non est, sed rationalium instar tractari possunt: quemadmodum primi docuerunt* Leibnitius *atque* Nevvtonus.

CAPUT II.

De ARITHMETICA IRRATIONALIUM.

PROBLEMA 10.

59. *Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad eandem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[s]{y^r}$. Quoniam $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$

& $\sqrt[s]{y^r}$

& $\sqrt[s]{y^r} = y^{r:s}$ (§. 57) diversitas denominationis ab exponentibus diversis pendet, exponentes vero fractiones sunt, quæ ad alias ipsis æquales, sed ejusdem denominationis reduci possunt (§. 235 *Arithm.*). Ergo quantitates surdæ reducuntur ad eandem denominationem, exponentibus earundem ad eandem reductis. Erit adeo $x^{n:m} = x^{ns:ms}$ & $y^{r:s} = y^{mr:ms}$ seu $x^{n:m} = \sqrt[ms]{x^{ns}}$ & $y^{r:s} = \sqrt[ms]{y^{mr}}$ (§. 57).

E. gr. Sint quantitates reducendæ $\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{5}$. Quoniam $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ (§. 57); erunt reductæ $2^{3:6}$ & $5^{2:6}$ (§. 235 *Arithm.*), hoc est, $\sqrt[6]{2^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$ (§. 57), seu, 2 actu ad potentiam tertiam & 5 ad secundam evehendo, $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{25}$.

SCHOLION.

60. *Quodsi quis ægre admiserit reductionem ad eandem denominationem in exponentibus quantitatum irrationalium factam; is easdem formulas, quas ejus ope elicuimus, per algebram investigare potest, quemadmodum inferius docebimus.*

PROBLEMA II.

61. *Quantitates irrationales ad simpliciorem expressionem reducere.*

RESOLUTIO.

Sit quantitas reducenda $\sqrt[m]{a^n x^m}$. Quoniam ea æqualis est ipsi $a^{n:m} x^{m:m}$ (§. 57) & $x^{m:m} = x$ (§. 56) erit $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x = x \sqrt[m]{a^n}$. Locum ergo habet reductio, si quantitas sub signo radicali per istiusmodi potentiam, quæ eundem cum radicali signo exponentem habet, divisibilis. Divisio nempe actu instituenda, quoto sub signo radicali relicto & divisoris radice eidem præfixa.

E. gr. Sit reducenda $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2}$. Quoniam 8 est cubus perfectus, cujus radix 2: habebimus $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$. Eodem modo reperitur $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16.3} = 2\sqrt[4]{3}$.

COROLLARIUM I.

62. Si quantitates irrationales ejusdem gradus ad simpliciorem expressionem reductæ sub signis radicalibus eandem quantitatem relinquant; erunt inter se ut quantitates rationales signis præfixæ (§. 178 *Arithm.*), consequenter quantitates irrationales inter se commensurabiles esse possunt (§. 160 *Arithm.*).

E. gr.

E. gr. $\sqrt{8}=\sqrt{4.2}=2\sqrt{2}$ & $\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=3\sqrt{2}$. Ergo $2\sqrt{2}:3\sqrt{2}=2:3$, hoc est, $\sqrt{8}:\sqrt{18}=2:3$. In casu reliquo sunt incommensurabiles.

SCHOLION 1.

63. *Istud quantitatum irrationalium genus* communicantium *nomine venire solet.*

COROLLARIUM 2.

64. Per præsens adeo problema invenitur ratio rationalis irrationalium, si qua datur.

COROLLARIUM 3.

65. Quia $\sqrt[m]{a^n x^m}=x\sqrt[m]{a^n}$ (§. 61); quantitas ex parte rationalis, ex parte irrationalis ad pure irrationalem reducitur, si quantitas rationalis ad eam dignitatem evehitur, cujus gradum indicat exponens signo radicali præfixus, & dignitas per quantitatem sub signo radicali multiplicatur. E. gr. $5\sqrt{2}=\sqrt{2.25}=\sqrt{50}$ & $5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3.5^3}=\sqrt[3]{3.125}=\sqrt[3]{375}$.

SCHOLION 2.

66. *Quodsi quæsiveris, quomodo in resolutione innotescat, utrum quantitas sub signo radicali posita per potentiam aliquam requisitam sit divisibilis, nec ne, & quænam sit ista potentia; in divisores resolvenda est, inter quos locum obtineant necesse est omnes potentiæ a prima usque ad requisitam, si cum numeris nobis res fuerit. E. gr. Quæritur an* $\sqrt[4]{368}$ *sit divisibilis per aliquam potentiam quarti gradus. Resoluturus numerum 368 in suos divisores, reperiet*

2	184
4	92
8	46
16	23,

tentando nempe divisionem per numeros minores & quotos majores a latere ponendo. Invenies hic 2 potentiam primi gradus, 4 potentiam secundi, 8 potentiam tertii & 16 potentiam quarti. Ergo 16 est divisor quæsitus, consequenter $\sqrt[4]{368}=2\sqrt[4]{23}$.

PROBLEMA 12.

67. *Quantitates irrationales addere aut unam ex altera subtrahere.*

RESOLUTIO.

Si quantitates irrationales fuerint communicantes, adeoque reductæ (§. 61) fuerint commensurabiles (§. 63); quantitates rationales extra vinculum adduntur & a se invicem subtrahuntur, ibique summa, hic differentia denuo præfigitur signo radicali. Reliqua omnia sunt ut in additione & subtractione rationalium.

Ita reperietur $\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ (§ 61) $=5\sqrt{2}=\sqrt{50}$ (§ 65) & $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3.8}+\sqrt[3]{3.27}=2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{375}$.

Similiter $\sqrt{18}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{81}=5\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{24}$.

Contra $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$ cum ſint incommenſurabiles (§. 62); ſumma erit $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ (§ 27), & differentia $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ (§. 30).

Hinc & intelliguntur exempla in compoſitis tum in additione:

$$4\sqrt{3}-5\sqrt{2}+7\sqrt{7}+8\sqrt{5}$$
$$\sqrt{3}+9\sqrt{2}+3\sqrt{7}-4\sqrt{5}$$

$5\sqrt{3}+4\sqrt{2}+10\sqrt{7}+4\sqrt{5}$ ſum:
hoc eſt $\sqrt{3.25}+\sqrt{2.16}+\sqrt{7.100}+\sqrt{5.16}$
ſeu $\sqrt{75}+\sqrt{32}+\sqrt{700}+\sqrt{80}$

tum in ſubtractione

$$5\sqrt{2}-7\sqrt{3}+8\sqrt{10}$$
$$3\sqrt{2}+5\sqrt{3}-9\sqrt{10}$$

$2\sqrt{2}-12\sqrt{3}+17\sqrt{10}$ different.
hoc eſt $\sqrt{2.4}-\sqrt{3.144}+\sqrt{10.289}$
ſeu $\sqrt{8}-\sqrt{432}+\sqrt{2890}$

DEMONSTRATIO.

Omnia manifeſta ſunt ex demonſtratione probl. 1 & 2 (§. 27. 30).

PROBLEMA 13.

68. *Quantitates irrationales per irrationales multiplicare ac dividere.*

RESOLUTIO.

Multiplicentur aut dividantur quantitates ſub ſigno radicali; ibi facto, hic quoto præfigatur ſignum idem radicale cum ſuo exponente. Quodſi radicales quantitates fuerint diverſæ denominationis ante omnia reducantur ad eandem (§. 59).

E. gr. in multiplicatione $\sqrt{3}.\sqrt{5}=\sqrt{15}$ & $\sqrt{12}.\sqrt{3}=\sqrt{36}=6$. Item in compoſitis

$$\begin{array}{ll} \sqrt{3}+\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \hline -\sqrt{6}-2 & +\sqrt{6}+3 \\ 3+\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \\ \hline 3-2=1 & 2\sqrt{6}+5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7\sqrt{3}-5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{8}+3\sqrt{6} \\ \hline +21\sqrt{18}-15\sqrt{12} \\ 35\sqrt{24}-100 \\ \hline 35\sqrt{24}+21\sqrt{18}-15\sqrt{12}-100 \end{array}$$

h. e. $70\sqrt{6}+63\sqrt{2}-30\sqrt{3}-100$

$$\begin{array}{l} \sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\ \sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\ \hline +16+8+32 \\ +4+2+8 \\ 8+4+16 \\ \hline 98 \end{array}$$

Similiter in diviſione $\sqrt{8}:\sqrt{2}=\sqrt{4}=2$ & $\sqrt{12}:\sqrt{6}=\sqrt{2}$. Item in compoſitis.

$$\sqrt{15}-\sqrt{6}+\sqrt{12}\ (\sqrt{5}-\sqrt{2}+2$$
$$\sqrt{3})\ \sqrt{15}$$
$$\begin{array}{l} \hline -\sqrt{6}+\sqrt{12} \\ -\sqrt{6} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ \hline 0 \end{array}$$

SCHOLION 1.

69. *Interdum etiam divisio locum habet, si divisor compositus est. Sed cum rarissimus sit ejus usus & ea divisione ignorata maxime præclaros in Analysi progressus facere detur, nec difficultate res careat; eam hic exponi superfluum judicamus. Docet ipsam* Ozanamus *in Novis Elementis Algebræ* (a).

SCHOLION 2.

70. *Cæterum ex tradito hactenus calculo liquet, si quantitatem duplici signo radicali affici contingat, e. gr. si fuerit* $(3+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}}$, *operationes omnes eodem modo peragi, modo notetur, quantitatem sub primo vinculo eodem modo tractari debere, quo rationalem in antecedentibus tractavimus. E. gr.*

$$\begin{array}{l} \sqrt{(8\sqrt{3})} = 2\sqrt{(2\sqrt{3})} \ (\S.61) \\ \sqrt{(9\sqrt{12})} = \sqrt{(2.9\sqrt{3})} = 3\sqrt{(2\sqrt{3})} \\ \hline \sqrt{(8\sqrt{3})} + \sqrt{(9\sqrt{12})} = 5\sqrt{(2\sqrt{3})} \\ \qquad = \sqrt{(50\sqrt{3})} \\ \qquad = \sqrt{\sqrt{7500}}. \end{array}$$

Similiter in multiplicatione

$$\begin{array}{ll} 3+\sqrt{2} & \sqrt{\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\sqrt{2}} & \sqrt{(5\sqrt{5})} \\ \hline 3\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{(2\sqrt{2})} & 5+\sqrt{(5\sqrt{10})} \end{array}$$

h.e. $\sqrt{(9\sqrt{2})}+\sqrt{(2\sqrt{2})}$ s. $5+\sqrt{\sqrt{250}}$

seu $\sqrt{\sqrt{162}}+\sqrt{\sqrt{8}}$

$$\begin{array}{ll} \sqrt{(3+\sqrt{2})} & \sqrt{(3+\sqrt{2})} \\ \sqrt{(5-\sqrt{3})} & \sqrt{(3-\sqrt{2})} \\ \hline & -3\sqrt{2}-2 \\ -3\sqrt{3}-\sqrt{6} & 9+3\sqrt{2} \\ 15+5\sqrt{2} & \\ \hline & \sqrt{7} \\ \sqrt{(15+5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6})} & \end{array}$$

Dicuntur istiusmodi radices, *qualis est* $\sqrt{(3+\sqrt{2})}$ universales.

SCHOLION 3.

71. Radices *vero* imaginariæ *dicuntur, si quantitas sub signo radicali fuerit negativa, veluti* $\sqrt{-2}$, *cum quadratum* -2 *sit quantitas impossibilis, propterea quod omne quadratum sit positivum* (§. 246 Arithm. & §. 37 Anal.). *Facile autem patet additionem & subtractionem radicum imaginariarum eodem modo fieri debere ac realium.* Ita $\sqrt{-18}+\sqrt{-8} = 3\sqrt{-2}+2\sqrt{-2} = 5\sqrt{-2} = \sqrt{-50}$ & $\sqrt{-18}-\sqrt{-8} = \sqrt{-2}$. *Quoniam vero quantitas privativa sub signo radicali consideratur instar positivæ, in multiplicatione signum non mutatur, sed facto perinde ac factoribus præfigitur signum* $-$: *alias enim factores imaginarii efficerent factum reale, quod utique absurdum. Quamobrem regula de signis tantummodo observatur respectu radicum, minime vero respectu quantitatum sub signo radicali positarum.*

E.gr.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{-5}-\sqrt{-7} & \sqrt{-3}+\sqrt{-2} \\ \sqrt{-3} & +\sqrt{-3} \\ \hline \sqrt{-15}-\sqrt{-21} & -3+\sqrt{-6} \\ & \sqrt{-8} \end{array}$$

(a) Nouveaux Elemens d'Algebre lib. 1, probl. 4. & seqq. p. 7. & seqq.

$$\begin{array}{r} \sqrt{-8}+\sqrt{-2} \\ \sqrt{-8}-\sqrt{-2} \\ \hline +4+2 \\ -8-4 \\ \hline -6 \end{array}$$

Nimirum $\sqrt{-2}.\sqrt{-2} = -2$ & $+1.-1 = -1$. *Ergo* $-1.-2 = +2$.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3} \\ 3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2} \\ \hline -6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6} \\ -45+6\sqrt{-15} \\ \hline -45-6\sqrt{-10}+6\sqrt{-15}-4\sqrt{-6} \end{array}$$

CAPUT III.

De USU CALCULI LITTERALIS IN INVENIENDIS THEOREMATIS.

PROBLEMA 14.

72. *Invenire, qualis numerus prodeat ex parium additione, subtractione ac multiplicatione.*

Quoniam numerus par per 2 dividi potest (§. 72 *Arithm.*), dicatur $2a$. Similiter alius numerus par sit $= 2c$. Erit

$2a$	$2a$	$2a$
$2c$	$2c$	$2c$
summa $2a+2c$	Diff. $2a-2c$	Fact $4ac$

Theorema: Summa, item differentia atque factum duorum numerorum parium est numerus par.

PROBLEMA 15.

73. *Invenire, qualis numerus prodeat, si parem impari addas, vel parem ab impari subtrahas, vel denique parem per imparem multiplices.*

Numerus par sit $2a$ (§. 72 *Arithm.*), impar $2c+1$ (§. 73 *Arithm.*). Erit

$2c+1$	$2c+1$
$2a$	$2a$
$2a+2c+1$ Summa:	$2c+1-2a$ Diff.

$$\begin{array}{c} 2c+1 \\ 2a \\ \hline 4ac+2a \text{ Factum.} \end{array}$$

Theorema. Si parem impari addas aut unum ex altero subtrahas; ibi aggregatum, hic differentia est numerus impar.

impar. Si vero numerus par & impar se mutuo multiplicent, factum est numerus par.

PROBLEMA 16.

74. *Invenire, qualis prodeat numerus, si impar impari addatur, aut unus ex altero subtrahatur, aut si impar imparem multiplicet.*

Sint numeri impares $2a+1$ & $2b+1$ (§. 73 *Arithm.*): erit

$$\begin{array}{ll} 2a+1 & 2a+1 \\ 2b+1 & 2b+1 \\ \hline 2a+2b+2 \text{ Summa} & 2a-2b \text{ Different} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline +2a+1 \\ 4ab+2b \\ \hline 4ab+2a+2b+1 \text{ Factum.} \end{array}$$

Theorema: Si numerus impar impari additur aut ab eo subtrahitur, ibi summa, hic differentia est numerus par. Si vero impar imparem multiplicet, factum est numerus impar.

PROBLEMA 17.

75. *Invenire, qualis numerus prodeat, si meros numeros pares, aut numeros impares multitudine pari, aut denique numeros impares multitudine impari addas.*

Sint numeri pares $2a, 2b, 2c, 2d$, &c. erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c, numerus par (§, 72 *Arithm.*).

Theorema: Summa numerorum parium quotcunque est numerus par.

Sint numeri impares $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ &c. (§. 73 *Arithm.*) numerus eorundem $2m$ (§. 72 *Arithm.*). Erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m$, numerus par (§. 72 *Arithm.*). Tot scilicet sunt unitates, quot termini.

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque multitudine pari est numerus par.

Sint numeri impares ut ante $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ &c. numerus eorundem $2m+1$. Erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m+1$, numerus impar (§. 73 *Arithm.*).

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque, si numero impares fuerint, est numerus impar.

SCHOLION.

76. *Notetur in his problematibus denominandi artificium, quod consistit in analytica expressione numeri paris & imparis, quæ eorum definitiones repræsentat.*

PROBLEMA 18.

77. *Invenire qualis sit numerus, per quem impar parem metitur.*

Quodsi numerus impar parem metitur, erit par factum ex impari per parem, (§. 74 *Arithm.*), adeoque $(2a+1)\,2b = 4ab+$

$ab+2b$. Est igitur $(4ab+2b):(2a+1)=2b$ (§. 210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens parem eum metitur per parem.

COROLLARIUM 1.

78. Patet simul, numerum, qui metitur parem per imparem, esse parem.

COROLLARIUM 2.

79. Et quoniam $(2ab+b):(2a+1)=b$; liquet porro, si impar metiatur parem, illum quoque hujus dimidium metiri.

PROBLEMA 19.

80. *Invenire qualis sit numerus, per quem impar imparem metitur.*

Quodsi impar imparem metitur, erit hic factum ex impari in imparem (§. 73. 74), adeoque $(2a+1)(2b+1)$ seu $4ab+2a+2b+1$. Est igitur $(4ab+2ab+2b+1):(2a+1)=2b+1$ numerus impar (§. 210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens imparem eum metitur per imparem.

PROBLEMA 20.

81. *Determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt.*

Sit radix una $=n$, erit altera $n+1$: quadratum majoris n^2+2n+1 (§. 246 *Arith.*). minoris n^2

Differentia $2n+1$

Theorema. Differentia duorum quadratorum, quorum radices unitate differunt, est numerus impar duplo radicis minoris unitate aucto æqualis, seu summa radicum.

COROLLARIUM 1.

82. Facillime ergo construuntur Tabulæ numerorum quadratorum pro radicibus in serie naturali progredientibus. Summa nempe radicis antecedentis & consequentis continuo additur quadrato antecedenti, ut prodeat consequens.

COROLLARIUM 2.

83. Si $n=1$, erit $2n+1=3$: si $n=2$, erit $2n+1=5$: si $n=3$, erit $2n+1=7$: si $n=4$, erit $2n+1=9$ &c. Differentiæ itaque numerorum quadratorum sunt numeri impares in continua serie progredientes: unde ex continua numerorum imparium additione nascuntur numeri quadrati.

Radic.	Num. impar.	Num. Quadr.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

PRO-

PROBLEMA 21.

84. *Determinare differentiam duorum cuborum, quorum radices unitate differunt.*

Sint radices n & $n+1$: erit

Cubus major n^3+3n^2+3n+1 (§. 248 *Arithm.*)
minor n^3

Differentia $3n^2+3n+1$, hoc est, $n^2+2n+1+2n^2+n$. Sed $n^2+2n+1=(n+1)^2$. Ergo differentia inventa $(n+1)^2+2n^2+n$.

Theorema. Differentia duorum numerorum cubicorum, quorum radices unitate differunt, est aggregatum ex quadrato radicis majoris, duplo quadrato minoris & radice minore.

COROLLARIUM.

85. Constructo itaque numerorum quadratorum canone (§. 82), per solam additionem inde porro construitur canon numerorum cubicorum.

PROBLEMA 22.

86. *Determinare quantitatem rectanguli ex summa duarum quantitatum in majorem vel in minorem, itemque in differentiam eorundem.*

Sit quantitas major Q, minor q: erit summa $Q+q$, differentia $Q-q$. Hinc (§. 375 *Geom.*)

$$\begin{array}{c} Q+q \\ Q \\ \hline Q^2+Qq \end{array} \qquad \begin{array}{c} Q+q \\ q \\ \hline Qq+q^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} Q+q \\ Q-q \\ \hline -Qq-q^2 \\ Q^2+Qq \\ \hline Q^2-q^2 \end{array}$$

Theorema. Rectangulum ex summa duarum quantitatum (e. gr. linearum) in alterutram æquatur rectangulo partis unius in alteram atque Quadrato partis alterutrius. Rectangulum vero ex summa in differentiam æquale est differentiæ quadratorum partium.

COROLLARIUM.

87. Quodsi rectangula Q^2+Qq & $Qq+q^2$ addantur; prodit $Q^2+2Qq+q^2$ quadratum ipsius $Q+q$ (§. 261 *Arithm.*). Quare rectangula ex toto in partem alterutram simul æquantur quadrato totius.

PROBLEMA 23.

88. *Si totum sit divisum in duas partes æquales & in duas inæquales, determinare rectangulum partium inæqualium.*

Sint partes æquales a & a, differentia inter partem æqualem & inæqualem b; erit inæqualium major $a+b$, minor $a-b$; consequenter $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Ergo si addatur b^2, habebitur a^2.

Theorema. Si totum sit divisum in duas partes æquales & inæquales; erit rectangulum partium inæqualium una cum quadrato differentiæ partis æqua-

lis

lis ab inæquali, æquale quadrato partis æqualis.

COROLLARIUM.

89. Quoniam $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ & $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (§. 261 *Arithm.*); erit summa $2a^2 + 2b^2$, hoc est, summa quadratorum partium inæqualium æqualis est duplo quadrato partis dimidiæ & duplo quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

PROBLEMA 24.

90. *Determinare alia rectangula ex partibus duabus, in quas totum aliquod divisum.*

Sint partes $\mathfrak{Q}$ & q: erit totum $\mathfrak{Q}+q$, hujus quadratum $\mathfrak{Q}^2 + 2\mathfrak{Q}q + q^2$. Quodsi $\mathfrak{Q}^2$ addas; prodibit $2\mathfrak{Q}^2 + 2\mathfrak{Q}q + q^2 = 2\mathfrak{Q}(\mathfrak{Q}+q) + q^2$.

Theorema. Quadratum totius una cum quadrato partis unius æquale est rectangulo ex duplo ejusdem partis in totum atque quadrato partis alterius.

Quodsi $2\mathfrak{Q}+q$ in seipsum ducas; prodibit $4\mathfrak{Q}^2 + 4\mathfrak{Q}q + q^2$.

Theorema. Quadratum ex toto & parte una æquatur quadrato partis alterius una cum quadruplo quadrato partis illius & quadruplo rectangulo quadruplo partium in se invicem.

PROBLEMA 25.

91. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in partes tres inæquales diviso atque parte una.*

Sit totum $a+b+c$; erit $(a+b+c)c = ac + bc + c^2$.

Theorema. Rectangulum ex toto in tres partes inæquales diviso in partem unam æquatur quadrato ejusdem partis atque rectangulo ex eadem in summam duarum reliquarum.

PROBLEMA 26.

92. *Determinare quantitatem rectanguli ex linea in partes quotcunque divisa & insecta altera.*

Sint partes lineæ sectæ a, b, c, &c. erit linea secta $= a+b+c$ &c. Sit porro linea insecta $= d$: erit $(a+b+c$ &c.$)\, d = ad + bd + cd$ &c.

Theorema. Si linea recta fuerit in partes quotcunque divisa & præterea alia insecta, erit rectangulum sub iis comprehensum æquale rectangulis sub insecta & singulis sectæ partibus contentis.

PROBLEMA 27.

93. *Determinare quantitatem rectangulorum ex toto in duas partes diviso in partes singulas.*

Sit totum $= a+b$, erit $(a+b)\, a = a^2 + ab$ & $(a+b)\, b = ab + b^2$, Ergo summa $= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ (§. 261 *Arithm.*),

Theorema. Si recta secta fit utcunque, erunt rectangula sub tota & partibus comprehensa quadrato totius æqualia.

PROBLEMA 28.

94. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in duas partes æquales*

æquales diviso & adjecto in adjectum.

Sit totum in duas partes æquales divisum $= 2a$ & adjectum $= c$; erit compositum $= 2a + c$ consequenter $(2a+c)\,c = 2ac + c^2$. Sed $(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$. Ergo differentia $= a^2$.

Theorema. Rectangulum sub toto & adjecto in adjectum una cum Quadrato partis dimidiæ est æquale Quadrato compositi ex dimidio & adjecto.

PROBLEMA 29.

95. *Invenire theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo.*

Sit $a + b$ radix binomia. Ducatur ea in se ipsam, erit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ &c. (§. 229 *Arithm.*): ceu videre est ex Tabula, quam hic exhibemus.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^3$	$10a^2b^2$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

Ex tabulæ hujus consideratione manifestum est; terminos potentiarum componi ex quibusdam factis litteralibus & numeris præfixis, quos *Uncias* cum *Oughtredo* (b) vocant. Patet autem ulterius, facta reperiri, si fiant duæ progressiones Geometricæ, quarum

(b) Clavis Mathematicæ c. 12. §. 6. p. m. 38.

rum prima a potentia desiderata partis primæ radicis incipiat & in unitate desinat, altera vero ab unitate incipiat & in desiderata potentia partis secundæ radicis desinat, atque termini ejusdem ordinis in utraque serie in se invicem ducantur. E. gr. quærenda potentia sexta: scribe

$a^6 . a^5 . a^4 . a^3 . a^2 . a . 1.$ series I.
$1. b . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b^6$ series II.

erunt $a^6 + a^5 b + a^4 b^2 + a^3 b^3 + a^2 b^4 + a b^5 + b^6$ facta, ex quibus componitur potentia sexta ipsius $a+b$.

Apparet denique, uncias reperiri, si exponentes potentiarum secundæ seriei seu ipsius b sub exponentibus potestatum primæ seriei seu ipsius a scribantur & nota prima ex serie superiore sumatur pro numeratore, prima ex inferiore pro denominatore fractionis, quæ vicem subit unciæ termini secundi potestatis; similiter factum ex nota prima in secundam ex serie superiore sumatur pro numeratore, factum ex prima in secundam ex serie inferiori pro denominatore fractionis, quæ unciæ termini tertii potentiæ æqualis &c. E. gr. pro potentia sexta erit:

6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6

Hinc $\frac{6}{1} = 6$ uncia termini secundi potentiæ sextæ; $\frac{6.5}{1.2} = \frac{30}{2} = 15$ uncia termini tertii; $\frac{6.5.4}{1.2.3} = \frac{120}{6} = 20$ uncia termini quarti; $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = \frac{6.5}{1.2} = \frac{30}{2} = 15$ uncia termini quinti; $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = \frac{6}{1} = 6$ uncia termini sexti; $\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = 1$ uncia termini ultimi.

Habemus adeo methodum datam radicem binomiam ad quamcunque potentiam determinatam evehendi. Quodsi vero regulam pro potentia indeterminata desideres, non alia re opus est, quam ut exponens dicatur m: ita habebimus

$a^m . a^{m-1} . a^{m-2} . a^{m-3} . a^{m-4} . a^{m-5}$
$1. \quad b. \quad b^2. \quad b^3. \quad b^4. \quad b^5$ &c.

adeoque $a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + a^{m-3} b^3 + a^{m-4} b^4 + a^{m-5} b^5$ &c.

quæ

quæ sunt facta pro terminis potentiæ indeterminatæ in infinitum continuandæ. Similiter invenientur unciæ, ut ante. Cum enim exponentes sint:

$$\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}.\frac{m-5}{6}\ \&c.$$

erit $\frac{m}{1}$ uncia termini secundi potentiæ; $\frac{m.m-1}{1.2}$ uncia tertii; $\frac{m}{1}.\frac{m-1.m-2}{2.3}$ uncia quarti; $\frac{m.m-1.}{1.2.}\frac{m-2\ m-3}{3.4}$ uncia quinti; $\frac{m.m-1.}{1.2.}\frac{m-2.m-3.m-4}{3.4.5}$ uncia sexti; $\frac{m.m-1}{1.2.}\frac{m-2.m-3.m-4.m-5}{3.4.5.6}$ uncia septimi &c.

Quare si has uncias in facta ipsis respondentia & paulo ante reperta ducas; prodibit formula binomii ad potentiam indeterminatam elevati: $a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4+\frac{m.m-1.}{1.}\frac{m-2.m-3.m-4}{2.3.4.5}a^{m-5}b^5+\frac{m.m-1.}{1.}\frac{m-2.m-3.m-4.m-5}{2.3.4.5.6}a^{m-6}b^6$ &c. in infinitum.

Quoniam vero $a^{m-1}=a^m:a$, $a^{m-2}=a^m:a^2$, $a^{m-3}=am:a^3$, $a^{m-4}=a^m:a^4$, $a^{m-5}=a^m\ a^5$ &c, in infinit. (§. 54); his valoribus substitutis (§. 15 *Arithm.*), formula in sequentem degenerat: $a^m+\frac{m.a^m b}{1.\ a}+\frac{m.m-1.\ a^m b^2}{1.2\ a^2}+\frac{m.m-1.m-2.\ a^m b^3}{1.2.3\ a^3}+\frac{m.m-1.m-2\ m-3.\ a^m b^4}{1.2.3.4\ a^4}+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.\ a^m b^5}{1.2.3.4.5\ a^5}+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.\ a^m b^6}{1.2.3.4.5.6\ a^6}$ &c. in infinit.

Quodsi jam porro cum viro summo, *Isaaco Nevvtono* (c) ponamus $a=P$ & $b:a=Q$; erit $a^m=P^m$, $b^2:a^2=Q^2$, $b^3:a^3=Q^3$, $b^4:a^4=Q^4$,

(c) in epistola A. 1676 ad *Leibnitium* data apud *Wallisium* Operum Vol. III. f. 622.

$= Q^4$, $b^5 : a^5 = Q^5$ &c. consequenter his valoribus substitutis formula: $P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m.m-1}{1.2} P^m Q^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} P^m Q^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} P^m Q^4$ &c.

Ponatur porro $P^m = A$, erit $\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1} AQ$. Sit $\frac{m}{1} P^m Q = B$; erit $\frac{m.m-1}{1.2} P^m Q^2 = \frac{m-1}{2} BQ$. Sit $\frac{m-1}{2} BQ = C$, erit $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} P^m Q^3 = \frac{m-2}{3} CQ$. Sit $\frac{m-2}{3} CQ = D$: erit $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} P^m Q^4 = \frac{m-3}{4} DQ$. Sit $\frac{m-3}{4} DQ = E$: erit $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5} P^m Q^5 = \frac{m-4}{5} EQ$. Sit $\frac{m-4}{5} EQ = F$: erit $\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6} P^m Q^6 = \frac{m-5}{6} FQ$ &c. in infinit.

Habetur ergo tandem $(a+b)^m = (P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ + \frac{m-4}{5} EQ + \frac{m-5}{6} FQ$ &c. in infinit.

SCHOLION 1.

96. Equidem hoc theorema nonnisi per inductionem eruimus, quæ inter demonstrandi methodos locum minime habet: sed cum hac inductio fundetur in observatione legis constantis atque necessariæ, in inveniendo tuto adhibetur, etsi consultum sit, reperta alio postea modo demonstrari.

SCHOLION 2.

97. Ut vero theorema facilius intelligatur, exemplo numerico id illustrare lubet. Ponamus ergo inveniri debere dignitatem quartam radicis 18 *seu* 10 + 8: *erit* $m = 4$, $P = 10$, $Q = 8 : 10 = \frac{4}{5}$, *consequenter*

$P^m =$

$$P^m = 10^4 = 10000 = A$$

$$mAQ = 4.\ 10000.\ \tfrac{4}{5} = \frac{160000}{5} = 32000 = B$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{3}{2}.\ 32000.\ \tfrac{4}{5} = \frac{6}{5}.\ 32000 = 6.\ 6400 = 38400 = C$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = \tfrac{2}{3}.\ 38400.\ \tfrac{4}{5} = \tfrac{8}{15}\ 38400 = \frac{307200}{15} = 20480 = D$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = \tfrac{1}{4}.\ 20480.\ \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{5}.\ 20480 = \frac{20480}{5} = 4096 = E$$

$$\frac{m-4}{5} EQ = 0.\ 4096.\ \tfrac{4}{5} = 0.$$

10000 = A
32000 = B
38400 = C
20480 = D
4096 = E

104976 Dignitas quarta ipsius 18.

Eadem dignitas invenitur, si 18 *in duas quascunque partes alias, e. gr. in* 6 & 12 *secetur: quo in casu erit* P = 6 & Q = 12 : 6 = 2, *consequenter*

$$P^m = 6^4 = 1296 = A$$

$$mAQ = 4.\ 1296.\ 2 = 8.\ 1296 = 10368 = B$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = \tfrac{3}{2}.\ 10368.\ 2 = 3.\ 10368 = 31104 = C$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = \tfrac{2}{3}.\ 31104.\ 2 = \tfrac{4}{3}.\ 31104 = \frac{124416}{3} = 41472 = D$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = \tfrac{1}{4}.\ 41472.\ 2 = \tfrac{2}{4}.\ 41472 = \frac{41472}{2} = 20736 = E$$

$$\frac{m-4}{5} EQ = 0.\ 20736 = 0.$$

1296 = A
10368 = B
31104 = C
41472 = D
20736 = E

104976 Dignitas quarta ipsius 18.

Patet adeo seriem terminari, si m explicetur per numerum determinatum.

COROLLARIUM I.

98. Si m explicetur per numerum fractum, series $P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ$ &c. exprimet radicem indeterminatam ipsius $P + PQ$ (§. 57), adeoque idem theorema extractioni radicis inservit. E. gr. Sit ex $aa - xx$ extrahenda radix quadrata; erit $m = \frac{1}{2}$ (§. *cit.*), $P = a^2$ & $Q = -x^2 : a^2$. Unde

 $P^m =$

$$P^m = a^{2:2} = a = A$$

$$\frac{m}{1} AQ = \tfrac{1}{2} a. -x^2 : a^2 = \frac{-x^2}{2a} = B$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = (\tfrac{1}{2} - 1) : 2. \frac{-x^2}{2a}. \frac{-x^2}{a^2} = \frac{1-2.x^4}{4.2a^3} = \frac{-x^4}{8a^3} = C.$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = (\tfrac{1}{2} - 2) : 3. \frac{-x^4. -x^2}{8a^3. a^2} = \frac{1-4.x^6}{6. 8a^5} = \frac{-3x^6}{6. 8a^5} = \frac{-x^6}{16a^5} = D$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = (\tfrac{1}{2} - 3) : 4. \frac{-x^6. -x^2}{16a^5. a^2} = \frac{1-6.x^8}{8\ 16a^7} = \frac{-5x^8}{128a^7} = E$$

$$\frac{m-4}{5} EQ = (\tfrac{1}{2} - 4) : 5. \frac{-5x^8. -x^2}{128a^7. a^2} = \frac{1-8.}{10}\ \frac{5x^{10}}{128a^9} = \frac{-7x^{10}}{256a^9} \&c.$$

in infin.

Est adeo $V(a^2-x^2) = a \frac{-x^2}{2a} \frac{-x^4}{8a^3} \frac{-x^6}{1^\circ a^5} \frac{-5x^5}{128a^7} \frac{-7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infinit.

SCHOLION 3.

99. *Si cui molestus evadit fractionum calculus, is cum* Newtono *in formula generali substituat pro* m *exponentem fractum* m : n *formulam sequentem obtenturus*: $(P + PQ)^{m:n} = P^{m:n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ$ &c, *Hac vero formula ubi utetur quantitates ad potentiam evecturus, pro* n *assumet* 1.

SCHOLION 4.

100. *Ex numerorum determinatorum potentiis radicem extracturus adhibeat formulam* $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b$ &c. *quam in dato casu determinet numero pro* m *substituto.* E. gr. *Sit ex* 104976 *extrahenda radix quartana; erit* m = 4: *unde habetur* $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ *& juxta hoc theorema extractio radicis quartanæ eodem modo peragitur, quo quadratam & cubicam* (§. 269. 270 Arithm.) *inquisivimus. Nimirum cum præter* a^4 *seu quadratoquadratum partis primæ radicis quatuor auferri debeant facta, resecentur versus dexteram notæ quatuor & potentia quarta proxime accedens ad* 10 *nempe* 1, *erit* a^4. *En calculi typum*:

$$
\begin{array}{l|l}
10 & 4976\,(18 \\
1 & \\
\hline
0 & 4976 \\
4a^3 = & 4 \ldots \; 4a^3 = 4 \quad b^2 = 64 \\
\end{array}
$$

$4a^3b = 32 \ldots \quad b = 8 \quad a^2 = 1$

$6a^2b^2 = 384 \ldots$

$4ab^3 = 2048 . \quad 4a^3b = 32 \quad a^2b^2 = 64$

$b^4 = 40|96 \qquad 6$

$0\,4976 \quad b^3 = 512 \quad 6a^2b^2 = 384$

$4a = 4$

0

$4ab^3 = 2048$

Si radix plures, quam tres notas habuerit; operatio altera repetenda, ut in extractione radicum quadratarum ac cubicarum (§. cit. Arithm.). *Quodsi numerus, ex quo radix extrahenda, non sit dignitas perfecta; dignitas proxime minor sit* = P *& residuum post extractionem more vulgari institutam per eandem divisum* = Q, m = 1 *&* n *exponens dignitatis, cujus radix desideratur. Ita ope theorematis in* schol. præc. *obtinetur series infinita certa progressionis lege residuam partem radicis exhibens,*

E. gr. *Quaratur* $\sqrt{2}$. *Quoniam quadratum proxime minus* = 1 *& residuum hoc ex* 2 *subducto* = 1; erit P = 1, Q = 1. *Præterea* m = 1 *&* n = 2. Hinc

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2.4} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot -\frac{1}{2.4} = +\frac{1.3}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot +\frac{1.3}{2.4.6} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10} \cdot -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \;\&c.$$

Est ergo
$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} - \&c.$$
$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256}$$
&c. in infinitum.

Ubi series fractionum denotat partem radicis unitate minorem. Cæterum cum $\sqrt{2}$ *sit diagonalis quadrati, posito ejus latere* = 1 (*§.* 420 Geom.); *habetur jam valor diagonalis in terminis rationalibus*

nalibus, unde rationes prope veræ ad praxin quantumlibet sufficientes duci possunt. E. gr. si pro diagonali sumatur $1 + \frac{1}{2}$, *erit ratio* $1 + \frac{1}{2} : 1$ $(= 3:2)$ *justo major quam diagonalis ad latus, sed excessus consistet infra* $\frac{1}{8}$. *Si pro diagonali sumatur* $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ *seu* $\frac{11}{8}$; *erit ratio* $\frac{11}{8} : 1$ $(= 11 : 8)$ *justo minor quam diagonalis ad latus, sed defectu infra* $\frac{1}{18}$ *existente: & ita porro.*

COROLLARIUM 2.

101. Quoniam polynomium pro binomio haberi potest, sumtis pluribus partibus pro una; eadem formula polynomiis ad datam dignitatem evehendis inservit. E. gr. Si trinomium $c + d + g$ ad dignitatem aliquam, e. gr. quartam evehendum; ponatur in formula $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b$ &c. $c = a$ & $d + g = b$: erit $(c + d + g)^4 = c^4 + 4c^3(d+g) + 6c^2(d+g)^2 + 4c(d+g)^3 + (d+g)^4$. Nempe $a^m = c^4$, $\frac{m}{1} a^{m-1} b = 4c^3(d+g)$, $\frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 = 6c^2(d+g)^2$, $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3 = 4c(d+g)^3$, $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} a^{m-4} b^4 = (d+g)^4$. Est vero vi ejusdem theorematis $(d+g)^2 = d^2 + 2dg + g^2$, $(d+g)^3 = d^3 + 3d^2g + 3dg^2 + g^3$, $(d+g)^4 = d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$. Ergo $(c + d + g)^4 = c^4 + 4c^3d + 4c^3g + 6c^2d^2 + 12c^2dg + 6c^2g^2 + 4cd^3 + 12cd^2g + 12cdg^2 + 4cg^3 + d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$.

COROLLARIUM 3.

102. Quare si infinitinomium fuerit $a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinit. & in formula pro a substituatur a, pro b autem $by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinit. prodibit formula generalis pro infinitinomio ad datam potentiam evehendo aut ex eadem radicem extrahendo. Est enim

$$
\begin{aligned}
b^2 &= b^2y^2 + 2bcy^3 + c^2y^4 + 2cdy^5 \\
&\qquad\qquad + 2bdy^4 + 2bey^5 \\
&\qquad\qquad\qquad + d^2y^6 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad\qquad + 2cey^6 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad\qquad + 2bfy^6 \text{ \&c.} \\
b^3 &= b^3y^3 + 3b^2cy^4 + 3bc^2y^5 + c^3y^6 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad + 3bdy^5 + 6bcdy^6 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad\qquad + 2b^2ey^6 \text{ \&c.} \\
b^4 &= \quad + b^4y^4 + 4b^3cy^5 + 6b^2c^2y^6 \text{ \&c.} \\
&\qquad\qquad\qquad + 4b^3dy^6 \text{ \&c.} \\
b^5 &= \qquad + b^5y^5 + 5b^4cy^6 \text{ \&c.} \\
b^6 &= \qquad\qquad + b^6y^6 \text{ \&c.}
\end{aligned}
$$

Hos ergo valores si in formula $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3$ &c. substituas & terminos homogeneos, in quibus nempe eadem potentia ipsius y occurrit, decenter coordines; prodibit formula pro infinitinomio:

a^m

$$a^m$$

$$+\frac{m}{1}a^{m-1}by$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}c \end{array}\right\} y^2$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 \\ +\frac{m.m-1}{1.1}a^{m-2}bc \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}d \end{array}\right\} y^3$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 \\ +\frac{m.m-1.m-2}{1.2.1}a^{m-3}b^2c \\ +\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}c^2 \\ +\frac{m.m-1}{1.1}a^{m-2}bd \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}e \end{array}\right\} y^4$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}a^{m-5}b^5 \\ +\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.1}a^{m-4}b^3c \\ +\frac{m.m-1.m-2}{1.2.1}a^{m-3}b^2d \\ +\frac{m.m-1.m-2}{1.2.1}a^{m-3}bc^2 \\ +\frac{m.m-1}{1.1}a^{m-2}cd \\ +\frac{m.m-1}{1.1}a^{m-2}be \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}f \end{array}\right\} y^5$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6}a^{m-6}b^6 \\ +\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.1}a^{m-5}b^4c \\ +\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.1.1.4}a^{m-4}b^2c^2 \\ +\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.1}a^{m-4}b^3d \\ +\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}c^3 \\ +\frac{m.m-1.m-2}{1.1.1}a^{m-3}bcd \\ +\frac{m.m-1.m-2}{1.1.3}a^{m-3}b^2e \\ +\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}d^2 \\ +\frac{m.m-1}{1.1}a^{m-2}ce \\ +\frac{m.m-1}{1.1}a^{m-2}bf \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}g \end{array}\right\} y^6$$

&c. &c. in infin.

COROLLARIUM 4.

103. Eodem modo patet, si infinitinomium fuerit $ay+by^2+cy^3+dy^4+ey^5+fy^6$ &c. ad dignitatem m evehen-

dum; in inserie antecedente tantum omnes teaminos multiplicandos esse per y^m, ita ut unciæ retineantur eædem iidemque coëfficientes, dignitates vero ipsius y sint $y^m + y^{m+1} + y^{m+2} + y^{m+3} + y^{m+4} + y^{m+5} + y^{m+6}$ &c.

SCHOLION 5.

104. *Constat adeo, idem theorema, quod pro binomio dedimus, etiam infinitinomio ad dignitatem desideratam evehendo sufficere. Tyrones illud sub initium studii analytici prætermittant, donec inferius in analysi infinitorum eodem opus habuerint. Immo infinitinomium ad potestatem determinatam facile evehitur per formulas speciales superius allatas. E. gr. Sit* $hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 +$ &c. *evehenda ad dignitatem secundam: cum* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

erit $h^2x^2 + 2hix^3 + i^2x^4$
$+ 2hkx^4 + 2ikx^5 + k^2x^6$ &c.
$+ 2hlx^5 + 2ilx^6$ &c.
$+ 2hmx^6$ &c.

(§. 265 Aritlim.). *Nimirum primo sumuntur duo tantummodo termini, veluti hic* $hx + ix^2$ *& quæritur ejus potentia desiderata, veluti hic secunda. Deinde* $hx + ix^2$, *habentur pro termino uno*, kx^3 *pro altero, atque sic denuo per formulam binomii determinatur potentia desiderata, veluti hic secunda. Porro* $hx + ix^2 + kx^3$ *sumuntur pro termino uno &* lx^4 *pro altero, & ita porro. Quæ eadem series invenitur, si in generali (§. 102) fiat* $m = 2$, $y = x$, $a = h$, $b = i$, $c = k$, $d = l$, $e = m$, &c. *Est enim:*

$$a^m y^m = h^2 x^2$$

$$\frac{m}{1} \cdot a^{m-1} b y^{m+1} = 2hix^3$$

$$\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 y^{m+2} = \frac{2}{2} h^o i^2 x^4 = i^2 x^4.$$

$$\frac{m}{1} a^{m-1} c y^{m+2} = 2hkx^4 \text{ \&c.}$$

SCHOLION 6.

105. *Cæterum notetur artificium, quo casus infiniti, immo infinities infiniti, ad regulam eandem reducuntur.*

PROBLEMA 25.

106. *Determinare summam termini primi & ultimi in progressione arithmetica.*

Sit terminus primus a, differentia terminorum sive crescentium, sive decrescentium d, erit (§. 333 *Arithm.*).

$$a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.$$

$$\frac{a+4d}{2a+5d} \qquad \frac{a+2d}{2a+5d} =$$

$$\frac{a+5d}{\frac{a}{2a+5d}}$$

Item:

$a,\ a+d.\ a+2d.\ a+3d,\ a+4d$

$a+4d$	$a+3d$	$a+2d$
a	$a+d$	2
$2a+4d$	$2a+4d$	$2a+4d$

Theorema. In progressione arithmetica tam crescente, quam decrescente, summa termini primi & ultimi æqualis est summæ duorum quorumlibet mediorum ab extremis æquidistantium aut medii duplo, si numerus terminorum impar.

E. gr. 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21.
12 9 6 3

$24 = 24 = 24 = 24$

COROLLARIUM 1.

107. Habetur ergo summa progressionis arithmeticæ, si summa termini primi & ultimi ducatur in dimidium terminorum numerum.

COROLLARIUM 2.

108. Quodsi adeo sit terminus primus a, differentia d, numerus terminorum n, erit ultimus $a + (n-1)d$ (§. 333 *Arithm.*), consequenter summa progressionis $\frac{1}{2}n\,(2a + (n-1)d)$ (§. 107) $= an + \frac{1}{2}(n^2 - n)\,d$. Ex datis itaque termino primo a, differentia d & numero terminorum n invenitur summa progressionis, si facto ex termino primo in numerum terminorum addatur factum ex differentia eorundem in semidifferentiam numeri terminorum a quadrato ejusdem. E. gr. Sit $a = 3$, $n = 7$, $d = 3$, erit summa $= 21 + \frac{49-7}{2}.\,3 = 21 + \frac{42}{2}.\,3 = 21 + 21.\,3 = 21 + 63 = 84$.

SCHOLION.

109. *Notent tyrones regulas ex symbolis eruturi, ab initio gradatim esse progrediendum, exprimendo nempe sigillatim quodlibet symbolum per rem denotatam & quamlibet operationem signis repræsentatam per nomina convenientia. E. gr. in* an *est* a *terminus primus &* n *numerus terminorum,* ex hypoth. *Sed* an *est factum ex* a *in* n (§. 8). *Ergo pro* an *substituitur in regula factum ex termino primo in numerum terminorum. Porro* n^2 *est quadratum ipsius* n (§. 254 Arithm.). *Sed* n *est numerus terminorum: ergo* n^2 *quadratum numeri terminorum. Signum* — *indicat subtractionem* (§. 8). *Quare* $n^2 - n$ *differentia numeri terminorum ab ejus quadrato &* $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ *semidifferentia ista. Porro* d *est differentia terminorum* ex hypoth. *adeoque* $\frac{1}{2}(n^2 - n)\,d$ *factum ex illa semidifferentia in differentiam terminorum. Denique signum* + *indicat facta hactenus explicata esse addenda. Hac quidem syllabizatione opus habent, qui sine mora symbolicas expressiones quantitatum sibi familiares reddere gestiunt.*

COROLLARIUM 3.

110. Sit $a = 1$, $d = 2$, hoc est, sit series numerorum imparium 1. 3. 5. 7 &c. erit summa $= n + n^2 - n$ (§. 108) $= n^2$

$= n^2$ (§. 21). Patet adeo numeros quadratos prodire continua numerorum imparium additione, consequenter differentias numerorum quadratorum esse numeros impares: id quod supra alia ratione fuit demonstratum (§. 85).

COROLLARIUM 4.

111. Sit $a = n = \frac{1}{2} d$, erit summa $= n^2 + n^3 - n^2$ (§. 108) $= n^3$ (§. 21). Quilibet adeo cubus resolvitur in progressionem arithmeticam, cujus terminus primus, semidifferentia & numerus terminorum sunt radici ejus æquales. Ita $8 = 2 + 6$, $27 = 3 + 9 + 15$, $64 = 4 + 12 + 20 + 28$.

SCHOLION.

112. *Patet modus ex formulis algebraicis eruendi theoremata specialia, qui continetur sub problemate logico de specierum notionibus ex notione generis formandis* (§. 712 Log.).

DEFINITIO 4.

113. *Denominator* rationis est quotus ex divisione termini majoris per minorem emergens.

COROLLARIUM 1.

114. Major ergo prodit, minore per denominatorem multiplicato (§. 212 *Arithm.*): minor vero habetur, majore per denominatorem diviso (§. 210 *Arithm.*). Unde si terminus minor a, denominator m, erit major ma; si terminus major a, minor erit $\frac{a}{m}$. Quare $a : ma$ exprimit rationem minoris inæqualitatis; $a : \frac{a}{m}$ vero rationem majoris (§. 133 *Arithm.*). Immo quoniam $\frac{a}{m} = a . \frac{1}{m}$ (§. 43); si m explicetur per fractionem, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis, $a : ma$ rationem quamcunque designat.

COROLLARIUM 2.

115 Quia in ratione majoris inæqualitatis antecedens major consequente (§. 133 *Arithm.*); ejus denominator idem est cum exponente (§. 136 *Arithm.*).

COROLLARIUM 3.

116. In ratione minoris inæqualitatis exponens rationis $\frac{a}{ma}$ (§. 136 *Arithm.* & §. 114 *Analys.*), hoc est, $\frac{1}{m}$ (§. 231 *Arithm.*). Æquatur ergo fractioni, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis.

SCHOLION.

117. *Exponens & denominator rationis Auctoribus voces synonymæ sunt. Aliter vero veteres, aliter recentiores exponentem definiunt. Nos veterum definitionem retinuimus in Arithmetica* (§. 136), *tum quod naturam rationum clare*

clare explicet, tum quod ad demonſtrandum utilis. Etenim ſi rationis 2 : 3 exponens dicatur $\frac{2}{3}$; inde intelligitur, antecedentem terminum eſſe æqualem duabus tertiis conſequentis, adeoque pro menſura, qua utrumque metimur, aſſumi tertiam conſequentis partem. Hinc vero clarius cognoſcitur rationis hujus natura, quam ſi cum recentioribus nonnullis dicas, exponentem eſſe $1\frac{1}{2}$: *quod innuit, antecedentem in conſequente contineri* $1\frac{1}{2}$. *Recentiores vero exponentem rationis eodem modo definientes, quo denominatorem definimus, ideo eundem exponentem conſtituunt rationum majoris & minoris inæqualitatis* (§. 115), *quod nomen etiam in caſu poſteriori ſuggerat* (§. 147 Arithm.) *& demonſtrationibus analyticis commodior videatur: quem in finem nos exponentis loco nunc denominatorem aſſumimus.*

PROBLEMA 30.

118. *Determinare factum ex termino primo in ultimum progreſſionis geometricæ.*

Sit terminus primus a, denominator m; erit progreſſio (§. 332 *Arithm.* & §. 114 *Analyſ.*).

$$\begin{array}{ccccccc} a. & ma. & m^2a. & m^3a. & m^4a. & m^5a. & m^6a. \\ & m^5a & & m^3a & m^2a & & a \\ \hline & m^6a^2 & = & m^6a^2 & = m^6a^2 & = & m^6a^2 \end{array}$$

Theorema. In progreſſione geometrica factum extremorum æquatur facto mediorum ab extremis æquidiſtantium, itemque medii quadrato, ſi numerus terminorum impar.

$$\begin{array}{lcccccc} \text{E. gr. } 3. & 6. & 12. & 24. & 48. & 96 \\ & & & 12 & 6 & 3 \\ \hline & & & 288 & = 288 & = 288 \end{array}$$

PROBLEMA 31.

119. *Determinare quotum ex diviſione differentiæ terminorum primi ac ultimi per denominatorem unitate mulctatum emergentem.*

Sit terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n; erit terminus ultimus $m^{n-1}a$, differentia primi & ultimi $m^{n-1}a - a$. Hæc ſi dividatur per $m-1$, erit quotus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ &c.

$$\begin{array}{rl} & m^{n-1}a - a \quad \left(m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a \text{ \&c.} \right. \\ m-1) & m^{n-1}a - m^{n-2}a \\ \hline & + m^{n-2}a - a \\ & m^{n-2}a - m^{n-3}a \\ \hline & + m^{n-3}a - a \\ & m^{n-3}a - m^{n-4}a \\ \hline & + m^{n-4}a - a \\ & m^{n-4}a - m^{n-5}a \\ \hline & + m^{n-5}a - a \end{array}$$

$m^{n-5}a - m^{n-6}a$

$+m^{n-6}a - a$

&c.

Quodsi n determinetur, e. gr. per 7, erit $n-7=o$, consequenter $m^{n-7}a = m^0 a = a$, adeoque divisio terminatur. Unde patet

Theorema 1. Si differentia termini primi & ultimi progressionis geometricæ dividatur per denominatorem unitate mulctatum, quotus est summa omnium terminorum excepto maximo.

Et cum sit $m-1 : 1 = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a$ &c. $+a$ (§. 174. 169 *Arithm.*); patet porro

Theorema 2. In progressione geometrica est ut denominator unitate mulctatus ad unitatem ita differentia termini maximi & minimi ad summam omnium terminorum excepto maximo.

COROLLARIUM 1.

120. Quodsi ergo quoto ex divisione differentiæ termini maximi & minimi per denominatorem unitate mulctatum emergenti maximus addatur; summa totius progressionis habetur.

COROLLARIUM 2.

121. Sit adeo terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n, erit terminus ultimus seu maximus $m^{n-1}a$, adeoque summa $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m-1) = (m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m-1)$ (§ 235 *Arithm.*) $= (m^n a - a) : (m-1)$ (§. 21), consequenter si eadem summa dicatur s, $m-1 : m^n - 1 = a : s$, (§. 302 *Arithm.*). Est adeo terminus primus (seu minimus) progressionis ad ejus summam ut denominator unitate mulctatus ad ejus dignitatem, cujus exponens numero terminorum æqualis, unitate itidem mulctatam. Sit e. gr. $m=2$, $a=1$, $n=8$, erit summa $(256-1) : 1 = 255$.

COROLLARIUM 3.

122. Quoniam si terminus primus a, denominator m; terminus ultimus $m^{n-1}a$, summa $(m^n a - a) : (m-1)$ (§. 121): erit differentia inter terminum ultimum & summam $(m^{n-1}a - a) : (m-1)$ & differentia inter primum & summam

$$\frac{m^n a - a}{m-1} - a = \frac{m^n a - a - ma + a}{m-1}$$

(§. 235 *Arithm.*) $= \dfrac{m^n a - a}{m-1}$ Est ergo differentia prior ad posteriorem ut $(m^{n-1}a - a) : (m-1)$ ad $(m^n a - ma) : (m-1)$, hoc est, ut $m^{n-1}a - a$ ad $m^n a - ma$ (§. 178 *Arithm.*), hoc est, ut 1 ad m (§. 181 *Arithm.*, seu ut unitas ad denominatorem.

COROLLARIUM 4.

123. Quare si differentia inter terminum primum & summam dividatur per differentiam inter summam & terminum ultimum; quotus est denominator (§. 69 *Arithm.*).

PROBLEMA 32.

124. *Investigare rationum symptomata.*

Non

Non alia re opus est, quam ut termini analytice exprimantur (§. 114) & tentatis quotlibet mutationibus exploretur, utrum duarum rationum exponentes sint æquales nec ne, (§. 149 *Arithm.*). Sint itaque duæ quantitates a & ma; erit

I. $$\begin{array}{l} a : ma \\ c \quad c \\ \hline ac : mac = a : ma \end{array}$$

II. $$\begin{array}{l} a : ma \\ c \quad c \\ \hline \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma \end{array}$$

III. $$\begin{array}{l} a : ma \\ b : mb \\ \hline a - b : ma - mb = a : ma = b : mb \end{array}$$

IV. $$\begin{array}{l} a \quad ma \\ b \quad mb \\ \hline a + b : ma + mb = a : ma = b : mb. \end{array}$$

Sit porro

$$a : ma = b : mb$$

erit alternatim $a : b = ma : mb$

inverse $ma : a = mb : b$

conversim $a + ma : a = b + mb : b$

composite $a + ma : ma = b + mb : mb$

Divisim $ma - a : a = mb - b : b$

$ma - a : ma = mb - b : mb$

Item: $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$

$$a : mac = b : mbc$$

$$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$$

$$ac : ma = bc : mb$$

$$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$$

$$ac : mac = b : mb$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$$

$$ac : mac = bd : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$$

$$ac : mad = bc : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$$

Sit ordinate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = mb : mnb$

erit ex æquo $a : mna = b : mnb$

Sit perturbate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = b : \frac{b}{n}$

erit ex æquo $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Ipsæ nimirum expressiones, si quoti reducentur per regulas fractionum,

ctionum, rationum similitudinem in omnibus loquuntur. E. gr. $ac : mac = 1 : m$ & $b : mb = 1 : m$. En utrobique exponentem eundem $1 : m$!

COROLLARIUM.

125. Cum sit in progressione geometrica $m - 1 : 1 = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a$ &c. $+ a$ (*th.* 2. §. 119), sit vero $m - 1 : 1 = ma - a : a$ (§. 124 *n.* 1.); $ma - a : a = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a$ &c. $+ a$, hoc est, excessus termini secundi supra primum est ad primum ut excessus ultimi sive maximi supra primum ad summam omnium terminorum demto maximo.

PROBLEMA 33.

126. *Investigare symptomata progressionum geometricarum ab unitate incipientium.*

Si terminus primus est unitas, secundus idem est cum denominatore rationis (§. 114). Est vero terminus secundus vel numerus primus, vel compositus & in casu altero vel quadratus, vel potentia alia cujuscunque ordinis, vel nulla.

Cum numerus primus in se non possit dividi nisi per unitatem solam (§. 75 *Arithm.*), charactere primitivo m recte exprimitur. Unde emergit series in ratione geometrica progredientium:

$$1.\ m.\ m^2.\ m^3.\ m^4.\ m^5.\ m^6.\ \&c.$$

Quoniam termini omnes prodeunt continuata multiplicatione secundi in seipsum (§. 334 *Arith.*); per nullum quoque numerum primum dividi possunt exacte nisi per secundum, seu nullus numerus primus terminos metitur præter secundum. In formula generali idem ad oculum patet: etenim $m^2\ m^3\ m^4\ m^5\ m^6$ &c. non posse dividi nisi per m, patet (§. 54). Et cum terminus secundus in hoc casu sit potentia prima, termini sequentes sint potentiæ continuo ordine progredientes ejusdem numeri (§. 254 *Arithm.*); terminus quilibet major dividi potest per quemlibet minorem, sed per nullum alium (§. 54). Habemus adeo

Theorema 1. Si numerorum ab unitate continue proportionalium proximus unitati primus est, maximum nullus alius metitur præter eos, qui sunt in serie, consequenter nec primus alius, nisi secundus seu ab unitate proximus.

Et quoniam in omni casu numerorum ab unitate continue proportionalium termini ultra secundum sunt potentiæ continuo ordine progredientes ejusdem termini secundi, qui communis omnium radix est (§. 334. 254 *Arithm.*); igitur in genere patet

The-

Theorem 2. In ſerie numerorum ab unitate continue proportionalium minor quilibet quemlibet majorem metitur per aliquem numerum, qui eſt in ſerie.

Cum terminus compoſitus exacte dividi poſſit per numerum alium præter unitatem (§.76 *Arith.*); exprimetur idem per mn. Quare ſi in progreſſione geometrica ab unitate incipiente terminus ſecundus ſit mn; erit ſeries

$$1.\ mn.\ m^2n^2.\ m^3n^3.\ m^4n^4.\ m^5n^5.\ m^6n^6\ \&c.$$

atque adeo patet numeros primos m & n, qui metiuntur ſecundum terminum, metiri quoque ceteros omnes, nec præter eos alium quendam numerum primum ceterorum quemcunque metiri. Unde habemus

Theorema 3. Si ab unitate fuerint numeri quotcunque continue proportionales, primus numerus, qui metitur ultimum, metietur & unitati proximum ac omnes intermedios.

In utraque ſerie exponens termini ſecundi eſt 1, tertii 2, quarti 3, quinti 4 &c. conſequenter exponens in loco impari eſt numerus par, in loco pari eſt impar, & quidem in loco quarto ſeu a ſecundo tertio exponens eſt ternarius, & duobus locis intermiſſis ſequitur continuo numerus per ternarium diviſibilis, ſeu quem ternarius metitur. Similiter in loco ſeptimo ſeu a ſecundo ſexto exponens ſenarius eſt & quinque locis intermiſſis continuo ſequitur exponens, quem ſenarius metitur. Singula hinc intuitive patent, quod exponentes ex continua unitatis additione naſcantur. Hiſce vero notatis prodit

Theorema 4. Si numeri quotcunque fuerint ab unitate continue proportionales, ſecundus (unitate ſecluſa) quadratus erit & uno intermiſſo omnes: tertius autem cubus eſt, & duobus intermiſſis omnes: ſextus vero cubus ſimul & quadratus & quinque intermiſſis omnes.

Si terminus primus fuerit unitas, ſecundus numerus quadratus, vel cubus, vel potentia cujuſcunque gradus, erunt ſeries

$$1.\ m^2.\ m^4.\ m^6.\ m^8.\ m^{10}.\ m^{12}\ \&c.$$
$$1.\ m^3.\ m^6.\ m^9.\ m^{12}.\ m^{15}.\ m^{18}\ \&c.$$
$$1.\ m^n.\ m^{2n}.\ m^{3n}.\ m^{4n}.\ m^{5n}.\ m^{6n}\ \&c.$$

Quoniam in qualibet ſerie termini continuo prodeunt multiplicatione per ſecundum, exponens ſecundi continuo additur exponenti termini cujuſcunque dati, ut prodeat proxime ſequens (§. 54), conſequenter cum ex-

exponentes omnium terminorum, qui a secundo sequuntur, sint multipli exponentis termini secundi, per secundi quoque termini exponentem dividi possunt, consequenter omnes termini sunt dignitates ejus gradus, cujus dignitas est secundus (§. 56). Habemus itaque:

Theorema 5. Si in serie continue proportionalium ab unitate numerorum terminus secundus seu ab unitate primus est quadratus, reliqui omnes quadrati erunt; si idem fuerit cubus, reliqui etiam omnes cubi erunt; si idem fuerit dignitas cujuscunque gradus, quarti, quinti, sexti &c. reliqui etiam omnes erunt dignitates ejusdem gradus, quarti, quinti, sexti &c.

SCHOLION.

127. *Patet adeo, per calculum literalem facillime symptomata rationum & progressionum geometricarum ab unitate incipientium vel ignorata, vel oblivioni tradita reperiri.*

PROBLEMA 34.

128. *Invenire rationem superficierum atque corporum in geometria elementari explicatorum.*

Sit parallelogrammorum & triangulorum altitudo communis a, bases sint b & c: erunt illorum areæ ab & ac (§. 375. 387 *Geom.*), horum $\frac{1}{2}ab$ & $\frac{1}{2}ac$ (§. 392 *Geom.*). Sunt ergo ut ab ad ac, hoc est, ut b ad c (§. 181 *Arithm.*).

Theorema 1. Parallelogramma & triangula æque alta basium rationem habent.

Eodem modo invenitur

Theorema 2. Parallelogramma & triangula æqualium basium sunt in ratione altitudinum.

Sit diameter circuli a, peripheria ma (§. 114): erit quadratum diametri a^2, area circuli $\frac{1}{4}ma^2$ (§. 429 *Geom.*). Est ergo illud ad hanc ut a^2 ad $\frac{1}{4}ma^2$, hoc est, ut a ad $\frac{1}{4}ma$ (§. 181 *Arithm.*).

Theorema 3. Quadratum diametri est ad aream circuli, ut diameter ad quartam peripheriæ partem.

Sint bases parallelogrammorum & triangulorum similium a & b, altitudines ma & mb (§. 114 *Anal.* & §. 396 *Geom.*): erunt areæ ut ma^2 ad mb^2 (§. 375. 387. 392 *Geom.*), hoc est, ut a^2 ad b^2 (§. 124).

Theorema 4. Parallelogramma & triangula similia sunt ut quadrata basium; seu (quia quodlibet latus pro basi assumi potest §. 115 *Geom.*) ut quadrata laterum homologorum.

Sint bases parallelepipedorum, prismatum, cylindrorum, pyramidum, conorum, a & b, altitudo communis c: erunt corpora ista ut

ut *ac* ad *bc* (§. 536. 539. 541. 548 *Geom.*), hoc eſt, ut *a* ad *b* (§. 113) Eodem modo *c* aſſumi poteſt pro baſi communi ita ut *a* & *b* ſint altitudines.

Theorema 5. Parallelepipeda, priſmata, cylindri, pyramides & coni ejusdem altitudinis baſium rationem habent; eandem vero baſin habentes ſunt in ratione altitudinum.

Non abſimili modo alia hujus generis theoremata inveſtigantur.

PROBLEMA 35.

129. *Invenire, quoties quantitates quotlibet permutari queant, hoc eſt, ordo earum variari poſſit.*

Sint quantitates duæ *a* & *b*. Cum aut ſcribi poſſit *a b*, aut *b a*; patet eſſe numerum variationum $2 = 2.1$. Sint tres quantitates *a*, *b*, *c*. Ordines earum erunt

c a b
a c b
a b c

c b a
b c a
b a c

id quod patet, *c* primum cum *ab*, dein cum *ba* combinando. Unde numerus variationum $3.2.1 = 6$.

Quodſi quantitates fuerint quatuor, una quælibet quatuor modis combinari poteſt cum quolibet ordine trium: unde numerus variationum emergit $6.4 = 4.3.2.1 = 24$.

Similiter ſi quantitates fuerint quinque, unaquælibet juncta cum quolibet ordine quatuor quantitatum pariet variationes 5. Unde numerus omnium variationum $24.5 = 5.4.3.2.1$. Quare ſi numerus quantitatum fuerit n; erit numerus variationum $n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5$ &c.

Si eadem quantitas bis occurrat; reperietur variatio duorum *bb*; trium *bab*, *abb*, *bba*, quatuor *cbab*, *bcab*, *babc* &c. adeoque numerus variationum in caſu primo $1 = (2.1) : 2.1$, in ſecundo $3 = (3.2.1) : 2.1$, in tertio $12 = (4.3.2.1) : 2.1$. Quodſi litera quinta accedat, in quolibet ordine quantitatum quatuor pariet variationes quinque: unde numerus omnium variationum $60 = (5.4.3.2.1) : 2.1$. Hinc intelligitur, ſi numerus quantitatum ſit n; fore omnium variationum numerum $(n.n-1.n-2.n-3.n-4$ &c.$) : 2.1$.

Si eadem quantitas ter occurrat, erit in tribus nulla variatio; in quatuor variationes ſunt *baaa*, *abaa*, *aaba*, *aaab*, adeoque numerus

merus variationum 4 = (4.3.2.1): 3.2.1. Quinta si accedat, in quolibet ordine quatuor quantitatum quinque variationes pariet: unde numerus omnium variationum (5.4.3.2.1): 3.2.1. Eodem modo, si sexta assumatur, reperietur numerus variationum (6.5.4.3.2.1): 3.2.1. Unde colligitur, si numerus quantitatum sit n, fore numerum omnium variationum ($n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5$ &c.): 3.2.1.

Si eadem quantitas quater occurrat, erit in quatuor variatio nulla. Quodsi vero quinta accedat, variationes sunt *baaaa*, *abaaa*, *aabaa*, *aaaba*, *aaaab*. Quare numerus variationum est 5 = (5.4.3.2.1): 4.3.2.1. Si sexta assumatur, in quolibet ordine quantitatum quinque variationes sex pariet, adeoque numerus variationum 30 = (6.5.4.3.2.1): 4.3.2.1. Unde constat, si numerus quantitatum sit n, fore numerum omnium variationum $n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5$. &c.): 4.3.2.1.

Ex his formulis specialibus colligitur generalis. Nempe si n denuo sit quantitatum numerus, m numerus, qui indicat, quoties eadem quantitas occurrit: erit ($n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6.n-7.n-8.n-9$ &c.): ($m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6$ &c.). Nimirum series continuanda, donec continua unitatis subtractio ex n & m relinquat o.

Eodem modo ulterius progredi licet, tandemque reperietur, si numerus quantitatum fuerit n, numeri, qui indicant, quoties earum aliquæ repetuntur, sint l, m, r &c. formula universalissima ($n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6.$ &c.): ($l.l-1\ l-2.l-3.l-4$ &c. $m.m-1.m-2.m-3$. &c. $r.r-1.r-2.r-3.r-4.r-5$. &c.). E. gr. sit $n=6$, $l=3$, $m=3$, $r=o$; erit numerus variationum (6.5.4.3.2.1): (3.2.1.3.2.1) = (6.5.4): (3.2) = 2.5.2 = 20.

SCHOLION 1.

130. *Ponamus mensæ assidere 13 personas. Quodsi quaratur, quoties loca permutare possint; reperietur numerus variationum* 13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 6, 227′, 020, 800.

SCHOLION 2.

131. *Si vox aliqua ex litteris non nimis multis componatur; eadem methodo, qua in resolutione problematis usi sumus,*

sumus, inveniri possunt sine meditatione omnia anagrammata in omnibus linguis possibilia. E. gr. inveniri debent anagrammata vocis amor. *Erunt variationes possibiles*

a	omra	oram
—		
ma	omar	oarm
	—	
am	rmoa	oamr
—		—
oma	mroa	raom
moa	mora	arom
mao	moar	aorm
—	—	
oam	rmao	aomr
		—
aom	mrao	ramo
amo	maro	armo
—		
roma	maor	amro
	—	
orma	raom	amor

Sunt adeo anagrammata vocis amor *in lingua latina* Roma, mora, Maro, oram, ramo, armo.

Sectio II.

DE ALGEBRA

CAPUT I.

De

ALGEBRA AD PROBLEMATA ARITHMETICA EAQUE DETERMINATA APPLICATA.

DEFINITIO 5.

132. *Algebra* est methodus resolvendi problemata per æquationes.

DEFINITIO 6.

133. *Æquatio* est expressio ejusdem quantitatis per duos valores diversos, sed æquales, e. gr. $2 \cdot 3 = 4 + 2$. *Stifelius* (c) definit eam per rationem æqualitatis inter duos terminos diversimode denominatos.

DEFINITIO 7.

134. *Radix æquationis* est valor

 quan-

(c) in Arithmet. integra lib. 3, c. 1. p. 228. b.

quantitatis incognitæ, quæ æquationem ingreditur. E. gr. si fuerit $a^2 + b^2 = x^2$; radix erit $V(a^2 + b^2)$.

DEFINITIO 8.

135. Si valor ipsius x fuerit positivus, e. gr. $x = 3$; *Radix* dicitur *vera*.

DEFINITIO 9.

136. Si valor ipsius x fuerit negativus, e. gr. $x = -5$, *Radix* dicitur *falsa*.

DEFINITIO 10.

137. Si valor ipsius x fuerit *radix* quantitatis negativæ, e. gr. $V-5$, *imaginaria* appellatur (§. 71).

DEFINITIO 11.

138. *Æquatio* dicitur simplex, si quantitas incognita fuerit unius dimensionis, e. gr. si $x = (a + b) : 2$.

DEFINITIO 12.

139. *Æquatio* dicitur *quadratica*, si quantitas incognita ad duas dimensiones assurgit, ut $x^2 = a^2 + b^2$: *cubica*, si ad tres, ut $x^3 = a^3 - b^3$ &c.

SCHOLION.

140. *In hac sectione tantum de æquatione simplici & quadratica agimus.*

PROBLEMA 36.

141. *Problema datum Algebraice resolvere.*

RESOLUTIO.

1. Quantitates datæ a quæsitis distinguantur & datæ primis, quæsitæ ultimis alphabeti litteris denominentur (§. 3).

2. Quærantur tot æquationes, quot quantitates incognitæ occurrunt: quod si fieri nequeat, id indicio est, *problema* non esse *determinatum*, sed unam vel plures quæsitarum pro arbitrio assumi posse. Inveniuntur autem æquationes, nisi in ipso problemate contineantur, per theoremata de æqualitate quantitatum agentia.

3. Quoniam in æquatione quantitates incognitæ cognitis sunt permixtæ; ea reducenda est, ita ut ex una parte tantum compareat quantitas incognita una, ex altera vero meræ cognitæ deprehendantur. Instituitur autem hæc reductio, si quantitates subductæ addantur, additæ subtrahantur, multiplicatæ dividantur, divisæ multiplicentur, e potentiis radices extrahantur, radices ad potentias evehantur, ut perpetua æqualitas conservetur (§. 88. 91. 93. 94. 256 *Arithm.*).

SCHO-

SCHOLION.

142. *Hæc sufficiunt pro æquationibus simplicibus reducendis; sed ad altiores aliis adhuc subsidiis opus est, quæ suo loco exponemus, nunc nonnisi extractionem radicis ex æquatione quadratica addituri.*

PROBLEMA 37.

143. *Ex æquatione quadratica radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Si æquatio fuerit pura, ut $x^2 = ab$; evidens est esse $x = \sqrt{ab}$.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x^2 \overline{+} ax = \overline{+} b^2$; tum x assumatur pro una parte radicis, erit a quantitas cognita secundi termini duplum partis alterius (§. 261 *Arithm.*), adeoque $\frac{1}{2}a$ pars altera. Complebitur adeo quadratum, si addatur $\frac{1}{4}aa$ (§. *cit.*): quo facto, radix extrahi potest, ut hic factum esse apparet:

Casus 1.

$$x^2 + ax = b^2$$
$$\tfrac{1}{4}aa \quad \tfrac{1}{4}aa \text{ add.}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$
$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} - \tfrac{1}{2}a$$

Casus 2.

$$x^2 - ax = b^2$$
$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$
$$x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$
$$\tfrac{1}{2}a - x =$$
$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$
$$\text{vel } x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

Quoniam $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} > \tfrac{1}{2}a$, erit $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ valor ipsius x negativus, consequenter radix falsa (§. 136), atque adeo solus valor $\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ est radix vera (§. 135).

Casus 3.

$$x^2 - ax = -b^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$
$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2$$
$$x - \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$
$$\& \tfrac{1}{2}a - x$$
$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$
$$\& x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

Quoniam $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)} < \tfrac{1}{2}a$, erit $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$ valor ipsius x positivus, consequenter radix vera (§. 135). Habet adeo in præsente casu æquatio duas radices veras: cujus rei ratio paulo post ex exemplis patebit.

Ceterum ex multiplicatione patet

tet esse $(\frac{1}{2}a - x)^2$ perinde ac $(x - \frac{1}{2}a)^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$.

PROBLEMA 38.

144. *Invenire numerum, cujus pars dimidia cum tertia & quarta numerum integrum unitate superat.*

Si numerus quæsitus x, erit per conditionem problematis

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$$

hoc est $(12x + 8x + 6x) : 24 = x + 1$

seu $\frac{26}{24}x = x + 1$

24. mult.

$$26x = 24x + 24$$
$$24x \quad 24x \qquad \text{Subtr.}$$

$$2x = 24$$

2 div.

$$x = 12$$

Examen. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13 = 12 + 1$

PROBLEMA 39.

145. *Invenire numerum, cujus partes aliquotæ qualescunque & quotcunque simul sumtæ ipsum superant numero dato.*

Sit numerus datus f, quæsitus x, partes aliquotæ $\frac{a}{b}x$, $\frac{c}{d}x$, $\frac{e}{g}x$ &c. Erit per conditionem problematis

$$\frac{a}{b}x + \frac{c}{d}x + \frac{e}{g}x \text{ \&c.} = f + x$$

h. e. $\frac{(adg + bgc + bde)\,x}{bdg} = f + x$ (§. 235 *Arithm.*).

$$\frac{(adg + bgc + bde)\,x}{bdgx} = \frac{fbdg + bdg\,x}{bdgx}$$

$$(adg + bgc + bde - bdg)\,x = fbdg$$

$$x = fbdg : (adg + bgc + bde - bdg)$$

seu $adg + bgc + bde - bdg : bdg = f : x$

Æquatio ultima hanc suppeditat

Regulam: 1. Fractiones datæ reducantur ad eandem denominationem. 2. A summa numeratorum subtrahatur denominator communis. 3. Per residuum dividatur factum ex eodem denominatore in numerum datum. Quotus est numerus quæsitus. E. gr. sit $a : b = \frac{1}{2}$, $c : d = \frac{1}{3}$, $e : g = \frac{1}{4}$, $f = 1$: erit $x = 24 : (12 + 8 + 6 - 24) = 24 : 2 = 12$

In analogia, in quam æquationem resolvimus, continetur hoc

Theorema. Si plures fractiones ad eandem denominationem reducuntur, erit numerus integer, cujus partes sunt fractiones istæ, ad harum supra illum excessum, ut communis denominator ad differentiam ejus a summa numeratorum.

PROBLEMA 40.

146. *Quantitatis irrationales diversæ denominationis reducere ad eandem.*

RE-

RESOLUTIO.

Sint quantitates irrationales reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[s]{y^r}$, quemadmodum ſupra (§. 59). Fiat

$$\sqrt[m]{x^n} = t \qquad \sqrt[s]{y^r} = v$$

$$x^n = t^m \qquad y^r = v^s$$

$$x^{sn} = t^{ms} \qquad y^{rm} = v^{sm}$$

$$\sqrt[ms]{x^{sn}} = t \qquad \sqrt[ms]{y^{rm}} = v$$

Habemus adeo $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[ms]{x^{sn}}$ & $\sqrt[s]{y^r} = \sqrt[ms]{y^{rm}}$, ut ſupra (§. *cit.*): quo ipſo patet, quod dubium videri poterat (§. 60), in exponentibus quantitatum irrationalium locum habere reductionem ad eandem denominationem, ſi iidem fuerint fractiones diverſæ denominationis.

SCHOLION.

147. *Hoc artificio reductionis uti posſumus in aliis caſibus ſimilibus. Ita mulplicationem ac diviſionem fractorum atque irrationalium eadem methodo inveſtigare licet.*

PROBLEMA 41.

148. *Datis ſumma duarum quantitatum & earundem facto, invenire numeros.*

Sit ſumma $= a$ Semidiffer. $= x$
Fact. $= b$ erit Quant. maj. $= \frac{1}{2}a + x$
min. $= \frac{1}{2}a - x$ (§. 6).

Ergo per conditionem probl.

$$\tfrac{1}{4}aa - xx = b \quad (\S.\ 38).$$
$$xx \quad xx \quad \text{add.}$$

$$\tfrac{1}{4}aa = b + xx$$
$$b \quad b \quad \text{Subtr.}$$

$$\tfrac{1}{4}aa - b = xx$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - b)} = x$$

Regula. 1. A quadrato ſemiſummæ duarum quantitatum ſubtrahatur factum earundem. 2. Ex reſiduo extrahatur radix, quæ erit ſemidifferentia earundem. Sit e. gr. $a = 14$, $b = 48$: erit $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Adeoque $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$; $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$. Sunt adeo numeri quæſiti 8 & 6. Nam $8 \cdot 6 = 48$ & $8 + 6 = 14$.

COROLLARIUM.

149. Quoniam $\frac{1}{2}a$ eſt dimidium totius a, x differentia partis æqualis ab inæquali, b rectangulum partium inæqualium, æquatio ſecunda hoc continet *theorema*: Si totum dividatur in duas partes æquales & in duas inæquales, quadratum partis æqualis æquale eſt rectangulo inæqualium una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

SCHOLION.

150. *Patet adeo, quod ſæpius caſu in theoremata incidamus, dum problemata algebraice reſolvimus; qualia ſubinde annotabimus. Regulas vero, quas quilibet*

quilibet proprio Marte ex ultima æquatione eruere valet, in posterum prætermittemus.

PROBLEMA 42.

151. *Data summa dignitatum similium duarum quantitatum & differentia earundem invenire quantitatem utramque.*

Sit summa $= a$ Quantit. maj. $= y$
differentia $= b$ min. $= x$
erit per conditionem probl.

$$x^m + y^m = a \qquad y^m - x^m = b$$
$$\underline{x^m \qquad x^m} \qquad \underline{x^m \qquad x^m}$$
$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$a - x^m = b + x^m$$
$$\underline{x^m \qquad x^m}$$
$$a = b + 2x^m$$
$$\underline{b \quad b}$$
$$a - b = 2x^m$$
$$\underline{\qquad\qquad} (2$$
$$(a-b):2 = x^m$$
$$\overline{}$$
$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x$$

Sit $m=2$, $a=97$, $b=65$: erit $x = \sqrt{(48\tfrac{1}{2} - 32\tfrac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4$ & hinc $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65+16)} = \sqrt{81} = 9$.

Examen: $x^2 + y^2 = 16 + 81 = 97$ &
$y^2 - b^2 = 81 - 16 = 65$.

Æquatio antepenultima resolvitur in hanc analogiam,

$$a - b : x^m = 2 : 1 \text{ (§. 299 } \textit{Arithm.}\text{)}$$

quæ sequens suppeditat

Theorema. Excessus summæ duarum dignitatum similium supra differentiam earundem est ad dignitatem minorem in ratione dupla.

PROBLEMA 43.

152. *Dato itinere diurno viatoris alicujus una cum itinere diurno alterius ipsum dato tempore sequentis, invenire tempus, quo illum hic assequetur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
secundi $= b$
tempus datum $= c$
tempus quæs. $= x$

erit iter intra tempus datum a primo confectum $= ac$, quod vero idem intra quæsitum emensus est $= ax$: iter posterioris intra tempus quæsitum reperietur $= bx$ (§. 302 *Arithm.*). Quare per conditionem problematis

$$ac + ax = bx$$
$$\underline{ax \qquad ax} \text{ subtr. quia } bx > ax$$
$$ac = bx - ax$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad} b-a$$
$$ac:(b-a) = x$$

Sit $a=6$, $b=8$, $c=4$: erit $x = 24:2 = 12$.

Examen. Quoniam primus itineri impendit 16, alter vero 12 dies

dies antequam conveniunt, & iter diurnum primi sit 6, secundi 8; via primi est 6. 16=96, secundi 8.12=96.

Æquatio penultima in hanc analogiam resolvitur (§. 299 *Aritbm.*).

$$b - a : a = c : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema: Si quidam viator alterum insequitur, tempore aliquo elapso, differentia viarum, quas eodem tempore uterque emetitur, est ad viam primi, quem alter insequitur, ut tempus ab itinere primi usque ad initium itineris secundi elapsum ad tempus, quo alter ipsum assequitur.

SCHOLION.

153. *Facile apparet, cum viatoris notio problematis resolutionem non ingrediatur, problema universalius de mobilibus quibuscunque concipi posse.*

PROBLEMA 44.

154. *Dato itinere diurno alicujus viatoris una cum tempore ab initio itineris elapso, invenire iter diurnum ab alio viatore conficiendum, ut in dato tempore illum assequatur.*

Sit iter diurnum primi $= a$

tempus elapsum $= b$

tempus datum $= c$

iter diurnum alterius $= x$

Erit per conditionem problematis ut in probl. præced.

$$ab + ac = cx$$

$$(ab + ac) : c = x$$

Sit e. gr. $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$: erit $x = (24 + 72) : 12 = 96 : 12 = 8$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam (§. 299 *Arithm.*)

$$c : b + c = a : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema. Si quidam viator alterum insequitur tempore aliquo elapso, erit tempus, intra quod ipsum assequitur, ad tempus ab initio itineris hujus elapsum, ut iter diurnum primi ad iter diurnum secundi.

PROBLEMA 45.

155. *Dato intervallo locorum, ex quibus eodem tempore duo viatores egrediuntur, una cum itinere diurno uniuscujuslibet, invenire tempus, quo sibi mutuo occurrent.*

Sit intervallum locorum $= a$

iter diurnum primi $= b$

secundi $= c$

tempus occursus $= x$

erit via a primo intra tempus x confecta $= bx$, via, quam alter eodem tempore emetitur, cx (§. 302 *Arithm.*). Quare cum ambo junctim emensi sint totum intervallum locorum, unde egrediebantur; habebimus

$$bx + cx = a$$
$$\overline{\qquad\qquad} b + c$$
$$x = a : (b + c)$$

Sit $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$: erit $x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12$. Duodecimo igitur die sibi mutuo occurrent.

SCHOLION.

156. *Problemata istiusmodi specialia sub initium difficiliora sunt solutu, quam abstracta, quoniam in his aequatio plerumque continetur, aut ex theorematibus arithmeticis facile eruitur, in illis autem ex circumstantiis problematis elicienda. Quodsi enim plures circumstantiae occurrunt, tyrones non statim eas pervident, quae aequationem suppeditant. Discant igitur consultius esse, ut problematis abstractis solvendis primas studii Algebraici partes consecrent: insuperque notent velim, facilius problemata specialia ad abstracta seu generalia, quam vice versa abstracta ad specialia revocari, quia ista conditiones generales, unde solutio pendet, actu continent, in his vero circumstantiae speciales, quae ad solutionem nil conferunt, minime comparent. E. gr. problema praesens in abstracto istiusmodi est.* Invenire numerum, qui in summam duorum datorum ductus producit numerum datum. *Similiter problema (§. 152) in abstracto tale est:* Datis tribus quantitatibus invenire quartam, ita ut factum ex quarta in secundam aequale sit facto ex prima in aggregatum ex tertia & quarta. *Hinc apparet ratio, cur theorematum usus non statim in oculos occurrat. Nocent igitur qui inveniri ac addisci prohibent ea, quorum usus nondum constat, vel non statim primo intuitu in oculos incurrit.*

PROBLEMA 46.

157. *Data summa duarum quantitatum & differentia quadratorum, invenire quantitates.*

Sit summa $= a$
differentia Quadr. $= b$
Semidiff. Quant. $= y$
erit Quant. maj. $= \frac{1}{2}a + y$.
minor $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 5).
Quare
Quadratum maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$
min. $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

Differ. (§. 30) $2ay = b$ per condit
$2a$ ——————— probl.
$y = b : 2a$

Sit $b = 40$, $a = 10$: erit $y = 40 : 20 = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $49 - 9 = 40$.

PROBLEMA 47.

158. *Data summa duarum quantitatum una cum summa quadratorum, invenire quantitatem utramque.*

Sit summa $= a$
Summa Quadr. $= b$
Semidiff. Quant. $= y$

erit

erit major $= \frac{1}{2}a + y$ } (§. 5).
minor $= \frac{1}{2}a - y$ }

Quare

Quadrat. maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$

minoris $\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2$

Summa $\frac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b$

$\frac{1}{2}a^2$ $\quad \frac{1}{2}a^2$ Subtr.

$2y^2 = b - \frac{1}{2}a^2$

2 div.

$y^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2$

$y = V(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)$

Sit $a = 10$, $b = 58$: erit $y = V(29 - 25) = V4 = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $7 + 3 = 10$ & $49 + 9 = 58$.

PROBLEMA 48.

159. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum ex unoquoque in radicem quadratam alterius sit æquale numero dato.*

Sit factum unum $= a$

alterum $= b$

numerus unus $= x$

alter $= y$

erit per conditionem problematis

$xVy = a \qquad yVx = b$

$x^2 y = a^2 \qquad y^2 x = b^2$

$-y \qquad -y^2$

$x^2 = a^2 : y \qquad x = b^2 : y^2$

$x^2 = b^4 : y^4$

$a^2 : y = b^4 : y^4$

y^4 mult.

$a^2 y^3 = b^4$

$-a^2$

$y^3 = b^4 : a^2$

$y = \overset{3}{V}(b^4 : a^2)$

Sit $a = 18$, $b = 12$: erit $y = \overset{3}{V}(20736 : 324) = \overset{3}{V}64 = 4$. Ergo $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

Examen. $9V4 = 2.9 = 18$ & $4V9 = 4.3 = 12$.

PROBLEMA 49.

160. *Invenire duos numeros, quorum factum æquale est numero dato, quadratum vero summæ ad quadratum differentiæ habet rationem datam.*

Sit factum $= a$ $\qquad$ Summa $= 2x$

ratio $= b : c$ $\qquad$ different. $= 2y$

erit major $= x + y$

minor $= x - y$

Ergo per conditiones problematis

$xx - yy = a \quad b : c = 4x^2 : 4y^2$

$y^2 \quad y^2$

$4cx^2 = 4by^2$ (§. 297 Arithm.).

$x^2 = a + y^2 \quad 4c$

$x^2 = by^2 : c$

Quare (§. 87 *Arithm.*

$a + y^2 = by^2 : c$

c mult.

$ac + cy^2 = by^2$

$cy^2 \quad cy^2$ Subtr.

$ac = by^2 - cy^2$

$b - c$

$ac : (b - c) = y^2$

$\sqrt{ac} : \sqrt{(b - c)} = y$

Sit $a = 96$, $b : c = 25 : 1$. Erit $y = \sqrt{96} : \sqrt{(25 - 1)} = \sqrt{4} = 2$ & $x = \sqrt{(a + y^2)} = \sqrt{(96 + 4)} = \sqrt{100} = 10$, consequenter numerus major $x + y = 10 + 2 = 12$ & minor $x - y = 10 - 2 = 8$.

Examen. $12 . 8 = 96$ & $100 : 4 = 25 : 1$.

PROBLEMA 50.

161. *Dato pretio unius mensuræ vini, invenire quantitatem aquæ commiscendæ, ut una mensura dato alio pretio minore vendi queat.*

Sit pretium majus $= a$
minus $= b$
quantitas aquæ $= x$

Cum aquæ pretium nullum sit; erit

$1 + x : 1 = a : b$ consequenter

$b + bx = a$ (§. 297 *Arithm.*).

$bx = a - b$

b

$x = (a - b) : b = a : b - 1$

Sit $a = 16$, $b = 10$: erit $x = 1\frac{6}{10} - 1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Theorema. Si vino pretiosiori aqua commiscenda, ut viliori pretio constet; quantitas aquæ commiscendæ est ad quantitatem vini, ut differentia pretiorum ad pretium minus.

Nempe vi æquationis penultimæ $x : 1 = a - b : b$.

Examen. Etenim si integra mensura veneat 10 grossis, tres ipsius quintæ veneunt 6 grossis (§. 302 *Arithm.*), quos si addas pretio unius mensuræ, quod est 10 grossorum, prodibunt 16 grossi pretium unius mensuræ vini generosioris.

PROBLEMA 51.

162. *Dato pretio vini generosi & pretio vilioris, determinare quantitatem vini vilioris generoso commiscendi, ut dato aliquo pretio medio venire queat.*

Sit pretium unius mensuræ vini generosi $= a$
vilioris $= b$
medium $= c$
quantitas unius mensuræ $= 1$
quantitas vilioris commiscendi $= x$

quan-

erit pretium ejus $= bx$
quantitas generosi commiscendi $= 1 - x$
erit ejus pretium $= a - ax$
Quare per conditionem problematis

$$a - ax + bx = c$$
$$ax \quad ax \text{ add. ob } ax > bx$$
$$a + bx = c + ax$$
$$bx \quad bx$$
$$a = c + ax - bx$$
$$c \quad c$$
$$a - c = ax - bx$$
$$\quad a - b$$
$$(a - c) : (a - b) = x$$

Sit $a = 16$, $b = 10$, $c = 12$; erit $x = (16 - 12) : (16 - 10) = 4 : 6 = \frac{2}{3}$.

Examen. Pretium $\frac{2}{3}$ vilioris $= 6\frac{2}{3}$, generosi $= 5\frac{1}{3}$, adeoque mensuræ mixti $= 6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 12$.

PROBLEMA 52.

163. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum, summa & differentia quadratorum sint inter se æqualia.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$: erit per conditionem problematis

$$x^2 - y^2 = xy \qquad x + y = xy$$
$$y \quad y$$
$$x = xy - y$$
$$\quad x - 1$$
$$x : (x - 1) = y$$

Quodsi valor ipsius y jam inventus in æquatione dexteriore substituatur, habebimus

$$x^2 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2}{x - 1}$$
$$\quad x^2 - 2x + 1$$
$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$$
$$x^4 - 2x^3 = x^3 - x^2$$
$$x^3 \quad x^3 \quad \text{subtr.}$$
$$x^4 - 3x^3 = -x^2$$
$$\quad x^2 \text{ div.}$$
$$x^2 - 3x = -1$$
$$\tfrac{9}{4} \quad \tfrac{9}{4} \quad (\S.143)$$
$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 1 = \tfrac{5}{4}$$
$$x - \tfrac{3}{2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$\tfrac{3}{2} - x =$$
$$x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Est vero $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ radix vera; sed $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ non est numerus minor y, quia, si numerus minor diceretur y, ad aliam æquationem deveniretur, quemadmodum apparet, si valore ipsius x per æquationem $xy - x = y$ reperto & in æquatione $x^2 - y^2 = xy$ substituto, reductio legitime instituatur. Tunc enim reperitur $y = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, ubi $1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ est radix falsa, quia $\frac{1}{2}\sqrt{5} > 1$.

Exa-

Examen. Est enim $x + y = 2 + \sqrt{5}$, $xy = 2 + \sqrt{5}$ & $x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$.

PROBLEMA 53.

164. *Datis in progressione arithmetica termino primo & ultimo atque differentia terminorum, invenire numerum terminorum & summam progressionis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
differentia $= d$
numerus terminorum $= x$
summa $= y$

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 170 *Analys.*)

$$b = a + dx - d \qquad y = \tfrac{1}{2}(b + a)x$$

$$b + d - a = dx$$

$$(b + d - a) : d = x$$

Quodsi hic valor in æquatione dextra substituatur, habebimus
$y = \frac{1}{2}(b + a)(b + d - a) : d = (b^2 + bd - ab + ab + ad - a^2) : 2d = (b^2 + bd + ad - a^2) : 2d = \frac{1}{2}(b + a) + (b^2 - a^2) : 2d$.

Sit $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$: erit $x = (17 + 3 - 2) : 3 = 18 : 3 = 6$ & $y = \frac{1}{2}(17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{6} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

PROBLEMA 54.

165. *Datis termino primo, differentia terminorum & summa progressionis arithmeticæ, invenire numerum terminorum & terminum ultimum.*

Sit terminus primus $= a$
differentia $= d$
Summa $= c$
ultimus $= y$
terminorum numerus $= x$

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 170 *Analys.*)

$$\tfrac{1}{2}x(a + y) = c \qquad a + dx - d = y$$

$$ax + xy = 2c$$

ax Subtr.

$$xy = 2c - ax$$

$$y = (2c - ax) : x$$

Ergo (§. 87 *Arithm.*)

$$(2c - ax) : x = a + dx - d.$$

$$2c - ax = ax + dx^2 - dx$$

$$2c = dx^2 + 2ax - dx$$

$$\frac{2c}{d} = x^2 + \frac{2a - d}{d}x$$

hoc est, si fiat $(2a - d) : d = m$

$$2c : d = x^2 + mx$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 \qquad \tfrac{1}{4}m^2$$

$\frac{1}{4}m^2$

$$\tfrac{1}{4}m^2 + 2c:d = x^2 + mx + \tfrac{1}{4}m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2c:d)} = x + \tfrac{1}{2}m$$

$$\tfrac{1}{2}m \qquad \tfrac{1}{2}m$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2c:d)} - \tfrac{1}{2}m = x$$

Sit $a = 2$, $d = 3$, $c = 57$: erit $m = (4-3):3 = \tfrac{1}{3}$, consequenter $x = \sqrt{(\tfrac{1}{36} + \tfrac{114}{3})} - \tfrac{1}{6} = \sqrt{\tfrac{1369}{36}} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{37}{6} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{36}{6} = 6$ & $y = 2 + 18 - 3 = 2 + 15 = 17$.

PROBLEMA 55.

166. *Datis termino primo & ultimo una cum summa progressionis arithmeticæ invenire numerum & differentiam terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
Summa $= c$
differentia $= y$
numerus terminorum $= x$

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Analys.*)

$$\tfrac{1}{2}x(a+b) = c \qquad a + xy - y = b$$

$$\quad 2$$

$$x(a+b) = 2c \qquad xy - y = b - a$$

$$x = 2c:(a+b) \qquad y = b - a$$

$$x - 1 = 2c \qquad\qquad x - 1$$

$$\overline{\quad a+b \quad} - 1 \qquad = (b+a)(b-a)$$

$$= \frac{2c - a - b}{a+b} \qquad \overline{\;2c - a - b\;}$$

Sit $a = 2$, $b = 17$, $c = 57$: erit $x = 114:19 = 6$ & $y = (19 \cdot 15):(114-19) = 285:95 = 3$.

Theorema. In progressione Arithmetica est ut differentia summæ ex termino primo & ultimo a duplo summæ progressionis ad differentiam termini primi ab ultimo, ita summa termini primi & ultimi ad differentiam progressionalem.

PROBLEMA 56.

167. *Datis differentia & numero terminorum una cum summa progressionis arithmeticæ, invenire terminum primum & ultimum.*

Sit numerus terminorum $= n$
differentia $= d$
Summa $= c$
term. I $= x$
ultimus $= y$

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Analys.*)

$$\tfrac{1}{2}nx + \tfrac{1}{2}ny = c \qquad x + nd - d = y$$

h.e. $nx + \tfrac{1}{2}n^2 d - \tfrac{1}{2}nd = c$

$$\tfrac{1}{2}n$$

$$2x + nd - d = 2c:n$$

$$2x = 2c:n - nd + d$$

$$2$$

$$x = c:n - \tfrac{1}{2}nd + \tfrac{1}{2}d$$

Sit $n = 6$, $d = 3$, $c = 57$: erit $x = 9\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{2} - 9 = 2$ & $y = 2 + 18 - 3 = 17$.

PROBLEMA 57.

168. *Datis differentia terminorum, termino ultimo & summa progressionis arithmeticæ, invenire terminum primum & numerum terminorum.*

Sit terminus ultimus $= b$
terminorum differ. $= d$
Summa $= c$
terminus primus $= x$
numerus termin. $= y$

erit (*§.* 333 *Arithm.* & *§.* 107 *Analys.*)

$$\tfrac{1}{2}y(x+b) = c \qquad b = x + dy - d$$
$$\cdot 2$$
$$y(b+x) = 2c \qquad b + d - x = dy$$
$$y = 2c:(b+x) \qquad (b+d-x):d = y$$

Quamobrem (*§.* 87 *Arithm.*)

$$2c:(b+x) = (b+d-x):d$$
$$\cdot d$$
$$2cd:(b+x) = b+d-x$$
$$\cdot b+x$$
$$2cd = b^2 + bd - bx + bx + dx - x^2$$
$$x^2 - dx = b^2 + bd - 2cd$$
$$\tfrac{1}{4}d^2 \qquad \tfrac{1}{4}d^2 \quad (\S.143).$$
$$x^2 - dx + \tfrac{1}{4}d^2 = \tfrac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd$$
$$x - \tfrac{1}{2}d = \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$$
$$\tfrac{1}{2}d - x =$$
$$x = \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$$

Quodsi $\tfrac{1}{2}d > x$, erit $\tfrac{1}{2}d - x$ quantitas positiva, adeoque $x = \tfrac{1}{2}d - \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$: si vero $\tfrac{1}{2}d < x$, quantitas $\tfrac{1}{2}d - x$ æquivalet privativo, sed $x - \tfrac{1}{2}d$ positivo, adeoque $x = \tfrac{1}{2}d + \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + b^2 + bd - 2cd)}$.

Sit $b = 17$, $d = 3$, $c = 57$: erit $x = \tfrac{3}{2} + \sqrt{(\tfrac{9}{4} + 289 + 51 - 342)} = \tfrac{3}{2} + \sqrt{(2\tfrac{1}{4} - 2)} = \tfrac{3}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{2} = 2$, & $y = (17 + 3 - 2):3 = \tfrac{18}{3} = 6$.

PROBLEMA 58.

169. *Datis summa progressionis arithmeticæ, numero terminorum & facto ex primo in ultimum, invenire terminos singulos.*

Sit factum $= a$
numerus terminorum $= n$
Summa $= c$
terminus I $= x$
ultimus $= y$

erit (§. 107 *& per condit. probl.*)

$$\tfrac{1}{2}n(x+y) = c \qquad xy = a$$
$$\tfrac{1}{2}n \qquad\qquad x$$
$$x + y = 2c:n \qquad y = a:x$$

h. e. $x + \dfrac{a}{x} = \dfrac{2c}{n}$

$$x^2 + a = \frac{2cx}{n}$$
$$x^2 - 2cx:n = -a$$
$$c^2:n^2 \qquad c^2:n^2$$

x^2 —

$$x^2 - 2cx : n + c^2 : n^2 = c^2 : n^2 - a$$

$$x - c : n = \sqrt{(c^2 : n^2 - a)}$$

$$c : n - x =$$

$$x = \frac{c}{n} + \sqrt{(c^2 : n^2 - a)}$$

Signum + valet pro termino ultimo; signum autem — pro primo.

Sit $c = 57$, $n = 6$, $a = 34$: erit $x = \frac{57}{6} - \sqrt{(\frac{3249}{36} - 34)} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{(90\frac{1}{4} - 34)} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{56\frac{1}{4}} = 9\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{225}{4}} = 9\frac{1}{2} + \frac{15}{2} = 17$ & $y = 9\frac{1}{2} - 7\frac{1}{2} = 2$.

PROBLEMA 59.

170. *Invenire numerum terminorum in serie imparium summandorum, ut prodeat potentia data numeri dati.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
erit dignitas ejus $= n^m$
term. I. progr. $= 1$
differ. Term. $= 2$
Sit Num. term. $= x$
erit summa progress. $= x^2$ (§. 108).
Ergo *per conditionem probl.*

$$x^2 = n^m$$

$$x = n^{m:2}$$

Patet adeo, problema non esse possibile nisi in iis casibus, ubi exponens dignitatis m est numerus par, ut per 2 dividi possit.

E. gr. Sit $m = 2$, erit $x = n$, hoc est, numerus terminorum est idem cum radice quadrata, quemadmodum supra reperimus (§. 110). Sit $m = 4$; erit $x = n^2$, hoc est, numerus terminorum summandorum est radicis quadratus, si potentia quarti gradus desideretur, veluti si $n = 2$, erit $2^4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

PROBLEMA 60.

171. *Invenire numeros impares totidem numero, quot numerus datus habet unitates, & quorum additione prodit potentia data numeri hujus dati.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
dignitas ejus $= n^m$
terminus primus $= x$

Quoniam in serie numerorum imparium differentia terminorum $= 2$ & numerus terminorum est n *per hypoth.* erit summa progressionis $= nx + n^2 - n$ (§. 108), consequenter *per conditionem problematis.*

$$nx + n^2 - n = n^m$$

$$\overline{}\; n$$

$$x + n - 1 = n^{m-1}$$

$$n - 1 \quad n - 1 \text{ subtr.}$$

$$x = n^{m-1} - n + 1$$

Patet

Patet adeo problema eſſe poſſibile in omni caſu.

Sit e. gr. $m = 2$, erit $x = n - n + 1 = 1$, ut ſupra (§. 110).

Sit $m = 3$, erit $x = n^2 - n + 1$, ſit porro $n = 2$, erit $x = 4 - 1 = 3$, adeoque $2^3 = 3 + 5 = 8$. Sit $n = 3$. erit $x = 9 - 2 = 7$, ad eoque $3^3 = 7 + 9 + 11 = 27$.

Patet adeo quomodo numeri cubici ex additione numerorum imparium procreentur.

Sit $m = 4$, erit $x = n^3 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 8 - 1 = 7$, adeoque $2^4 = 7 + 9 = 16$. Sit $n = 3$, erit $x = 27 - 2 = 25$, adeoque $3^4 = 25 + 27 + 29 = 81$.

Sit $m = 5$, erit $x = n^4 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 16 - 1 = 15$, adeoque $2^5 = 15 + 17 = 32$. Sit $n = 3$, erit $x = 81 - 2 = 79$, adeoque $3^5 = 79 + 81 + 83 = 243$.

SCHOLION.

172. *Mira igitur facilitate oſtendimus ad captum tyronum, quomodo potentiæ cujuscunque gradus ex additione numerorum imparium procreentur, quod imperfectius multoque intricatius proponitur in Miſcellaneis Berolinenſibus* p. 327 & ſeqq.

PROBLEMA 61.

173. *Invenire tres numeros continue proportionales, dato facto ex quadrato tertii in primum una cum denominatore rationis.*

Sit factum $= a$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit ſecundus $= mx$
tertius $= mx^2$ } (§. 114).

Quare per conditionem problematis

$$a = m^4 x^3$$

$$a : m^4 = x^3$$

$$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$$

Sit e. gr. $a = 648$, $m = 3$: erit $x = \sqrt[3]{(648 : 81)} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Æquatio prima in hanc reſolvitur analogiam: $1 : m^4 = x^3 : a$ (§. 299 *Arithm.*). Quare cum $1 : m^4$ ſit ratio quadruplicata $1 : m$ (§. 159 *Arithm.*); ſequens enaſcitur

Theorema: Cubus termini primi in proportione geometrica continua eſt ad factum ex quadrato tertii in primum in ratione quadruplicata primi ad ſecundum.

PROBLEMA 62.

174. *Numerum datum in tres partes continue proportionales dividere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$
denominator $= b$
pars prima $= x$

erit

erit secunda $= bx$

tertia $= b^2 x$

& per conditionem problematis.

$$b^2 x + bx + x = a$$

$$\overline{\qquad\qquad} b^2 + b + 1$$

$$x = a : (b^2 + b + 1)$$

Sit $b = 4$, $a = 42$: erit $x = 42 : (16 + 4 + 1) = 42 : 21 = 2$

PROBLEMA 63.

175. *Numerum datum in terminos quotcunque proportionales resolvere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$

denominator $= m$

terminus I $= x$

erit secundus $= mx$

tertius $= m^2 x$

quartus $= m^3 x$ &c.

Ergo per conditionem problematis.

$$x + mx + m^2 x + m^3 x + m^4 x \text{ \&c.} = a$$

$$x = a : (1 + m + m^2 + m^3 + m^4 \text{ \&c.})$$

Sit $a = 364$, $m = 3$ & termini sint numero sex: erit $x = 364 : (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243) = 364 : 364 = 1$. Ergo 1. 3. 9. 27. 81. 243 est series proportionalium quæsita.

PROBLEMA 64.

176. *Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios continue proportionales.*

RESOLUTIO.

Sit primus datorum $= a$

ultimus $= b$

mediorum primus $= x$

numerus mediorum $= m$

erit per conditionem problematis (§. 302 *Arithm.*)

$$a.\ x.\ \frac{x^2}{a}.\ \frac{x^3}{a^2}.\ \frac{x^4}{a^3}.\ \text{\&c.}\ \frac{x^m}{a^{m-1}}.\ b$$

consequenter (§. 118)

$$x^{m+1} : a^{m-1} = ab$$

$$\overline{\qquad\qquad} a^{m-1}$$

$$x^{m+1} = a^m b$$

$$x = \sqrt[m+1]{a^m b}$$

Sit $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$; erit $m + 1 = 5$, adeoque $x = \sqrt[5]{243} = 3$, consequenter termini intermedii sunt 3. 9. 27. 81.

SCHOLION.

177. *Ad manus esse debet tabula dignitatum superiorum pro digitis singulis, qualis extat pro quadratis & cubis (§. 257 Arithm.).*

COROLLARIUM.

178. Quodsi numerus, qui exprimit terminum desideratum, fuerit n; erit medius proportionalis $= x^n : a^{n-1}$. Quare si pro x substituatur valor modo inventus

ventus $\sqrt[m+1]{a^m b} = a^{m:(m+1)}\ b^{1:(m+1)}$, prodibit numerus quæſitus $= a^{mn:(m+1)}\ b^{n:(m+1)} : a^{n-1} = a^{mn:(m+1)}\ b^{n:(m+1)} : a^{(mn-m+n-1):(m+1)} = a^{(m-n+1):(m+1)}\ b^{n:(m+1)}$.

SCHOLION.

179. *Cadant e. gr. inter* 1 *&* 243 *quatuor medii proportionales continue & quæratur eorum ſecundus: erit* $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$, $n = 2$, *adeoque* $(m + n - 1) : (m + 1) = \frac{3}{5}$, $n : (m + 1) = \frac{2}{5}$, *conſequenter numerus quæſitus* $\sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[5]{59049} = 9$.

PROBLEMA 65.

180. *Data ſumma termini primi & ultimi, itemque ſumma ſecundi & tertii in proportione ſive continua, ſive diſcreta, una cum denominatore rationis, invenire terminos ſingulos.*

Sit ſumma I $= a$
II $= b$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit quartus $= a - x$
ſecundus $= mx$
tertius $= b - mx$

Quare per conditionem problematis.

$$x : mx = b - mx : a - x$$

Hinc $ax - x^2 = mbx - m^2 x^2$ — x

$$a - x = mb - m^2 x$$

$$m^2 x - x = mb - a \quad — m^2 - 1$$

$$x = \frac{mb - a}{m^2 - 1}$$

Sit $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$: erit $x = (22 - 13) : (4 - 1) = 9 : 3 = 3$.

Analogia, in quam æquatio penultima reſolvitur, $m - 1 : m^2 - 1 = x : b - a$, hoc ſuppeditat

Theorema: Denominator rationis unitate minutus eſt ad quadratum ſuum unitate pariter mulctatum, ut terminus primus proportionis ſive continuæ, ſive diſcretæ ad differentiam ſummæ ſecundi & tertii a ſumma primi & ultimi.

PROBLEMA 66.

180. *Invenire tres numeros continue proportionales ejus conditionis, ut differentia primi & ſecundi æquetur numero dato & differentia ſecundi atque tertii æqualis ſit itidem numero dato.*

Sit differ. I $= a$
differ. II $= b$
terminus I $= x$
erit II $= x + a$
III $= x + a + b$

Per conditionem problematis:

$x : x$

$x : x + a = x + a : x + a + b$

$x^2 + ax + bx = x^2 + 2ax + a^2$
$x^2 + ax \qquad x^2 + ax$

$bx = ax + a^2$

$bx - ax = a^2$

$(b-a)$

$x = a^2 : (b-a)$

Sit $a = 8$, $b = 24$: erit $x = 64 : (24 - 8) = 64 : 16 = 4$.

Analogia, in quam resolvitur æquatio antepenultima, $b - a : a = a : x$, sequens continet

Theorema: Si fuerint tres numeri continue proportionales, erit differentia primi & secundi numerus medius proportionalis inter differentiam differentiæ termini primi & secundi a differentia secundi ac tertii & terminum primum.

PROBLEMA 67.

181. *Datis in progressione geometrica termino primo & ultimo atque terminorum numero, invenire denominatorem rationis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
numerus terminorum $= n$
denominator $= x$
Erit (§. 121)

$b = x^{n-1} a$

a

$b : a = x^{n-1}$

$b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$: erit $x = \sqrt[5]{(486 : 2)} = \sqrt[5]{243} = 3$.

PROBLEMA 68.

182. *Datis denominatore rationis, terminorum numero & summa progressionis geometricæ, invenire terminum primum.*

Sit denominator $= m$
numerus terminorum $= n$
summa progress. $= c$
terminus I $= x$
erit ultimus $= m^{n-1}x$
consequenter (§. 121)

$c = (m^n x - x) : (m - 1)$

$m - 1$

$mc - c = m^n x - x$

$m^n - 1$

$(mc - c) : (m^n - 1) = x$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$: erit $x = 2 . 728 : 728 = 2$

Analogia, in quam æquatio penultima resolvitur, $c : x = m^n - 1 : m - 1$, suppeditat hoc

Theorema: Summa progressionis geometricæ est ad terminum primum ut dignitas denominatoris rationis, cujus exponens numero terminorum æqualis

qualis eſt, unitate mulctata ad denominatorem ipſum unitate imminutum.

PROBLEMA 69.

183. *Datis in progreſſione geometrica termino primo & ultimo una cum denominatore rationis, invenire numerum terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= m$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 121)

$m^{x-1} a = b$, hoc eſt, ſi logarithmus ipſius a ponatur la & logarithmus ipſius $m = lm$.

$$xlm - lm + la = lb \quad (\text{§. 341 Arithm.})$$

$$xlm = lb - la + lm$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; lm$$

$$x = (lb - la) : lm + 1$$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $m = 3$, erit

$lb = 2.6866363$
$la = 0.3010300$

$lb - la = 2.3856063$

3 1 1
$lb - la =$ 2385606̶3 (struck through) (5
$lm =$ 4771213 (struck through) (1

$6 = x$

PROBLEMA 70.

184. *Datis ſumma progreſſionis geometricæ, termino primo atque ultimo, invenire numerum terminorum ac denominatorem rationis.*

Sit ſumma $= c$
terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= y$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 121)

$$c = (by - a) : (y - 1) \qquad b = y^{x-1} a$$

$$cy - c = by - a$$

$$cy - by = c - a$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; c - b$$

$$y = (c - a) : (c - b)$$

Æquatio altera adhibitis logarithmis in ſequentem degenerat (§. 307 *Arithm.*).

$$lb = xly - ly + la$$

$$lb + ly - la = xly$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; ly$$

$$(lb - la) : ly + 1 = x$$

Quodſi ſubſtituatur valor ipſius ly paulo ante inventus, qui eſt, $l(c-a) - l(c-b)$; habebimus.

$$\frac{lb - la}{l(c-a) - l(c-b)} + 1 = x$$

Sit $c = 728$, $a = 2$, $b = 486$: erit

$lb =$

$lb = 2.6866363$	$c = 728$
$la = 0.3010300$	$b = 486$
$lb - la = 2.3856063$	$c - b = 242$
$l(c-a) = 28609366$	$c = 728$
$l(c-b) = 23838154$	$a = 2$
Differ. $= 4771212$	$c - a = 726$

$$\frac{23856063}{4771212} \left(\frac{5}{1} \right.$$

$$6 = x$$

PROBLEMA 71.

185. *Datis in progressione geometrica facto ex primo in ultimum, numero terminorum & denominatore rationis, invenire terminum primum & ultimum.*

Sit factum $= f$
numer. termin. $= n$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$
erit per conditiones problematis:

$$xy = f \qquad m^{n-1} x = y$$

$$y = f : x$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$f : x = m^{n-1} x$$

$$f = m^{n-1} x^2$$

$$f : m^{n-1} = x^2$$

$$\sqrt{f} : \sqrt{m^{n-1}} = x$$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $f = 972$: erit $\sqrt{972} : \sqrt{243} = \sqrt{4} = 2$.

DEFINITIO 13.

186. Tres vel quatuor *quantitates* dicuntur *harmonice proportionales*, si in priore casu differentia primi & secundi fuerit ad differentiam secundi atque tertii, ut primus ad tertium; in casu posteriore differentia primi & secundi ad differentiam tertii & quarti ut primus ad quartum: E. gr. 10, 16 & 40 sunt in proportione harmonica: est enim $6 : 24 = 10 : 40$. Si termini proportionales in casu priore continuentur; oritur *Progressio harmonica*.

PROBLEMA 72.

187. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 186)

$$b - a : x - b = a : x$$

$$ax - ab = bx - ax \quad \text{(§. 297 } Arithm.\text{)}$$

$$2ax - bx = ab$$

$$x = ab : (2a - b)$$

E. gr. Sit $a = 10$, $b = 16$: erit $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam $2a - b : a = b : x$, unde sequens enascitur

Theorema. Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit differentia secundi a duplo primi ad primum, ut secundus ad tertium.

COROLLARIUM 1.

188. Si $2a = b$; erit $x = ab : 0$, consequenter $1 : 0 = x : ab$ (§. 174 *Arithm.*). Quare cum non sit $1 = 0$, nec erit $x = ab$, adeoque in hoc casu nullus numerus harmonice proportionalis ipsis a & b inveniri potest. E. gr. si $a = 12$, $b = 24$: juxta regulam $x = 12.24 : (24 - 24) = 12.24 : 0$. Sed non licet 12.24 seu 288 pro termino tertio assumere: alias enim foret $12 : 264 = 12 : 288$ (§.186): Quod absurdum. Multo minus inveniri poterit, si $b > 2a$.

COROLLARIUM 2.

189. Quodsi ex tribus proportionalibus 6. 8. 12 terminus secundus sumatur pro a, tertius pro b, invenietur quartus continue proportionalis $= 8.12 : (16 - 12) = 8.12 : 4 = 8.3 = 24$.

COROLLARIUM 3.

190. Cum eodem modo, si tertius pro a, quartus pro b sumatur, quintus inveniri queat & ita porro in infinitum; datis duobus terminis progressio, si possibile (§. 188), continuatur per regulam inventam. E. gr. si $a = 10$, $12 = b$, erit tertius $12.10 : (20 - 12) = 15$. Inde quartus $12.15 : (24 - 15) = 20$, quintus $15.20 : (30 - 20) = 30$; sextus $20.30 : (40 - 30) = 60$. Sed ulterius continuari nequit ob $60 = 2.30$ (§.188).

PROBLEMA 73.

191. *Datis duabus quantitatibus, invenire mediam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= x$
tertia $= b$

erit $x - a : b - x = a : b$ (§.186)

$$bx - ab = ab - ax \quad (\text{§. 297 } Arithm.)$$

$$ax + bx = 2ab$$

$$x = 2ab : (a + b)$$

E. gr. Sit $a = 10$, $b = 40$: erit $x = 800 : 50 = 16$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam, $a + b : 2a = b : x$, unde

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit summa primi & ultimi ad primi duplum ut ultimus ad medium.

PRO-

PROBLEMA 74.

192. *Datis tribus quantitatibus, invenire quartam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= c$
quarta $= x$
erit (§. 186)

$$b - a : x - c = a : x$$

$$bx - ax = ax - ac \quad (\text{§.297 } Arithm.)$$

$$ac = 2ax - bx$$

$$ac : (2a - b) = x$$

Sit e. gr. $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$: erit $72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam: $2a - b : a = c : x$.

Theorema. Si fuerint quatuor quantitates harmonice proportionales, erit ut differentia secundæ a duplo primæ ad primam, ita tertia ad quartam.

DEFINITIO 14.

193. *Proportio contraharmonica* est ea terminorum trium relatio, in qua differentia primi & secundi est ad differentiam secundi & tertii ut tertius ad primum. E. gr. 3, 5 & 6 sunt numeri contraharmonice proportionales; est enim $2 : 1 = 6 : 3$.

PROBLEMA 75.

194. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 193)

$$b - a : x - b = x : a$$

$$ab - aa = x^2 - bx \quad (\text{§.297 } Arithm.)$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \qquad \tfrac{1}{4}b^2 \qquad (\text{§.143})$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2 = x^2 - bx + \tfrac{1}{4}b^2$$

$$V(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2) = x - \tfrac{1}{2}b \text{ ob } x > b$$

$$\tfrac{1}{2}b + V(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2) = x$$

E. gr. Sit $a = 3$, $b = 5$: erit $x = \frac{5}{2} + V(\frac{25}{4} + 15 - 9) = \frac{5}{2} + V\frac{49}{4} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

PROBLEMA 76.

195. *Datis duabus quantitatibus invenire mediam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$ media $= x$
tertia $= b$
erit (§. 193)

$$x - a : b - x = b : a$$

$$ax - a^2 = b^2 - bx \quad (\text{§. 297 } Arith.)$$

$$ax + bx = a^2 + b^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad a+b}$$
$$x = (a^2 + b^2) : (a + b)$$

E. gr. sit $a = 3$, $b = 6$: erit $x = (9 + 36) : (3 + 6) = 45 : 9 = 5$.

Theorema. Si summa 2 quadratorum dividitur per summam radicum, quotus est inter radices medius contraharmonice proportionalis.

DEFINITIO 15.

196. *Numerus pronicus* est, qui aggregato ex radice & quadrato ejusdem æqualis.

COROLLARIUM 1.

197. Si in progressione arithmetica terminus primus fuerit 2, differentia terminorum itidem 2, numerus terminorum $= n$; erit summa progressionis $= 2n + \frac{1}{2}(n^2 - n) 2$ (§. 108), $= 2n + n^2 - n = n^2 + n$, adeoque numerus pronicus, cujus radix numero terminorum æqualis.

COROLLARIUM 2.

198. Patet adeo numeros pronicos prodire per summationem progressionis numerorum parium. Sit enim

progressio 2. 4. 6. 8. 10 &c.
erunt pronici 2. 6. 12. 20. 30 &c.

PROBLEMA 77.

199. *Ex dato numero radicem pronicam extrahere.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= a$, radix pronica $= x$

erit (§. 196)

$$x^2 + x = a$$
$$\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \quad (\S. 143)$$
$$x^2 + x + \tfrac{1}{4} = a + \tfrac{1}{4}$$
$$\tfrac{1}{2} + x = V(a + \tfrac{1}{4}) = V\frac{(4a+1)}{4}$$
$$= \tfrac{1}{2} V(4a+1)$$
$$x = \tfrac{1}{2} V(4a+1) - \tfrac{1}{2}$$

Theorema. Si quadruplo numeri pronici addatur unitas & radix unitate mulctata bifariam dividatur, quotus est radix pronica.

Sit $a = 72$, erit $x = \frac{1}{2} V(4.72 + 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} V 289 - \frac{1}{2} = \frac{17}{2} - \frac{1}{2} = 8$.

Examen. Nam $64 + 8 = 72$.

PROBLEMA 78.

200. *Invenire summam quadratorum & cuborum, quorum radices in serie numerorum naturali progrediuntur.*

Sit $0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ &c. $= \int n^0$
$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ &c. $= \int n^1$
$0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25$ &c. $= \int n^2$
$0 + 1 + 8 + 27 + 64 + 125$ &c. $= \int n^3$
&c. &c.

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ &c. $= \int (n+1)^0$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ &c. $= \int (n+1)^1$

1 + 4

$1+4+9+16+25+36$ &c. $= \int(n+1)^2$

$1+8+27+64+125+216$ &c. $= \int(n+1)^3$ &c. &c.

Nimirum $\int n^0$ denotat summam quotlibet unitatum seriei a cyphra incipientis; $\int(n+1)^0$ summam quotlibet unitatum seriei ab unitate incipientis, quia o est exponens unitatis (§. 55). Sed n repræsentat unamquamque unitatem in serie prima; $n+1$ in altera. Ergo si numerus terminorum in utraque serie idem; erit $\int(n+1)^0 - \int n^0 = (n+1)^0 = 1$. Similiter $\int n^1$ denotat summam seriei numerorum naturalium a cyphra incipientis & n quemlibet ejus terminum: $\int(n+1)^1$ summam seriei eorundem numerorum ab unitate incipientium & $n+1$ quemlibet ejus terminum 1, 2, 3 &c. quia 1 est exponens radicum, seu dignitatis primæ (§. *cit.*). Quare si in utraque serie fuerit idem terminorum numerus, erit $\int(n+1)^1 - \int n = (n+1)^1$, ubi $n+1$ terminum ultimum seriei ab unitate incipientis denotat, quo scilicet ea differt a serie, quæ a cyphra inchoatur. Eodem modo patet, esse $\int(n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$, $\int(n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$, $\int(n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$ &c. & in genere $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$.

Jam $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (§. 81)

$$\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n^1 + \int n^0 + 1$$

$$\int(n+1)^2 - \int n^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1$$

hoc est, ob $\int(n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$ *per dem.*

$$(n+1)^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1$$

2

$$\tfrac{1}{2}(n+1)^2 - \tfrac{1}{2}\int n^0 - \tfrac{1}{2} = \int n^1$$

E. gr. $n=5$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = \frac{36}{2} = 18$, $\frac{1}{2}\int n^0 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, adeoque $\int n^1$ summa omnium radicum ab 0 usque ad $5 = 18 - 3 = 15$. Similiter sit $n=3$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = 8$, $\frac{1}{2}\int n^0 = 1\frac{1}{2}$, adeoque $\int n = 6$.

Est porro

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \text{ (§. 84)}$$

$$\int(n+1)^3 = \int n^3 + 3\int n^2 + 3\int n^1 + \int n^0 + 1$$

$$\int(n+1)^3 - \int n^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$$

h. e. ob $\int(n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$ *per demonst.*

$$(n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$$

3

$$\tfrac{1}{3}(n+1)^3 - \int n^1 - \tfrac{1}{3}\int n^0 - \tfrac{1}{3} = \int n^2$$

E. gr. Sit $n=5$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = \frac{216}{3} = 72$, $\int n^1 = 15$, $\frac{1}{3}\int n^0 = 1\frac{2}{3}$, adeoque $\int n^2 = 72 - 17 = 55$. Similiter sit $n=3$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = 21\frac{1}{3}$, $\int n = 6$, $\frac{1}{3}\int n^0 = 1$, adeoque $\int n^2 = 21\frac{1}{3} - 7\frac{1}{3} = 14$.

Sit denique

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$\int(n+1)^4 = \int n^4 + 4\int n^3 + 6\int n^2 + 4\int n^1 + \int n^0 + 1$$

$$\int(n+1)^4 - \int n^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3$$

h.e. ob $\int(n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$ *per demonstr.*

$$(n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3$$

$$\frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{1}{4}\int n^0 - \frac{1}{4} = \int n^3$$

Sit e. gr. $n = 5$, erit $\frac{1}{4}(n+1)^4 = 324$, $\frac{3}{2}\int n^2 = 82\frac{1}{2}$, $\int n^1 = 15$, $\frac{1}{4}\int n^0 = 1\frac{1}{4}$, adeoque $\int n^3 = 324 - 99 = 225$.

SCHOLION I.

201. *Quod in summationibus, quibus in resolutione problematis usi sumus semper addenda sit unitas, exempla singularia palam loquuntur. Si enim in aequatione* $\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n + \int n^0 + 1$ *fuerit* $n = 4$ *erit:*

$$\int n^0 = 0 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$\int n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$$
$$\int n^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16$$
$$\int(n+1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

Unde cum differentia inter $\int(n+1)^2$ & $\int n^2$ *sit* 25, & $2\int n^1 + \int n^0$ *tantum* 24; *patet, ad conservandam aequalitatem addendam esse unitatem.*

SCHOLION 2.

202. *Eadem methodo, qua numerorum naturalium quadrata & cubos summare docuimus, altiores quoque dignitates summantur. Sed cum potentiae in infinitum assurgant, ideo problema generale pro casibus infinitis inveniendum.*

PROBLEMA 79.

203. *Summare potentias quascunque numerorum naturalium.*

Quoniam $(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \frac{m+1}{1} n^m + \frac{m+1.m}{1.2} n^{m-1} + \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3} n^{m-2} + \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4} n^{m-3}$ &c. in infin. (§. 95); erit

$$\int(n+1)^{m+1} = \int n^{m+1} + \frac{m+1}{1}\int n^m + \frac{m+1.m}{1.2}\int n^{m-1} + \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} + \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3}$$

&c. in infin $+1$

Hinc $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} - \frac{m+1.m}{1.2}\int n^{m-1} - \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} - \frac{m+1.}{1}$

m.m

$$\frac{m.m-1.m-2}{2.\ 3.\ 4}\int n^{m-3} \text{ \&c. in infin.} -1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$$

Sed $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$ (§.200):

Ergo $(n+1)^{m+1} - \frac{m+1.m}{1.\ 2}\int n^{m-1} - \frac{m+1.m.m-1}{1.\ 2.\ 3.}\int n^{m-2} - \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\int n^{m-3}$ &c. in infin. $-1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$

consequenter $\int n^m = \frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1} - \frac{m}{1.2}\int n^{m-1} - \frac{m.m-1}{1.\ 2.\ 3.}\int n^{m-2} - \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}\int n^{m-3}$ &c. in infin. $-\frac{1}{m+1} = \int n^m$

E. gr. sit $m=3$, erit $m+1=4$, $m-1=2$, $m-2=1$, $m-3=0$, adeoque $\frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{1}{4}\int n^0 - \frac{1}{4} = \int n^3$, ut ante (§.200).

SCHOLION.

204. *Theorema generale terminis quidem constat infinitis; in casibus tamen specialibus numerus terminorum finitus evadit, quia reliqui evanescunt, quando numerus ab* m *subtrahendus fit ipsi* m *æqualis: quemadmodum ex allato exemplo speciali apparet. Ita vero summationem potentiarum via vere analytica eruimus, eaque perfacili, ad captum tyronum. Semper tamen utendum est termino ultimo* $\frac{1}{m+1}$: *cujus ratio ante allata* (§.201).

COROLLARIUM.

205. Cum summatio potentiarum superiorum a summatione omnium inferiorum pendeat; si in formulis altioribus pro $\int n^{m-1}$, $\int n^{m-2}$, $\int n^{m-3}$ &c. valores ex inferioribus substituantur, prodibunt formulæ per solum n summas potentiarum determinantes, non præsuppositis summationibus anterioribus: E. gr.

$\int n^0 = n$ (§. 200)

$2\int n^1 = (n+1)^2 - \int n^0 - 1$ (§. 200) $=$
$n^2 + 2n + 1 - n - 1$ (§.81) $= n^2 + n$

$3\int n^2 = (n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1$ (§. 200) $=$
$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n - 1$

$=(2n^3$

$= (2n^3 + 6n^2 + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2):2$
$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$

$4\int n^3 = (n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1$ (§. 203) $= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 2n - n - 1 = n^4 + 2n^3 + n^2$.

$5\int n^4 = (n+1)^5 - 10\int n^3 - 10\int n^2 - 5\int n^1 - \int n^0 - 1 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 \frac{-10n^4 - 20n^3 - 10n^2}{4} \frac{-10n^3 - 15n^2 - 5n}{3} \frac{-5n^2 - 5n}{2} - n - 1 = (6n^5 + 30n^4 + 60n^3 + 60n^2 + 30n + 6 - 15n^4 - 50n^3 - 60n^2 - 31n - 6):6 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{6}$.

Hinc $\int n^0 = n$

$\int n^1 = (n^2 + n):2$

$\int n^2 = (2n^3 + 3n^2 + n):6$

$\int n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2):4$

$\int n^4 = (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n):30$

&c. &c.

DEFINITIO 16.

206. *Numeri Polygoni* sunt summæ progressionum arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in specie *Triangulares*, si differentia terminorum fuerit 1; *Quadrati*, si 2; *Pentagoni*, si 3; *Hexagoni*, si 4; *Heptagoni*, si 5; *Octogoni*, si 6 &c.

Progr. Arithm.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
Num. Triang.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36
Prog. Arithm.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15
Num. Quadr.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64
Progr. Arithm.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22
Num. Pentag.	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.	92
Progr. Arithm.	1.	5.	9.	13.	17.	21	25.	29
Num. Hexag.	1.	6.	15.	28.	45.	66.	91.	120

SCHOLION.

207. *Numeri polygoni nomina sortiuntur a figuris geometricis, in quas puncta unitatibus respondentia disponi possunt.* E. gr. *Tria puncta numeri triangularis 3 unitatibus respondentia disponuntur in triangulum: & idem tenendum est de reliquis numeris triangularibus.*

DEFINITIO 17.

208. *Latus numeri polygoni* est numerus terminorum progressionis arithmeticæ, qui summantur. *Numerus* vero *angulorum* est, qui indicat, quot angulos figura habet, unde numerus polygonus nomen suum sortitur.

COROLLARIUM.

209. Numerus adeo angulorum in triangularibus 3; in tetragonis 4; in pentagonis 5 &c. consequenter differentiam terminorum, qui summantur, excedit duabus unitatibus (§. 206).

PROBLEMA 80.

201. *Dato latere numeri polygoni & numero angulorum; invenire numerum polygonum.*

Sit

Sit latus $= n$
numerus angulorum $= a$
terminus primus progressionis $= 1$ (§. 206).
differentia terminorum $= a - 2$ (§. 209).
terminus ultimus $1 + (a-2)(n-1)$
primus 1 (§. 333 *Arith.*)

Summa primi & ult. $2 + (a-2)(n-1)$
hoc est $4 + na - 2n - a$
dimid. term. num. $\frac{1}{2}n$

Num. polyg. $2n + \frac{1}{2}n^2a - n^2 - \frac{1}{2}an$ (§. 206. 107) $= (n^2a - 2n^2 - an + 4n) : 2 = \frac{n^2(a-2) - n(a-4)}{2}$

Theorema. Numerus polygonus est semidifferentia factorum ex quadrato lateris in numerum angulorum duabus unitatibus mulctatum & ex ipso latere in numerum angulorum quaternario mulctatum.

COROLLARIUM 1.

211. Sit $a = 3$, erit triangularis, $= \frac{1n^2 + 1n}{2}$

Sit $a = 4$, erit quadratus $= \frac{2n^2 - 0n}{2} = n^2$

Sit $a = 5$, erit pentagonus $= \frac{3n^2 - 1n}{2}$

Sit $a = 6$, erit hexagonus $= \frac{4n^2 - 2n}{2} = n^2 - n$

Sit $a = 7$, erit heptagonus $= \frac{5n^2 - 3n}{2}$

Sit $a = 8$, erit octogon. $= \frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n$

&c. &c.

COROLLARIUM 2.

212. Quoniam numerus polygonus $\frac{n^2(a-2) - n(a-4)}{2}$ (§. 210); erit summa seriei cujuscunque numerorum polygonorum $\frac{(a-2)\int n^2 - (a-4)\int n^1}{2}$. Nempe quia $a-2$ & $a-4$ sunt numeri constantes, qui in casu speciali sunt determinati, non summantur. Sed $\int n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ & $\int n^1 = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{3n^2 + 3n}{6}$ (§. 205). Ergo summa polygonorum $\frac{(a-2)(2n^3 + 3n^2 + n) - (a-4)(3n^2 + 3n)}{12} = (2an^3 + 3an^2 + an - 4n^3 - 6n^2 - 2n^2 - 3an^2 - 3an + 12n^2 - 12n) : 12 = (an^3 - an - 2n^3 + 3n^2 + 5n) : 6 = \frac{(a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n}{6}$: unde porro theoremata specialia eliciuntur, determinato numero angulorum a. Nempe summa

triangularium $(n^3 + 3n^2 + 2n) : 6$
pentagonorum $(n^3 + n^2) : 2$
hexagonorum $(4n^3 + 3n^2 - n) : 6$
heptagonorum $(5n^3 + 3n^2 - 2n) : 6$
octogonorum $(2n^3 + n^2 - n) : 2$
&c. &c.

Est enim pro triangularibus $a=3$, pro pentagonis $a=5$, pro hexagonis $a=6$, pro heptagonis $a=7$, pro octogonis $a=8$ &c. (§. 208).

PROBLEMA 81.

213. *Dato numero polygono & numero angulorum invenire latus.*

Sit numerus polygonus $=p$ latus $=x$

numerus angulorum $=a$

erit differentia terminorum $=a-2$ (§. 209)

terminus primus $=1$ (§. 206)

adeoque ultimus $=1+(x-1)(a-2)$ hoc est $3+ax-2x-a$ (§. 333 *Arithm.*)

terminus primus 1

summa pr. & ult. $4+ax-2x-a$

dimid. num. term. $\frac{1}{2}x$

numerus polygonus $2x+\frac{1}{2}ax^2-x^2-\frac{1}{2}ax$ (§. 108).

Quare $\frac{1}{2}ax^2-x^2+2x-\frac{1}{2}ax=p$

$$ax^2-2x^2+4x-ax=2p$$

$$x^2+\frac{4-a}{a-2}x=\frac{2p}{a-2}$$

hoc est, si fiat $(a-4):(a-2)=m$

$$x^2-mx=2p:(a-2)$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$x^2-mx+\tfrac{1}{4}m^2=\tfrac{1}{4}m^2+2p:(a-2)$$

$$x-\tfrac{1}{2}m=\surd(\tfrac{1}{4}m^2+2p:(a-2))$$
$$\tfrac{1}{2}m-x=$$

$$x=\tfrac{1}{2}m+\surd(\tfrac{1}{4}m^2+2p:(a-2))$$

hoc est, substituto valore ipsius m,

$$x=\frac{a-4}{2a-4}+\surd\left(\frac{a^2-8a+16}{4a^2-16a+16}+\frac{4p}{2a-4}\right)$$

$$=\frac{a-4+\surd(8ap-16p+a^2-8a+16)}{2a-4}$$

$$=\frac{a-4+\surd(8(a-2)p+(a-4)^2)}{2a-4}$$

obtinet nimirum signum $+$, quia radix major est quam $a-4$.

Sit e. gr. $a=3$, erit latus numeri triangularis $\frac{-1+\surd(8p+1)}{2}$

Sit $a=5$, erit latus pentagoni $\frac{1+\surd(24p+1)}{6}$

Sit $a=6$, erit latus hexagoni $\frac{2+\surd(32p+4)}{8}$

Sit $a=7$, erit latus heptagoni $\frac{3+\surd(40p+9)}{10}$

&c. &c.

DE-

DEFINITIO 18.

214. Summæ numerorum polygonorum eodem modo collectæ, quo ex progressionibus arithmeticis ipsi polygoni eliciuntur, dicuntur *Pyramidales primi*: Summæ pyramidalium primorum *Pyramidales secundi*: summæ pyramidalium secundorum *Pyramidales tertii* &c. in infinitum. Speciatim *Pyramidales triangulares primi* vocantur, si ex triangularibus ortum ducant; *Pyramidales pentagoni primi*, si ex pentagonis oriuntur &c.

E. gr. Num. triang. =	1. 3. 6. 10. 15. 21
Pyram. triang. pr. =	1. 4. 10. 20. 35. 56
secundi =	1. 5. 15. 35. 70. 126
tertii =	1. 6. 21. 56. 126. 252
&c.	&c.

COROLLARIUM.

215. Cum igitur summare docuerimus numeros polygonos (§. 212), evidens jam est, quomodo numeri pyramidales primi inveniantur. Nempe $\frac{(a-2)n^3+3n^2-(a-5)n}{6}$ exprimit omnes numeros pyramidales primos vi §. *cit.*

PROBLEMA 82.

216. *Invenire summam numerorum pyramidalium superioris ordinis cujuscunque, seu dato quolibet inferiore proxime superiorem.*

Non alia re opus est, quam ut juxta methodum superius traditam (§. 200) numeri pyramidales proxime inferioris ordinis summentur: ita enim habentur eorum summæ. Quare cum numerus pyramidalis primi ordinis sit $\frac{(a-2)n^3+3n^2-(a-5)n}{6}$ (§. 215); erit summa pyramidalium primi ordinis $\frac{(a-2)\int n^3+3\int n^2-(a-5)\int n^1}{6}$

Sed $\int n^3=(n^4+2n^3+n^2):4$, $\int n^2=(2n^3+3n^2+n):6$, $\int n^1=(n^2+n):2$, (§. 205). Ergo summa pyramidalium primi ordinis, seu numerus pyramidalis secundi ordinis $=\frac{(a-2)(n^4+2n^3+n^2)+2(2n^3+3n^2+n)-(a-5)(2n^2+2n)}{24}=$ $(an^4+2an^3-an^2-2an-2n^4+14n^2+12n):24=\frac{(a-2)n^4+2an^3-(a+14)n^2-(2a+12)n}{24}$.

Sit e. gr. $a=3$, hoc est, quæratur summa pyramidalium triangularium primi ordinis; erit ea $\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}$. Quoniam vero summa inventa generalis exprimit

primit numerum quemcunque pyramidalem secundi ordinis (§. 214), si ea porro eundem in modum summetur, prodibit summa pyramidalium secundi ordinis seu numerus pyramidalis ordinis tertii (§. *cit.*). Et ita progredi licet, quousque libet

COROLLARIUM 1.

217. Cum summa unitatum sit n, summa laterum $\frac{n^2+n}{2} = \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}$ (§. 205), summa triangularium $\frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$ (§. 215), summa pyramidalium primi ordinis $\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24} = \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}$ (§. 216). &c. evidens est lex, qua numeri pyramidales ex triangularibus orti in infinitum summentur. Nimirum numerus fractionum in se invicem ducendarum excedit numerum ordinis tribus unitatibus, fractionum earundem numeratores progrediuntur in serie naturali numerorum, sed terminus primus progressionis est latus numeri figurati, denominatores sunt numerorum naturalium progressio ab unitate incipiens. Nempe dato latere n, erit numerus pyramidalis triangularis indeterminatus $\frac{n+0}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}.\frac{n+4}{5}.\frac{n+5}{6}$ &c. in infinit.

COROLLARIUM 2.

218. Hinc apparet, quales numeri sint unciæ potentiarum (§. 95).

PROBLEMA 83.

219. *Dato numero quantitatum, una cum numero indicante, quot earum invicem combinari debeant, invenire numerum combinationum.*

Quantitas una nullam; duæ a & b nonnisi unam combinationem ab admittunt. Trium combinationes sunt tres, nempe ab, ac, bc; quatuor vero sex ab, ac, bc, ad, bd, cd; quinque decem $ab, ac, bc, ad, bd, cd, ae, be, ce, de,$ & ita porro. Unde apparet, numeros combinationum progredi ut 1. 3. 6. 10 &c. hoc est, esse numeros triangulares (§. 206), quorum latus differt unitate a numero quantitatum datarum. Si nempe hic foret q, erit latus numeri combinationum $q-1$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-1}{1}.\frac{q+0}{2}$. (§. 217).

Si quantitates tres invicem combinandæ & numero itidem tres fuerint, erit combinatio tantum unica

unica *abc*. Si quarta accedat, combinationes reperies quatuor *abc*, *abd*, *bcd*, *acd*; si quinta, decem *abc*, *abd*, *bcd*, *acd*, *abe*, *bde*, *bce*, *ace*, *ade*; si sexta, viginti & ita porro. Numeri ergo combinationum progrediuntur, ut 1. 4. 10. 20 &c. hoc est, sunt numeri pyramidales triangulares primi (§. 214), quorum latus a numero quantitatum datarum differt duabus unitatibus, seu exponente unitate mulctato. Hinc si numerus quantitatum datarum fuerit q, erit latus $q-2$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-2}{1} \cdot \frac{q-1}{2} \cdot \frac{q+0}{3}$, (§. 271).

Si quantitates quatuor invicem combinandæ, numeros combinationum progredi deprehendimus ut numeros pyramidales triangulares secundi ordinis 1. 5. 15. 35 &c. (§. 214), quorum latus a numero quantitatum differt tribus quantitatibus seu exponente unitate mulctato. Quare si numerus quantitatum fuerit q, erit latus $q-3$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-3}{1} \cdot \frac{q-2}{2} \cdot \frac{q-1}{3} \cdot \frac{q+0}{4}$ (§. 217).

Hinc facile abstrahitur regula generalis determinandi numerum combinationum in casu quocunque. Sit nempe numerus quantitatum combinandarum q, exponens combinationis n, erit numerus combinationum $\frac{q-n+1}{1} \cdot \frac{q-n+2}{2} \cdot \frac{q-n+3}{3} \cdot \frac{q-n+4}{4} \cdot \frac{q-n+5}{5}$ &c. donec numerus addendus sit ipsi n æqualis.

E. gr. Sit numerus quantitatum combinandarum $= 6$, exponens combinationis 4; erit numerus combinationum $\frac{6-4+1}{1} \cdot \frac{6-4+2}{2} \cdot \frac{6-4+3}{3} \cdot \frac{6-4+4}{4} = \frac{6-3}{1} \cdot \frac{6-2}{2} \cdot \frac{6-1}{3} \cdot \frac{6+0}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{4} = 15$.

COROLLARIUM.

220. Quodsi quantitatum datarum omnes combinationes possibiles scire desideres, incipiendo nempe a combinationibus singularum binarum; addi oportet $\frac{q-1}{1} \cdot \frac{q+0}{2}$, $\frac{q-2}{1} \cdot \frac{q-1}{2} \cdot \frac{q+0}{3}$, $\frac{q-3}{1} \cdot \frac{q-2}{2} \cdot \frac{q-1}{3} \cdot \frac{q+0}{4}$ &c. Undenumerus omnium combinationum possi-

bilium erit $\frac{q.q-1}{1.2} + \frac{q.q-1.q-2}{1.2.3} + \frac{q.q-1.q-2.q-3}{1.2.3.4} + \frac{q.q-1.q-2.}{1.2.3}$ $\frac{q-3.q-4}{4.5}$ &c. Quæ est summa unciarum binomii ad dignitatem q evecti mulctata exponente dignitatis unitate aucto $q+1$ (§. 95). Quare cum hæ unicæ prodeant $1+1$ ad dignitatem q evehendo *per probl. 29.* (§. *cit.*), sit vero $1+1=2$; erit 2^q-q-1 numerus omnium combinationum possibilium. E. gr. Si numerus quantitatum 5, erit numerus combinationum possibilium $2^5-6=32-6=26$.

SCHOLION.

221. *Uncias prodire debere pro binomio*, $1+1$ *ad eam dignitatem elevando, ad quam elevatur binomium* a + b: *patet exinde, quod uncia partium* a & b *sit* 1, *atque adeo ut facta litteralia ex* a & b, *ita uncia ex* 1 & 1 *in se invicem ductis prodire debeant. Vide calculum*:

$$\begin{array}{rl} 1+1 & \textit{Unc. Rad.} \\ 1+1 & \\ \hline +1+1 & \\ 1+1 \quad & \\ \hline 1+2+1 & \textit{Unc. Quadr.} \\ 1+1 & \textit{Unc. Rad.} \\ \hline +1+2+1 & \\ 1+2+1 \quad & \\ \hline 1+3+3+1 & \textit{Unc. Cubi.} \end{array}$$

&c. &c.

PROBLEMA 84.

222. *Dato numero quantitatum, invenire numerum omnium variationum, quas quantitates omnibus modis possibilibus combinatæ ac permutatæ subire possunt.*

Sint quantitates duæ *a* & *b*, erunt variationes permutationum 2 (§. 129), consequenter cum earum quælibet etiam cum seipsa combinari possit, istis addendæ adhuc sunt variationes 2. Ergo numerus omnium est, $2+2=4$. Quodsi tres fuerit & exponens variationis 2, combinationes erunt 3 & permutationes 3, nempe *ab*, *ac*, *bc*, & *ba*, *ca*, *cb* (§. 129): quibus si addas conbinationes tres uniuscujusque quantitatis cum seipsa *aa*, *bb*, *cc*; habebis numerum variationum $3+3+3=9$.

Eodem modo patet, si quantitates fuerint quatuor & exponens 2, numerum combinationum fore 6, & numerum permutationum itidem 6, numerum com-

combinationum cum seipsa 4, adeoque numerum variationum 16; si manente exponente quantitates fuerint quatuor, numerum variationum fore 25 &c. & in genere si numerus quantitatum fuerit n, numerum variationum fore n^2.

Sint quantitates tres & exponens variationis 3; reperitur numerus variationum $27 = 3^3$, nempe *aaa*, *aab*, *aba*, *baa*, *abb*, *aac*, *aca*, *caa*, *abc*, *bac*, *bca*, *acb*, *cab*, *cba*, *acc*, *cac*, *cca*, *bba*, *bab*, *bbb*, *bbc*, *cbb*, *bcb*, *bcc*, *cbc*, *ccb*, *ccc*.

Nec absimili modo constabit, si quantitates fuerint quatuor & exponens 3, fore numerum variationum $64 = 4^3$: & in genere, si fuerit quantitatum numerus $= n$, exponens 3, fore numerum variationum n^3.

Quodsi ita progredi libuerit, reperietur tandem, si quantitatum numerus fuerit n, & exponens n, fore numerum variationum n^n.

Quare si antecedentes omnes addas, ubi exponens minor; reperietur numerus omnium variationum possibilium $n^n + n^{n-1} + n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + n^{n-5} + n^{n-6}$ &c. donec numerus ex n subtractus relinquat 1, quia initium fit a quantitatibus singulis semel positis.

Cum adeo numerus omnium variationum possibilium sit progressio geometrica, cujus terminus primus seu minimus n^1, maximus n^n, denominator n (§. 332 *Arithm.* & 314 *Analys.*); erit is $= (n^{n+1} - n) : (n-1)$, (§. 122).

Sit e. gr. $n = 4$. erit numerus variationum possibilium $(4^5 - 4) : (4-1) = 1020 : 3 = 340$. Sit $n = 24$, erit numerus omnium variationum possibilium $(24^{25} - 24) : (24-1) = 3200965864440681898677795554825060 0 : 23 = 139172428888725299942512849340 2200$. Tot ergo modis 24 literæ inter se componi possunt.

CA-

CAPUT II.

DE ALGEBRA AD PROBLEMATA ARITHMETICA INDETERMINATA APPLICATA.

PROBLEMA 85.

223. *Invenire duos numeros, quorum summa una cum facto eorundem æquatur numero dato.*

Sit numerus datus $= a$, quæsitorum unus $= x$, alter $= y$: erit per conditionem problematis

$$xy + x + y = a$$

$$xy + x = a - y$$

$$\qquad - y + 1$$

$$x = (a - y) : (y + 1)$$

Sit $a = 30$, $y = 2$: erit $x = (30 - 2) : (2 + 1) = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Sit $a = 20$, $y = 2$: erit $x = (20 - 2) : (2 + 1) = 18 : 3 = 6$. Sit $a = 19$, $y = 4$: erit $x = (19 - 4) : (4 + 1) = 15 : 5 = 3$.

Aliter.

Sit numerus datus $= a$, quæsitorum unus $= x + y$, alter $= x - y$ (§. 6), erit per conditionem problematis

$$x^2 - y^2 + 2x = a$$

$$x^2 + 2x = y^2 + a$$

$$\quad 1 \qquad\quad 1 \quad (\text{§.} 143)$$

$$x^2 + 2x + 1 = y^2 + a + 1$$

$$x + 1 = V(y^2 + a + 1)$$

$$x = V(y^2 + a + 1) - 1$$

Unde apparet, ut ex $y^2 + a + 1$ radix extrahi possit, $a + 1$ esse debere differentiam duorum quadratorum, quorum unum est y^2.

E. gr. Sit $a = 19$, $y = \frac{1}{2}$; erit $x = V(\frac{1}{4} + 19 + 1) - 1 = V\frac{81}{4} - 1 = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. Ergo $x + y = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$ & $x - y = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = V(4 + 20 + 1) - 1 = V25 - 1 = 5 - 1 = 4$. Ergo $x + y = 4 + 2 = 6$ & $x - y = 4 - 2 = 2$.

PROBLEMA 86.

224. *Invenire quatuor numeros ejus conditionis, ut summa primi & secundi æquetur tertio, differentia vero primi & secundi quarto.*

Sit numerus primus $= x$, secundus $= y$; tertius $= z$, quartus $= t$, erit per conditiones problematis

$y + x$

$$y + x = z \qquad x - y = t$$

$$x = z - y \qquad x = t + y$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$t + y = z - y$$

$$t + 2y = z$$

$$2y = z - t$$

$$y = (z - t) : 2$$

Ergo $x = (z - t) : 2 + t = (z + t) : 2$.

Unde apparet, si numeri integri desiderentur, pro z & t assumi debere vel numeros pares, vel impares: nequaquam alterum parem, alterum imparem (§. 72. 74).

Sit $z = 8$, $t = 2$: erit $y = (8 - 2) : 2 = 6 : 2 = 3$ & $x = (8 + 2) : 2 = 4 + 1 = 5$. Similiter sit $z = 5$, $t = 1$: erit $x = (5 + 1) : 2 = 3$ & $y = (5 - 1) : 2 = 2$.

PROBLEMA 87.

225. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unusquisque cum partibus suis aliquotis efficiat unam summam.*

Sit unus $= mx$, alter $= ny$; erit per conditionem problematis

$$1 + m + mx + x = 1 + n + ny + y$$

$$mx + x = 1 + n + (n + 1)y - (1 + m)$$

$$x = (1 + n + (n + 1)y - 1 - m) : (m + 1)$$

Apparet ergo, $1 + n$ denotare summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius y, & $1 + m$ summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius x: posse autem non modo y, sed & utrumque denominatorem pro arbitrio assumi, sed ut y sit numerus impar, isque primus.

Sit e. gr. $m = 1$, $n = 2$, $y = 3$. Erunt partes aliquotae ipsius n 1 & 2, ipsius m autem 1: consequenter $x = 2 + 1 + (2 + 1)y - 1 = 2 + 3y = 2 + 9 = 11$. Sit $m = 4$, $n = 8$, $y = 13$: erit $1 + n = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$ & $1 + m = 1 + 2 + 4 = 7$, consequenter $x = (15 + 15y - 7) : 7 = (210 - 7) : 7 = 203 : 7 = 29$.

PROBLEMA 88.

226. *Invenire duos numeros, quorum summa aequatur quadrato minoris.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$: erit per conditionem problematis.

$$x + y = y^2$$

$$x = y^2 - y = (y - 1)y$$

Unde apparet, numerum majorem esse factum ex minore in eundem minorem unitate mulctatum.

Sit $y=3$; erit $x=2.3=6$. Sit $y=5$; erit $x=4.5=20$. Sit $y=9$; erit $x=8.9=72$.

PROBLEMA 89.

227. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut summa quadratorum æquetur cubo minoris.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$: erit per conditionem problematis

$$x^2+y^2=y^3$$

$$x^2=y^3-y^2=y^2(y-1)$$

$$x=y\sqrt{(y-1)}$$

Apparet adeo, pro y aſſumendum eſſe numerum, qui unitate quadratum excedit, hoc eſt, quadratum quodlibet unitate auctum.

E. gr. Sit $y=5$, erit $x=5\sqrt{(5-1)}=5\sqrt{4}=5.2=10$. Sit $y=17$, erit $x=17\sqrt{(17-1)}=17\sqrt{16}=17.4=68$.

PROBLEMA 90.

228. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum æquale ſit cubo, cujus radix facto ex numero primo in quadratum ſecundi æquatur.*

Sit numerus primus $=x$, ſecundus $=y$, radix cubica $=v$, erit per conditiones problematis

$$v=xy^2 \qquad xy=v^3$$

$$v:y^2=x \qquad x=v^3:y$$

$$v:y^2=v^3:y \quad \cdot y^2$$

$$v=yv^3 \quad :v$$

$$1=yv^2$$

$$1:v^2=y$$

$$\text{Ergo } x=v^3:\tfrac{1}{v^2}=v^5$$

Sit $v=2$, erit $x=32$, $y=\frac{1}{4}$. Sit $v=3$, erit $x=243$, $y=\frac{1}{9}$.

PROBLEMA 91.

229. *Invenire duos numeros, quorum quadrata differunt quadrato.*

Sit numerus unus $=x+y$, alter $=x-y$: erit per conditionem problematis.

$$x^2+2xy+y^2$$
$$x^2-2xy+y^2 \quad \text{ſubt.}$$

$$4xy=v^2 \quad :4y$$

$$x=v^2:4y$$

Patet adeo, pro y aſſumendum eſſe numerum, per cujus quadruplum dividi poteſt quadratum aliquod.

Sit

Sit e. gr. $v^2 = 16$, $y = 1$: erit $x = 16:4 = 4$. Ergo $x + y = 4 + 1 = 5$ & $x - y = 4 - 1 = 3$. Sit $v^2 = 36, y = 3$: erit $x = 36:12 = 3$. Ergo $x + y = 6$ & $x - y = 0$. Sit $v^2 = 36$, $y = 9$: erit $x = 36:36 = 1$. Ergo $x + y = 10$ & $x - y = 8$.

PROBLEMA 92.

230. *Summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere.*

Sit latus quadrati majoris $= a$, minoris $= b$. Sit porro latus quadrati unius ex quæsitis minus quam a, adeoque $a - z$; erit quadrati alterius latus majus quam b. Poterat itaque dici $y - b$. Enimvero ut in calculo irrationalitas evitetur, rectius id nuncupatur $yz - b$. Quare per conditionem problematis

$$a^2 - 2az + z^2 + y^2z^2 - 2byz + b^2 = a^2 + b^2$$

$$z^2 + y^2z^2 - 2az - 2byz = 0$$

$$z + y^2z - 2a - 2by = 0$$

$$y^2z + z = 2a + 2by$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; y^2 + 1$$

$$z = (2a + 2by):(y^2 + 1)$$

Sit e. gr. $a = 3$, $b = 2$, $y = 2$: erit $z = (6 + 8):(4 + 1) = 14:5 = 2\frac{4}{5}$. Ergo $a - z = 3 - 2\frac{4}{5} = \frac{15}{5} - \frac{14}{5} = \frac{1}{5}$ & $yz - b = 2\frac{4}{8} - 2 = \frac{28}{5} - \frac{10}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$.

SCHOLION.

231. *Dum quadratorum quæsitorum latera assumuntur, valores eorum quantitates* a & b *ingredi debent, ut in utroque æquationis membro sit* $a^2 + b^2$. *Porro vero in valore lateris alterius* y *multiplicari debet per* z, *ut sublato utrinque* $a^2 + b^2$ *residuum sit divisibile per* z. *Ita enim* z *reducitur ad unam dimensionem, sicque æquatio in terminis rationalibus est reducibilis.*

PROBLEMA 93.

232. *Invenire duos quadratos numeros, qui differunt numero dato.*

Sit latus quadrati minoris $= x$, majoris $= y + x$, differentia quadratorum $= d$: erit quadratum majus $= x^2 + 2xy + y^2$, minus $= x^2$, consequenter per conditionem problematis

$$2xy + y^2 = d$$

$$2xy = d - y^2$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; 2y$$

$$x = (d - y^2):2y$$

Unde apparet, pro y assumi debere numerum, qui sit minor quam $\sqrt{d}$.

Sit e. gr. $d = 10, y = 3$: erit $x = (10 - 9):6 = \frac{1}{6}$ & $x + y = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$. Sit $d = 11$, $y = 1$: erit $x = (11 - 1):2 = 10:2 = 5$ & $x + y = 5 + 1 = 6$. Sit $d = 48$, $y = 4$: erit $x = (48 - 16):8 = 6 - 2 = 4$ & $x + y = 4 + 4 = 8$.

PROBLEMA 94.

233. *Numerum datum dividere, in duos alios, quorum factum est numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= 2a$, differentia $= 2y$: erit major $a + y$, minor $a - y$ (§. 5), factum $= aa - yy$. Ut calculus ab irrationalitate liberetur, pro latere quadrati assumendus est valor, quem ingreditur y & qui diversis gaudet signis. Sit ergo $= xy - a$: erit per conditionem problematis

$$aa - y^2 = a^2 - 2axy + x^2y^2$$

$$-y^2 = -2axy + x^2y^2 \quad \overline{} y$$

$$-y = 2ax + x^2y$$

$$2ax = x^2y + y \quad \overline{} x^2 + 1$$

$$2ax : (x^2 + 1) = y$$

Sit e. gr. $2a = 10$, $x = 2$: erit $y = 20 : (4 + 1) = 20 : 5 = 4$. Ergo $a + y = 5 + 4 = 9$; $a - y = 5 - 4 = 1$. Sit $2a = 10$, $x = 3$: erit $y = 30 : (9 + 1) = 30 : 10 = 3$.

PROBLEMA 95.

234. *Datum numerum dividere in duos numeros, quorum differentia est numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= a$, quaesitorum major $= x$, minor $= y$: erit per conditiones problematis.

$$\frac{x + y = a}{x = a - y} \qquad \frac{x - y = v^2}{x = v^2 + y}$$

$$a - y = v^2 + y$$

$$a = v^2 + 2y$$

$$a - v^2 = 2y$$

$$(a - v^2) : 2 = y$$

Pro v^2 itaque assumendus est numerus quadratus, qui ex numero dato a subductus parem relinquit.

Sit e. gr. $a = 40$, $v^2 = 16$: erit $y = (40 - 16) : 2 = 24 : 2 = 12$. Ergo $x = 40 - 12 = 28$. Sit $a = 40$, $v^2 = 4$: erit $y = (40 - 4) : 2 = 36 : 2 = 18$. Ergo $x = 40 - 18 = 22$. Sit $a = 35$, $v^2 = 9$: erit $y = (35 - 9) : 2 = 26 : 2 = 13$ & $x = 35 - 13 = 22$.

PROBLEMA 96.

235. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unus additus quadrato alterius efficiat numerum quadratum, cujus radix aequatur summae numerorum.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$: erit per conditionem problematis

$x^2 +$

$$x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2$$

$$y = 2xy + y^2 \quad y$$

$$1 = 2x + y$$

$$1 - y = 2x$$

$$(1-y) : 2 = x$$

Numeri adeo quæsiti unitate minores, consequenter fracti esse debent, & y numerus quilibet fractus esse potest.

Sit $y = \frac{1}{2}$; erit $x = (1 - \frac{1}{2}) : 2 = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$. Sit $y = \frac{1}{3}$; erit $x = (1 - \frac{1}{3}) : 2 = \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$. Sit $y = \frac{1}{4}$; erit $x = (1 - \frac{1}{4}) : 2 = \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.

PROBLEMA 97.

236. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut differentia ipsorum habeat ad differentiam quadratorum rationem datam.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$, ratio data $= a : b$; erit per conditionem problematis

$$x - y : x^2 - y^2 = a : b$$

h. e. $1 : x + y = a : b$ (§. 124)

$$ax + ay = b \quad a$$

$$x + y = b : a$$

$$x = b : a - y$$

Sit $b : a = 9$, $y = 4$; erit $x = 5$. Vel sit $y = 3$; erit $x = 6$.

PROBLEMA 98.

237. *Invenire numerum, qui, si multiplicetur per duos numeros datos, quadrata duo producat.*

Sit numerus datus unus $= a$, alter $= b$, quæsitus $= x$, erit per conditiones problematis.

$$ax = y^2 \quad a \qquad bx = v^2 \quad b$$

$$x = y^2 : a \qquad x = v^2 : b$$

$$y^2 : a = v^2 : b \quad a$$

$$y^2 = av^2 : b$$

$$y = v \sqrt{(a : b)}$$

Quodsi ergo numerus rationalis desideretur, $a : b$ quadratum esse debet.

Sit $a = 32$, $b = 8$; erit $\sqrt{(a : b)} = 2$. Sit porro $v = 5$, erit $y = 10$, consequenter $x = \frac{25}{8}$.

PROBLEMA 99.

238. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus quadrato alterius addatur, summa sit latus quadrati aggregato numerorum æquale.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$; erit

 $x^2 +$

$$x^2 + y = V(x+y)$$

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = x + y$$

$$2x^2y - y + y^2 = x - x^4$$

h. e. $yy + (2x^2 - 1)y = x - x^4$
$(x^2 - \frac{1}{2})^2 \quad x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$

$$y^2 + (2x^2 - 1)y + (x^2 - \tfrac{1}{2})^2 = x - x^2 + \tfrac{1}{4}$$

$$y + x^2 - \tfrac{1}{2} = V(x + \tfrac{1}{4} - x^2)$$

$$y = V(x + \tfrac{1}{4} - x^2) + \tfrac{1}{2} - x^2$$

Quodsi numerus rationalis desideratur; $\frac{1}{4} + x - x^2$ numerus quadratus esse debet. Sit itaque hujus latus ob rationes in schol. probl. 92 (§. 231) allatas $= zx - \frac{1}{2}$; erit

$$z^2x^2 - zx + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + x - x^2$$

$$z^2x^2 - zx = x - x^2$$

$$\underline{\qquad\qquad} - x$$

$$z^2x - z = 1 - x$$

$$z^2x + x = 1 + z$$

$$\underline{\qquad\qquad} x^2 + 1$$

$$x = (1+z):(z^2+1)$$

Sit $z = 2$, erit $x = (1+2):(4+1) = \frac{3}{5}$, consequenter $y = \frac{1}{2} - \frac{9}{25} + V(\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{8}{25}) = \frac{25 - 18}{50} + V\frac{60 + 25 - 36}{100}$ $= \frac{7}{50} + V(49:100) = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \frac{7 + 35}{50}$ $= \frac{42}{50} = \frac{21}{25}$.

PROBLEMA 100.

239. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut, si unus addatur facto eorundem, aggregatum utrumque sit numerus quadratus.*

Sit numerus quadratus unus $= x^2$, alter $= y^2$, erit factum $= x^2y^2$. Quare $x^2y^2 + x^2$ & $x^2y^2 + y^2$ sunt numeri quadrati; consequenter & $y^2 + 1$ & $x^2 + 1$ sunt numeri quadrati: numerus enim quadratus efficit quadratum, si in quadratum ducitur. Sit latus quadrati primi $z - y$; secundi $t - x$: erit

$$y^2 + 1 = z^2 - 2zy + y^2 \qquad x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2$$

$$1 = z^2 - 2zy \qquad 1 = t^2 - 2tx$$

$$2zy = z^2 - 1 \qquad 2tx = t^2 - 1$$

$$y = (z^2 - 1):2z \qquad x = (t^2 - 1):2t$$

Sit $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (4-1):4 = \frac{3}{4}$ & $x = (9-1):6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Sit $z = 3$, $t = 4$; erit $y = (9-1):6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ & $x = (16-1):8 = \frac{15}{8}$.

PROBLEMA 101.

240. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut summa addita facto efficiat quadratum.*

Sit quadratus numerus unus $= x^2$, alter $= y^2$: erit $x^2y^2 + x^2 + y^2$ numerus quadratus. Quoniam vero

vero $x^2 y^2 + x^2 = x^2 (y^2 + 1)$: fiat primum $y^2 + 1$ æquale quadrato, cujus latus $t - y$, ut ablato ex utroque æquationis membro y^2 perveniatur ad unam ipsius y dimensionem, cum valor rationalis desideretur, nempe

$$t^2 - 2ty + y^2 = y^2 + 1$$

$$t^2 - 2ty = 1$$

$$t^2 - 1 = 2ty$$

$$(t^2 - 1) : 2t = y$$

Ponatur porro $\sqrt{(y^2 + 1)} = t - y = t - (t^2 + 1) : 2t = (t^2 + 1) : 2t = v$; erit $x^2 y^2 + x^2 + y^2 = v^2 x^2 + y^2$. Atque adeo problema præsens reductum est ad casum similem præcedentis. Sit ergo quadrati, cui $v^2 x^2 + y^2$ æquale esse debet, latus $= z - vx$, erit

$$v^2 x^2 + y^2 = z^2 - 2zvx + v^2 x^2$$

$$y^2 = z^2 - 2zvx$$

$$2zvx = z^2 - y^2 \quad | \; 2zv$$

$$x = (z^2 - y^2) : 2zv$$

Hic valores z & t pro lubitu determinari possunt.

Sit e. gr. $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (9 - 1) : 6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$ & hinc $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{9 - 4}{3} = \frac{5}{3}$, consequenter $x = (4 - \frac{16}{9}) : \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{(36 - 16)}{9} : \frac{20}{3} = \frac{20}{9} : \frac{20}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

PROBLEMA 102.

241. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si factum addatur aggregato quadratorum, numerus quadratus prodeat.*

Sit summa numerorum quæsitorum $= 2x$, differentia $= 2y$, erit major $x + y$, minor $x - y$ (§. 5). Sit latus quadrati ipsi $3x^2 + y^2$ æqualis $= t + y$: erit per conditionem problematis

$$\begin{array}{l} x^2 + 2xy + y^2 \\ x^2 - 2xy + y^2 \\ x^2 \qquad\quad - y^2 \\ \hline 3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + y^2 \end{array}$$

$$3x^2 = t^2 + 2ty$$

$$3x^2 - t^2 = 2ty$$

$$(3x^2 - t^2) : 2t = y$$

Sit $x = 4$, $t = 6$, erit $y = (48 - 36) : 12 = 12 : 12 = 1$, consequenter $x + y = 4 + 1 = 5$, $x - y = 4 - 1 = 3$.

PROBLEMA 103.

242. *Invenire duos numeros quadratos, quorum summa est numerus quadratus.*

Sint numeri quadrati quæsiti x^2 & y^2

& y^2; latus quadrati, cui isti junctim sumti æquantur $vx - y$: erit

$$x^2 + y^2 = v^2x^2 - 2vxy + y^2$$

$$x^2 = v^2x^2 - 2vxy$$

$$x = v^2x - 2vy$$

$$2vy = v^2x - x$$

$$2vy : (v^2 - 1) = x$$

Sit $v = 2$, $y = 3$; erit $x = 12 : (4 - 1) = 12 : 3 = 4$.

PROBLEMA 104.

243. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus ducatur in cubum alterius, productum sit numerus quadratus.*

Sint duo numeri x & y: erit per conditionem problematis xy^3, consequenter etiam xy numerus quadratus. Habemus ergo

$$xy = z^2$$

$$x = z^2 : y$$

Pro z itaque assumendum est quadratum per y divisibile, si numeri integri desiderentur.

Sit e. gr. $z = 6$, $y = 3$: erit $x = 36 : 3 = 12$.

PROBLEMA 105.

244. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si factum quadratorum addatur facto ex cubo unius in alterum, summa sit numerus quadratus.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$, erit $xy^3 + x^2y^2$, consequenter & $xy + x^2$ numerus quadratus. Ponatur latus hujus quadrati $= yv - x$: erit

$$xy + x^2 = y^2v^2 - 2xyv + x^2$$

$$xy = y^2v^2 - 2xyv$$

$$x = yv^2 - 2xv$$

$$2xv + x = yv^2$$

$$x = yv^2 : (2v + 1)$$

Sit e. gr. $y = 6$, $v = 1$: erit $x = 6 : 3 = 2$. Sit $y = 15$, $v = 2$: erit $x = 15 \cdot 4 : (4 + 1) = 15 \cdot 4 : 5 = 3 \cdot 4 = 12$.

PROBLEMA 106.

245. *Invenire duos numeros, quorum unus subductus ex facto eorundem relinquat cubum.*

Sit numerus unus x, alter y: erit per conditionem problematis

$$xy - y = v^3$$

$$y = v^3 : (x - 1)$$

Assumendus ergo est cubus, qui sit per $x - 1$ divisibilis.

E. gr. Sit $x = 6$, $v = 10$; erit $y = 1000 : 5 = 200$. Sit $x = 3$, $v = 6$; erit $y = 216 : 2 = 108$.

PRO-

PROBLEMA 107.

246. *Invenire duos numeros, quorum unus in quadratum alterius ductus cubum efficit.*

Sit numerus unus y, alter x; erit per conditionem problematis

$$yx^2 = z^3 x^3 : v^3$$
$$\overline{}\; x^2$$
$$y = z^3 x : v^3$$
$$yv^3 = z^3 x$$
$$\overline{}\; z^3$$
$$yv^3 : z^3 = x$$

Si adeo numeri integri desiderantur, assumendus est valor ipsius y per cubum aliquem z^3 divisibilis, seu cubi multiplus.

Sit e. gr. $y = 16$, $v = 3$, $z = 2$; erit $x = 16 . 27 : 8 = 2 . 27 = 54$.

PROBLEMA 108.

247. *Numerum datum in duas partes dividere, ita ut earundem factum æquale sit cubo radice sua mulctato.*

Sit numerus datus $= a$, pars una $= x$; erit altera $= a - x$. Sit latus cubi, cui factum partium $ax - x^2$ æquatur, $yx - 1$: erit cubus $= y^3 x^3 - 3y^2 x^2 + 3yx - 1$, unde si subtrahatur $yx - 1$, relinquitur

$$y^3x^3 - 3y^2x^2 + 2yx = ax - x^2$$
$$\overline{}\; x$$
$$y^3x^2 - 3y^2x + 2y = a - x$$
$$y^3x^2 - 3y^2x + x = a - 2y$$

Facile jam apparet, si valor ipsius x rationalis desideretur, fieri debere $2y = a$: quo facto erit

$$\frac{a^3x^2}{8} - \frac{3a^2x}{4} + x = 0$$
$$\overline{}\; 8$$
$$a^3x^2 - 6a^2x + 8x = 0$$
$$\overline{}\; x$$
$$a^3x - 6a^2 + 8 = 0$$
$$a^3x = 6a^2 - 8$$
$$\overline{}\; a^3$$
$$x = (6a^2 - 8) : a^3$$

Apparet adeo, si numeri rationales desiderentur, problema ex indeterminato fieri determinatum.

Sit $a = 6$, erit $x = (216 - 8) : 216 = 208 : 216 = \frac{26}{27}$ & $a - x = 6 - \frac{26}{27} = \frac{162 - 26}{27} = \frac{136}{27}$.

PROBLEMA 109.

248. *Invenire numerum perfectum, hoc est, omnibus suis partibus aliquotis æqualem.*

Sit numerus quæsitus $y^n x$, ut nempe in partes aliquotas seu fa-

ctores resolvi possit: erunt partes ejus aliquotæ $1+y+y^2+y^3$ &c. donec exponens evadat $=n$, & $x+yx+y^2x+y^3x$ &c. donec exponens fiat $=n-1$. Quamobrem ex natura numeri perfecti

$$1+y+y^2+y^3\ \&c.\ +x+yx+y^2x+y^3x\ \&c. = y^n x$$

$$1+y+y^2+y^3\ \&c. = y^n x-x-yx-y^2x-y^3x\ \&c.$$

$$\frac{1+y+y^2+y^3\ \&c.}{y^n-1-y-y^2-y^3\ \&c.} = x$$

Jam ut x sit numerus integer, nec in casu speciali, si y per numerum explicetur, numerus partium aliquotarum diversus sit a numero earundem in formula generali; necesse est ut $y^n-1-y-y^2-y^3$ &c. $=1$: quod cum non alio in casu contingat, nisi cum $y=2$ (§. 121), erit $x=1+2+2^2+2^3$ &c. $=1+2+4+8$ &c. & numerus perfectus $2^n x$. Quoniam vero x est numerus primus, necesse est ut $1+2+2^2+2^3$ &c. in omni casu sit numerus primus, consequenter series terminetur prope terminum, qui unitate mulctatus est numerus primus (§. *cit.*) & n notat numerum terminorum, qui istiusmodi terminum præcedunt. Quare problema, quod speciem indeterminati mentiebatur, determinatum est.

Patet autem simul

Theorema 1. Si numerorum series in ratione dupla ab unitate continue proportionalium continuetur, donec eorum summa sit numerus primus; summa in maximum multiplicata faciet numerum perfectum.

Theorema 2. Si in numerorum serie in ratione dupla ab unitate continue proportionalium occurrat terminus, qui unitate mulctatus est numerus primus; numerus iste primus in proxime præcedentem ductus efficit numerum perfectum.

In serie numerorum ab unitate in ratione dupla continue proportionalium

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. 4096.

$4-1=3$, $8-1=7$, $32-1=31$, $128-1=127$, $512-1=511$, $2048-1=2047$ &c. sunt numeri primi. Ergo $2.3=6$, $4.7=28$, $31.16=496$, $127.64=8128$, $511.256=130816$, $2047.1024=2096128$ &c. &c. sunt numeri perfecti.

SCHOLION.

249. *Problemata indeterminata, qualia plurima solvit* Diophantus, *difficiliora sunt determinatis, nisi simplicia*

cia fuerint. Unde tyrones ſub initium ea prætermittere poſſunt, quæ difficultatem creant, ad ſequentia pedem promoventes. Non tamen prorſus negligenda ſunt, cum maximus eorum ſæpe ſit uſus in problematibus Geometriæ ſublimioris ſolvendis. Cæterum ars reſolvendi problemata indeterminata numerica Analyſis Diophantea *appellari ſolet.*

CAP. III.
DE ALGEBRA AD GEOMETRIAM ELEMENTAREM APPLICATA.

PROBLEMA 110.

250. P*Roblema Geometricum algebraice reſolvere.*

RESOLUTIO.

1. Obſerventur ea omnia, quæ in probl. 36. (§. 141) fieri præcepimus.
2. Cum vero rariſſime ad æquationem eodem modo in problematis geometricis perveniatur, quo in numericis uſi ſumus; hic ulterius quædam peculiaria notanda ſunt. Nempe

α) Concipiatur jam factum, quod ad faciendum proponitur.

β) Omnium linearum in ſchemate depictarum relationes, nullo habito diſcrimine inter cognitas & incognitas, excutiantur, ut appareat, quomodo aliæ ab aliis dependeant, ſeu quibus datis, aliæ una dentur, ſive per triangula ſimilia (§. 175 *Geom.*), ſive per rectangula (§. 417 *Geom.*), ſive per alia (quod tamen raro fieri ſolet) theoremata.

γ) Ut igitur triangula ſimilia & rectangula obtineas, ſæpius producendæ ſunt lineæ, donec vel directe, vel indirecte datis fiant æquales, vel alias ſecent, ſæpius lineæ parallelæ atque perpendiculares ducendæ, ſæpius puncta quædam connectenda, ſæpius anguli datis æquales conſtruendi: quæ fieri poſſe, ex Geometria elementari mani-

manifestum est. Eum in finem probe tenenda sunt theoremata de æqualitate angulorum & similitudine triangulorum (§. 156. 183. 201. 207. 233. 267. 268. 269. 329 Geom.).

δ) Quodsi in æquationem non satis concinnam incideris; alio adhuc modo excutiendæ sunt linearum relationes, ac interdum sufficit, non directe quærere eam, quæ quæritur, sed aliam, qua data ipsa quoque innotescit.

ε. Reductione æquationis facta ex ultima, quæ prodit, elicienda est constructio geometrica variis quidem modis pro diversitate æquationum.

SCHOLION.

251. *Quoniam nunc tantum simplicissimos regulæ Algebræ casus exemplis geometricis illustramus; sufficerit nobis ostendisse, quomodo æquationes simplices & quadraticæ construantur.*

PROBLEMA III.

252. *Æquationem simplicem construere.*

RESOLUTIO.

Omne artificium in eo consistit, ut fractiones, quibus quantitas incognita æqualis, in terminos proportionales resolvantur: id quod exemplis rectius ostenditur, quam multis regulis docetur.

1. Sit nempe $x = \frac{ab}{c}$; erit $c : a = b : x$ (§. 302 *Arithm.*). Reperietur adeo x (§. 271 *Geom.*)

2. Sit $x = \frac{abc}{de}$, fiat $d : a = b : \frac{ab}{d}$. Hæc quarta proportionalis inventa (§. 271 *Geom.*) dicatur g; erit $x = \frac{gc}{e}$: quæ adeo ut in casu primo invenitur.

3. Sit $x = \frac{aa - bb}{c}$. Quoniam $aa - bb = (a + b)(a - b)$, (§. 86); erit $c : a + b = a - b : x$ (§. 302 *Arithm.*).

4. Sit $x = \frac{a^2 b - bcc}{ad}$. Invenitur *per casum* 1. $g = \frac{ab}{d} = \frac{a^2 b}{ad}$ & $h = \frac{bc}{d}$, ut sit $\frac{bcc}{ad} = \frac{hc}{a}$; denique *per casum* 1. $i = \frac{hc}{a}$: erit $x = g - i$, differentia nempe linearum g & i.

5. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{be}$. Inveniatur ut in casu præcedente $g = \frac{ab}{c}$ & $f =$

adc

$\frac{adc}{be}$: erit $x = g + f$, summa linearum g & f.

6. Sit $x = \frac{a^2b + bad}{af + cg} = \frac{ab + bd}{f + cg : a} = \frac{(a + d)b}{f + cg : a}$ Quæratur $\frac{cg}{a}$ & fiat $f +$ $\frac{cg}{a} = h$; erit $f + h : a + d = b : x$, consequenter $x = \frac{(a + d)b}{f + h}$. Reductus adeo est casus præsens ad primum.

7. Sit $x = \frac{a^2b - bad}{af + bc}$. Quæratur $\frac{af}{b}$ & fiat $\frac{af}{b} = h$, erit $x = \frac{a(a - d)}{h + c}$, consequenter $h + c : a - d = a : x$.

8. Sit $x = (a^2 + b^2) : c$ Construatur triangulum ABC, cujus crus AB $= a$,
Tab. I. Fig. 3. BC $= b$, (§. 180 *Geom.*); erit AC $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$, (§. 417 *Geom.*). Dicatur AC $= m$, erit $a^2 + b^2 = m^2$, adeoque $x = \frac{m^2}{c}$, consequenter $c : m = m : x$.

Tab. I. Fig. 4. 9. Sit $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$. Super AB $= a$ describatur semicirculus & in eo applicetur AC $= b$. Cum triangulum ACB sit rectangulum (§. 317 *Geom.*); erit CB $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$, (§. 417 *Geom.*). Dicatur CB $= m$: erit $x = m^2 : c$, consequenter $c : m = m : x$

10. Sit $x = \frac{a^2b + bcd}{af + bc} = \frac{a^2 + cd}{c + af : b}$. Inferatur $b : a = f : \frac{fa}{b}$ & fiat $\frac{fa}{b} = h$: Tab. I. Fig. 5.
erit $x = \frac{a^2 + cd}{h + c}$. Quæratur inter AC $= c$ & CB $= d$ media proportionalis CD $= \sqrt{cd}$, (§. 327 *Geom.*). Fiat CE $= a$; erit DE $= \sqrt{(a^2 - cd)}$. Dicatur hæc m: erit $x = \frac{m^2}{h + c}$, consequenter $h + c : m = m : x$.

PROBLEMA 112.

253. *Æquationem quadraticam geometrice construere.*

RESOLUTIO.

Cum æquationes quadraticæ ad simplices reduci possint (§. 143); ipsas quoque *per probl.* præced. (§. 253) construere licet.

Sit enim æquatio pura $x^2 = ab$; erit Tab. I. Fig. 5.
$a : x = x : b$, (§. 299 *Arithm.*). Invenitur adeo $x = \sqrt{ab}$, si inter AC $= a$ & BC $= b$ quæratur media proportionalis DC (§. 327 *Geom.*). Si æquatio affecta $x^2 \pm ax = \pm b^2$; erit $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 \pm b^2)}$, hoc est, vel $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, vel $x = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} - \frac{1}{2}a$, vel $x = \frac{1}{2}a + (\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2})$, vel $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$. Omne igitur artificium construendi has æquationes huc redit, ut inveniatur valor ipsius $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$,

Tab. I. Fig. 3. itemque ipsius $V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$. Utrumque vero jam docuimus in problemate præcedente. Nimirum si in triangulo rectangulo fiat $AB = \frac{1}{2}a$ & $BC = b$; erit $AC = V(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$ (§. 417 *Geom.*). Sed
Fig. 4. si super $AB = \frac{1}{2}a$, describatur semicirculus & in eo applicetur $AC = b$; erit $CB = V(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$ ut in problemate præcedente demonstratum.

SCHOLION.

254. *Quamvis omnes æquationes simplices & quadraticæ eum in modum construi possint, quo eas construere docuimus: minime tamen consultum est, ut iis stricte inhæreamus. Hac enim ratione in constructiones parum commodas sæpe incideremus, cum singulares problematis specialis circumstantiæ multo concinniorem meditanti insinuent. Immo in genere notandum est, ex calculo analytico difficillime erui constructiones concinnas, cum tamen in iis unice ingenium spectetur, solutione arithmetica ad praxin sufficiente. Ratio hæc est, quod in algebraica solutione problema tanquam unicum in rerum possibilium regione consideretur, independens ab omnibus reliquis, cum tamen ex veterum methodo appareat & ipsa ratio suadeat, solutionem unius a solutione alterius pendere.*

PROBLEMA 113.

Tab. I. Fig. 3. 255. *Data perimetro* $AB + BC + CA$ *& area trianguli rectanguli, invenire hypothenusam.*

Sit $AB + BC + CA = a$ $\quad AC = x$
area $= b^2$ erit $BC + BA = a - x$

Jam cum sit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*) & $AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB.BC$ (§. 261 *Arithm.*): erit $AC^2 = (AB + BC)^2 - 2AB.BC$ (§. 91 *Arithm.*). Est vero $AC^2 = x^2$ & $(AB + BC)^2 = a^2 - 2ax + x^2$, $2AB.BC = 4b^2$ (§. 392 *Geom.*). Quare

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$$

$$2ax = a^2 - 4b^2$$

$$x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$$

Quodsi triangulum construi debet, dicatur altitudo BD, hoc est perpendiculum in hypothenusam AC demissum (§. 227 *Geom.*), y; erit (§. 392 *Geom.*)

$$\frac{1}{2}xy = b^2$$

$$y = b^2 : \frac{1}{2}x$$

Constructio. Erigatur ad $BD = a$ perpendicularis $AB = 2b$, fiatque $BG = b$ Tab. XII.
& quæratur (§. 271 *Geom.*) quarta proportionalis $BH = 2b^2 : a$. Fiat $CB =$ Fig. 113.
$\frac{1}{2}a$ & $CI = BH$, erit $BI = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a = x$. Dividatur BI bifariam in O, quæraturque ad $BO = \frac{1}{2}x$, & $BE = BG = b$ tertia proportionalis BK, quæ erit altitudo trianguli quæsita $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Quare si super BI describatur semicirculus & ex

& ex K agatur eidem parallela KL secans semicirculum in L; ductis rectis BL & LI erit BLI triangulum quæsitum.

Æquatio secunda in hanc resolvitur analogiam:

$$2a : a + 2b = a - 2b : x$$

seu $a : \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}a - b : x$ (§. 185 *Arithm.*). Habetur adeo

Theorema. In omni triangulo rectangulo est ut perimeter ad compositam ex dimidia perimetro & quadrati latere, quod triangulo æquale, ita differentia hujus lateris a perimetro dimidia ad hypothenusam.

SCHOLION.

256. *Cum areas figurarum in Geometria metiamur investigando earum rationem ad quadratum aliquod datum* (§. 118 Geom.); *ideo quoque tum in Geometria, tum in Algebra dantur per latus quadrati ipsis æquale.*

PROBLEMA 114.

Tab. I. Fig. 3. 257. *Data area trianguli rectanguli, cujus latera* AC, AB *&* BC *in proportione continua; invenire latera.*

Sit area $= a^2$ $\quad$ BC $= x$

AB $= y$

erit AC $= y^2 : x$

Ergo

(§. 417 *Geom.*) $\quad y^4 : x^2 = x^2 + y^2$ $\quad\quad$ (§. 392 *Geom.*) $\quad \frac{1}{2}xy = a^2$

$$y^4 = x^4 + x^2y^2 \qquad xy = 2a^2$$

$$= 16a^8 + 4a^4 \over y^4 \qquad x = 2a^2 : y$$

$$y^8 = 16a^8 + 4a^4y^4 \qquad x^2 = 4a^4 : y^2$$

$$y^8 - 4a^4y^4 = 16a^8 \qquad x^4 = 16a^8 : y^4$$

$$4a^8 \quad 4a^8 \qquad x^2y^2 = 4a^4$$

$$y^8 - 4a^4y^4 + 4a^8 = 20a^8$$

$$y^4 - 2a^4 = 2a^4 V5$$

$$2a^4 - y^4$$

$$y^4 = 2a^4 + 2a^4 V5$$

$$= a^4 (2 + 2V5)$$

$$y = a \overset{4}{V}(2 + 2V5)$$

Nempe quia $2a^4 < 2a^4V5$, radix $2a^4 - y^4$ est falsa.

Similiter reperitur valor ipsius x. Est enim, vi æquationis $xy = 2a^2$, $y = 2a^2 : x$, adeoque $y^4 = 16a^8 : x^4$ & hinc ob $y^4 = x^2y^2 + x^4$ porro

$$16a^8 : x^4 = 4a^4 + x^4$$

$$16a^8 = 4a^4x^4 + x^8$$

$$20a^8 = 4a^8 + 4a^4x^4 + x^8$$

$$2a^4V5 = 2a^4 + x^4$$

$x^4 =$

$$x^4 = 2a^4\sqrt{5} - 2a^4$$

$$x = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$$

Tab. XII. Fig. 14. *Constructio.* Jungantur AB $= a$ & AC $= 2a$ ad angulos rectos, erit BC $= a\sqrt{5}$. Fiat BD $=$ AB, erit DC $= a\sqrt{5} - a$. Fiat porro CE $=$ CD, & ducta per C recta NL ad AK perpendiculari describatur super AE semicirculus; erit CN $= \sqrt{(2a^2\sqrt{5} - 2a^2)} = a\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$. Factis CH $= a$ & CG $=$ CN, descriptoque semicirculo super HG; erit CI $= \sqrt{(a^2\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)})} = a\sqrt{\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}} = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$.

Similiter fiat CK $=$ CB $+$ CH $= a + a\sqrt{5}$; erit descripto super AK semicirculo CL $= \sqrt{(2a^2 + 2a^2\sqrt{5})} = a\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$. Fiat porro CO $=$ CL, erit descripto super HO semicirculo CM $= \sqrt{(a^2\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})})} = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$.

Quodsi itaque tandem fiat CF $=$ CI; ducta FM erit CMF triangulum quaesitum.

Quodsi exponens rationis $= y$, BC $= x$, erit AB $= xy$, AC $= y^2$, adeoque (§. 417 *Geom.*):

$$x^2y^4 = x^2y^2 + x^2 \quad x^2$$

$$y^4 = y^2 + 1$$

$$y^4 - y^2 = 1$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$$

$$y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$y^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\frac{1}{2} - y^2$$

$$y^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})}$$

Patet adeo rationem laterum esse constantem.

PROBLEMA 115.

258. *Datam rectam* AB *media & extrema ratione secare in* C, *hoc est, ut sit* AB : AC $=$ AC : CB. Tab. I. Fig. 6.

Sit AB $= a$, AC $= x$; erit CB $= a - x$, consequenter per conditionem problematis

$$a : x = x : a - x$$

$$x^2 = a^2 - ax \quad (\text{§. 297 } Arith.).$$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$$

Constructio. 1. Jungantur AB $= a$ & BD $= \frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit AD $= \sqrt{\frac{5}{4}}$

$= V\frac{5}{4}a^2$. 2. Fiat DF $= \frac{1}{2}a$ & AF $=$ AC; erit AC $= x$.

Tab. I. Fig. 7. Alia ex æquatione tertia elicitur constructio. Nimirum radio AC $= \frac{1}{2}a$ describatur circulus & in A erigatur perpendicularis $= a$. Si enim porro ducatur BD per centrum C; erit ED $= a$ & BE $= x$. Quare si fiat BF $=$ BE: recta AB erit in F media & extrema ratione secta. Etenim BD $= a + x$, adeoque BE. BD $= ax + x^2$, consequenter $ax + x^2 = a^2$ (§. 379 *Geom.*).

PROBLEMA 116.

Tab. I. Fig. 8. 259. *Rectam datam* AC *utcunque divisam in* B *iterum secare in* D, *ita ut sit* AD : DC = DC : BD.

Sit AB $= a$ BD $= x$
BC $= b$ erit DC $= b - x$
AD $= a + x$

Quare per conditionem problematis

$$a + x : b - x = b - x : x$$
$$ax + x^2 = b^2 - 2bx + x^2$$
$$ax + 2bx = b^2$$
$$x = b^2 : (a + 2b)$$

Invenitur adeo x ob analogiam $a + 2b : b = b : x$ (§. 272 *Geom.*).

Aliter.

Analogia prima, ex qua æquatio elicitur, etiam per leges rationum ad eam reduci potest, a qua constructio pendet. Quoniam enim

$$a + x : b - x = b - x : x$$

erit $a + b : b - x = b : x$ (§. 190 *Arithm.*)

$a + b : b = b - x : x$ (§. 173 *Arithm.*)

$a + 2b : b = b : x$ (§. 190 *Arithm.*)

PROBLEMA 117.

260. *Datam rectam* AC *divisam in* B *denuo secare in* D, *ita ut sit* CB : DB = DA : AB. Tab. I. Fig. 8.

Sit CB $= a$ DB $= x$
BA $= b$ erit DA $= b + x$

Quare per conditionem problematis

$$a : x = b + x : b$$
$$ab = bx + x^2$$
$$\tfrac{1}{4}b^2 \quad \tfrac{1}{4}b^2 \qquad (§. 143).$$
$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab = \tfrac{1}{4}b^2 + bx + x^2$$
$$V(\tfrac{1}{4}b^2 + ab) = \tfrac{1}{2}b + x$$
$$V(\tfrac{1}{4}b^2 + ab) - \tfrac{1}{2}b = x$$

Constructio. Inter EG $= b$ & GF $= a$ quæratur media proportionalis HG, quæ erit $= Vab$. Fiat GI $= \frac{1}{2}b$ & duca- Tab. I. Fig. 9.

ducatur HI: erit $HI = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)}$ Fiat denique $KI = GI$: erit $KH = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)} - \frac{1}{2}b$. Invenitur etiam $\sqrt{(\frac{1}{4}bb + ab)}$, si inter $\frac{1}{4}b + a$ & b quæratur media proportionalis (§. 327. 330 *Geom.*).

Tab. I. Fig. 4. Item quia $\frac{1}{4}bb + ab$ est differentia quadratorum $\frac{1}{4}bb + ab + a^2$ & a^2, super $AB = \frac{1}{2}b + a$ describatur semicirculus & in eo applicetur $AC = a$; erit $CB = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + ab)}$, (§. 317. 417 *Geom.*).

DEFINITIO 19.

261. Si quatuor fuerint *lineæ* proportionales, extremæ mediis, mediæ extremis *reciprocæ* dicuntur.

PROBLEMA 118.

262. *Datam rectam* AB *ita secare in* C, *ut partes* AC *&* CB *sint duabus datis* DE *&* FG *reciprocæ.* Tab. I. Fig. 10.

Sit $AB = a$ $AC = x$
$DE = b$ $CB = a - x$
$FG = c$

Ergo (§. 261).

$$x : b = c : a - x$$

$$ax - x^2 = cb$$

$$-cb = x^2 - ax$$
$$\tfrac{1}{4}aa \qquad \tfrac{1}{4}aa \quad (§. 143).$$

$$\tfrac{1}{4}aa - cb = \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - cb)} = \tfrac{1}{2}a - x$$
$$= x - \tfrac{1}{2}a$$

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - cb)}$$

Constructio. Quæratur inter $HI = b$ & $IK = c$ media proportionalis $MI = \sqrt{cb}$ (§. 327 *Geom.*). Radio $IL = \frac{1}{2}a$ describatur arcus & ducatur PM ipsi IK parallela (§. 258 *Geom.*), erit $NM = x$ & $MP = a - x$. Nam demisso ex centro L perpendiculo LO, erit $NO = OP$ (§. 291 *Geom.*) & $OL = MI = \sqrt{cb}$ (§. 226 *Geom.*). Sed $NL = LI$ (§. 40 *Geom.*) $= \frac{1}{2}a$. Ergo $NO = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)}$ (§. 417 *Geom.*), consequenter ob $MO = IL$ (§. 238 *Geom.*) $= \frac{1}{2}a$, $MN = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)} = x$ & $PM = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)} = a - x$. Tab. I. Fig. 11.

COROLLARIUM.

263. Construere ergo æquationem quadraticam affectam $ax - x^2 = cb$ idem est, ac datis duabus rectis c & b, vel si $c = b$, eidem rectæ b reciprocas x & $a - x$ invenire.

PROBLEMA 119.

264. *Datis duabus rectis* DE *&* FG *reciprocas invenire, quarum differentia sit datæ rectæ* AC *æqualis.* Tab. I. Fig. 10.

Sit $DE = a$ Reciproca minor $= x$
$FG = b$ erit major $= c + x$
$AC = c$

Ergo

Ergo (§. 261)

$$x : a = b : c + x$$

$$ab = cx + x^2$$
$$\tfrac{1}{4}cc \quad \tfrac{1}{4}cc$$

$$\tfrac{1}{4}cc + ab = \tfrac{1}{4}cc + cx + x^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)} = \tfrac{1}{4}c + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)} - \tfrac{1}{2}c = x$$

Tab. I. Fig. 5. *Constructio.* Quæratur inter AC $= b$ & CB $= a$ media proportionalis DC. Fiat CE $= \tfrac{1}{2}c$: erit DE $= \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + ab)}$. Unde si subtrahitur $\tfrac{1}{2}c =$ EF relinquitur DF $= x$.

Tab. I. Fig. 11. Alia magis ingeniosa ex æquatione $ab = cx + x^2$ eruitur. Describatur nimirum ex centro C radio arbitrario, majori tamen quam c & $a - b$, circulus. In eo applicentur chordæ IQ $= c$ & IP $= a - b$. Prolongetur PI in O donec PO $= b$. Tandem radio CO describatur circulus priori concentricus: erit HI $= x$. Demissa enim ex centro C perpendiculari CL; erit LI $=$ LQ & LH $=$ LM (§. 291 *Geom.*), adeoque QM $=$ IH (§. 91 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse NI $=$ PO $= b$. Ergo NI. IO $= ab$, consequenter $ab =$ QM. QH $=$ HI. ($c +$ HI), (§. 381 *Geom.*). Est vero etiam $ab = x\ (c + x)$. Ergo HI $= x$.

Sint omnia ut ante, & pars major $= x$, erit minor $x - c$ consequenter (§. 261)

$$x : a = b : x - c$$

$$x^2 - cx = ab.$$

Constructio. Eadem est, quæ præcedens. Sed hic QH $= x$, ita enim HI $=$ QM $= x - c$, consequenter NI. NO $= ab$ & QH. QM $= x^2 - cx$.

COROLLARIUM.

265. Construere ergo æquationes quadraticas $x^2 + cx = ab$ & $x^2 - cx = ab$ idem est ac datis duabus rectis a & b, vel, si $a = b$, eidem rectæ b reciprocas ibi x & $x + c$, hic x & $x - c$ reperire.

PROBLEMA 120.

266. *Datam rectam* AB *ita secare in* C *ut rectangulum sub tota* AB *& segmento minore* AC *æquale sit rectangulo sub majore* CB *& differentia utriusque* CB $-$ AC. Tab. I. Fig. 10.

Sit AB $= a$ AC $= x$

erit CB $= a - x$

CB $-$ AC $= a - 2x$

Quare per conditionem problematis

$$ax = a^2 - 3ax + 2x^2$$

$$-a^2 = -4ax + 2x^2$$

$$-\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax$$
$$a^2 \quad a^2$$

$$\tfrac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a - x$$

 $x + \sqrt{}$

$$x + \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = a$$

$$x = a - \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}$$

Constructio. Quæratur inter $\frac{1}{2}a$ & a media proportionalis, quæ erit pars major $a-x$, adeoque subducta ex a relinquit minorem x.

Aliter.

Quoniam per conditionem problematis.

$$ax = (a-x)(a-2x)$$

erit (§. 104). $a : a-2x = a-x : x$

$$2a-2x : a = a : a-x$$

2

$$a-x : \tfrac{1}{2}a = a : a-x$$

$$\tfrac{1}{2}a : a-x = a-x : a$$

SCHOLION.

267. *His resolutionibus per analogias & reductionibus æquationum quadraticarum ad lineas reciprocas opus est, si geometricas more veterum mediteris demonstrationes.*

PROBLEMA 121.

Tab. I. Fig. 13. n. 1. 268. *Dato radio circuli* ED, *invenire latus trigoni regularis ipsi inscribendi* AB.

Ducatur latus hexagoni EB, & sit BD = EB (§. 356 *Geom.*) $= a$, AB $= x$; erit BF $= \frac{1}{2}x$ (§. 291 *Geom.*). Et quoniam anguli ad F recti (*per* §. *cit.*) BE = BD, *per demonstr.* BF = BF: erit EF = FD (§. 235 *Geom*:) $= \frac{1}{2}a$. Quare (§. 417 *Geom.*) $BD^2 - DF^2 = FB^2$, hoc est

$$\tfrac{3}{4}aa = \tfrac{1}{4}x^2$$

$$3aa = x^2$$

$$\sqrt{3aa} = x^2$$

Est ergo x media proportionalis inter $3a$ & a. Et si fiat $a = 1$, erit $= x \sqrt{3}$.

Constructio. Concinnior hæc est: super diametro AB construatur triangulum æquilaterum AFB & centrum C cum puncto F connectatur recta CF; erit CF latus trigoni. Cum enim FCB sit triangulum rectangulum (§. 184 *Geom.*) & FB $= 2a$, CB $= a$; erit FC $= \sqrt{3aa}$ (§. 417 *Geom.*) $= x$. Tab. I. Fig. 13. n. 2

Theorema. Quadratum lateris trigoni est ad quadratum radii ut 3 ad 1.

Aliter.

$$\tfrac{3}{4}aa = \tfrac{1}{4}x^2$$

$$\tfrac{3}{4}a : \tfrac{1}{4}x = x : a$$

$$3a : x = x : a$$

COROLLARIUM 1.

269. Si dato latere trigoni regularis b inveniri debet radius circuli circumscribendi y; erit $3y^2 = b^2$, consequenter $y = \sqrt{\tfrac{1}{3}b^2}$, quæ est media proportionalis inter $\frac{1}{3}b$ & b.

CO-

COROLLARIUM 2.

270. Quoniam dimidium latus trigoni regularis est sinus 60° (§. 2. *Trigon.*), per problema præsens invenitur sinus 60°.

SCHOLION.

271. *Hujus problematis solutio usum potius respicit arithmeticum, quam geometricum. Geometrica enim constructio ex Elementis facilior & elegantior deducitur, quamvis eadem ex calculo etiam pateat. Est enim diameter AB* $= 2a$. *Quare si fiat AD* $= a$, *ducaturque DB, cum angulus ad D rectus sit* (§. 317 Geom.), *adeoque* $AB^2 - AD^2 = DB^2$ (§. 417 Geom.); *erit* $DB = \sqrt{3a^2}$

Tab. I. Fig. 13. n. 2.

PROBLEMA 122.

Tab. I. Fig. 17.

272. *Dato radio circuli AE invenire latus octogoni regularis circulo inscribendi.*

Sit $AE = r$, $AF = y$; erit latus quadrati $AB = \sqrt{2r^2}$ (§. 21. *Trig.*) & $AG = \sqrt{\frac{1}{2}r^2}$ (§. 291 *Geom.*). Porro cum $AEF = 45°$ (§. 342 *Geom.*), & angulus ad G rectus (§. 291 *Geom.*) erit quoque $EAG = 45°$ (§. 241 *Geom.*), consequenter $EG = AG$ (§. 253 *Geom.*) $= \sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Hinc $FG = r - \sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Quare (§. 417 *Geom.*).

$$yy = \tfrac{1}{2}r^2 + 1\tfrac{1}{2}r^2 - r\sqrt{2r^2}$$

hoc est $yy = 2r^2 - r\sqrt{2r^2}$

$$y = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{2r^2})}$$

Quod si fiat $r = 1$; erit $y = \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$.

COROLLARIUM.

273. Cum dimidium latus octogoni sit sinus 20° 30′ (§. 2 *Trigon.*); per hoc ipsum problema invenitur sinus 22° 30′.

PROBLEMA 123.

274. *Dato latere Octogoni AF invenire radium circuli circumscribendi AE.* Tab. I. Fig. 17.

Sit $AF = b$, $AE = y$, erit (§. 272)

$$b^2 = 2y^2 - \sqrt{2y^4}$$

$$\sqrt{2y^4} = 2y^2 - b^2$$

$$2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$

$$0 = 2y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$

$$0 = y^4 - 2b^2y^2 + \tfrac{1}{2}b^4$$

$\frac{1}{2}b^4$ $\frac{1}{2}b^4$ (§. 261 *Arithm.*)

$$\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4$$

$$b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = y^2 - b^2$$

$$b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = y^2$$

$$\sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})} = y$$

Est igitur $b : y = y : b + b\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$

conseq. $\frac{1}{2}b : y = y : 2b + 2b\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$

Hinc elicitur sequens geometrica.

 Con-

Constructio. Super latere octogoni A
Tab. B $= b$ describatur semicirculus & ex cen-
XII. tro C erigatur perpendicularis indefinita
Fig. CF, erit recta DB $= \sqrt{\frac{1}{2} b^2}$ (§. 417
115. *Geom.*). Fiat AE $= 2b + 2b\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, de-
scriptoque semicirculo AFE; erit AF $=$
$\sqrt{(b^2 + b\sqrt{\frac{1}{2}b^2})}$, (§. 327 *Geom.*), consequenter radius circuli octogono circumscribendi: quod adeo super recta AB construetur, si radio AF describatur circulus transiens per A & B.

PROBLEMA 124.

Tab. 275. *Dato radio circuli* AC, *in-*
I. *venire latus decagoni regularis in-*
Fig. *scribendi* AB.
14.

Quoniam AB est $\frac{1}{10}$ totius peripheriæ, angulus ACB $= 36°$ (§. 57. 59 *Geom.*), consequenter ob AC $=$ BC (§. 40 *Geom.*), ABC $=$ CAB $= 72°$ (§. 248 *Geom.*), adeoque DAC $= 108$ (§. 149 *Geom.*). Fiat AD $=$ AC, erit ADC $=$ ACD $= 36°$ (§. 248 *Geom.*), consequenter DCB $= 72°$. Sunt ergo triangula ABC & BDC æquiangula & hinc BD : BC $=$ BC : AB (§. 267 *Geom.*).

Sit jam AC $=$ BC $= a$, AB $= x$; erit BD $= a + x$, consequenter *per demonstrata.*

$$a + x : a = a : x$$

$$ax + x^2 = a^2$$

Est ergo a media & extrema ratione secanda, cujus pars major x (§. 258). Vel radio a quærendæ sunt reciprocæ $a + x$ & x (§. 265).

Theorema. Latus decagoni regula- Tab.
ris circulo inscripti est pars major radii I.
media & extrema ratione secti. Fig.

Constructio. Quoniam $x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}$ 15.
a (§. 258); radio a describatur circulus & in centro E erigatur perpendicularis IE $= a$. Fiat EF $= \frac{1}{2}a$: erit FI $= \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$. Quare si ex F radio IF describatur arcus KI; erit KE $= \sqrt{\frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$.

SCHOLION.

276. *Hanc ipsam constructionem tradit* Ptolemæus *in suo Almagesto.*

COROLLARIUM.

277. Invenitur ergo per problema præsens sinus 18° (§. 2. *Trigon.*).

PROBLEMA 125.

278. *Dato latere decagoni regu-* Tab.
laris circulo inscribendi AB, *inve-* I.
nire radium AC. Fig.
14.

Sit AB $= a$, AC $= x$; erit BD $= a + x$ & *per demonstrata in probl. præc.*

$$a + x : x = x : a$$

$$ax + a^2 = x^2$$

$$a^2 = x^2 - ax$$

$$\frac{5}{4}a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$$

$\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

$\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = x - \frac{1}{2}a$, ob $x > \frac{1}{2}a$ (§. 275).

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = x$.

Tab. I. Fig. 16. *Constructio.* Construatur triangulum rectangulum MLN, in quo ML $= a$ & MN $= \frac{1}{2}a$: erit LN $= \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 417 *Geom.*). Producatur MN in O, donec NO = LN: erit MO $= x$. Ex centro itaque O per M circulus describi potest.

Aliter.

$a + x : x = x : a$

$a : x = x - a : a$

Quærendæ adeo sunt ipsi a reciprocæ x & $x - a$.

PROBLEMA 126.

Tab. I. Fig. 17. 279. *Dato radio circuli* AE & *latere decagoni* AF *invenire latus pentagoni* AB.

Sit AE $= a$ AB $= x$
AF $= b$ AG $= \frac{1}{2}x$ (§. 291
GE $= \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ *Geom.*)
FG $= a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$

Quare (§ 417 *Geom.*)

$b^2 = \frac{1}{4}x^2 + a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} + a^2 - \frac{1}{4}x^2$

$b^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$

$2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = 4a^2 - b^2$

$4a^4 - a^2x^2 = 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$

$-a^2x^2 = -4a^2b^2 + b^4$

$4a^2b^2 - b^4 = a^2x^2$

$4b^2 - b^4 : a^2 = x^2$

Est vero $b = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (§. 285)

$b^2 = \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

$b^4 = \frac{14}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

Ergo $x^2 = \frac{24}{4}a^2 - 4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - (\frac{14}{4}a^4 + 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}) : a^2 = \frac{24}{4}a^2 - 4a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{14}{4}a^2 + 3a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = a^2 + \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = a^2 + b^2$.

Constructio: Quæratur latus decagoni EK (§. 275), erit KI latus pentagoni. Tab. I. Fig. 15.

Theorema. Latus pentagoni regularis potest latera hexagoni & decagoni eidem circulo inscriptorum simul.

SCHOLION.

280. *Eandem prorsus constructionem dedit* Ptolemæus.

COROLLARIUM.

281. Per præsens adeo problema inveniri potest sinus 36° (§. 2. *Trigon.*).

PROBLEMA 127.

282. *Datis summa crurum trianguli rectanguli* AB + BC *una cum perpendiculo* BD *ex angulo recto* B *in hypothenusam* AC *demisso, invenire latera.* Tab. I. Fig. 3.

Sit AB + BC $= a$, BD $= b$, AB − BC $= y$, AC $= x$, erit AB $= \frac{1}{2}(a + y)$, BC $= \frac{1}{2}(a - y)$ consequenter (§. 417

(§. 417 *Geom.*)

$$x^2 = \tfrac{1}{2}(aa + yy)$$

$$2x^2 = aa + yy$$

$$2x^2 - a^2 = y^2$$

(§. 330 *Geom.*)

BA : BD = AC : BC

$$\tfrac{1}{2}(a+y) : b = x : \tfrac{1}{2}(a-y)$$

$$\tfrac{1}{4}(a^2 - y^2) = bx$$

$$a^2 - y^2 = 4bx$$

$$a^2 - 4bx = y^2$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$2x^2 - a^2 = a^2 - 4bx$$

$$2x^2 + 4bx = 2a^2$$

$$x^2 + 2bx = a^2$$

$$x^2 + 2bx + b^2 = a^2 + b^2$$

$$x = \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$$

Constructio nihil difficultatis habet. Quodsi enim triangulum construi debet, ad AB $= a$ excitetur in C perpendicularis
Tab. AC $= b$ (§. 249 *Geom.*), erit BC $= \sqrt{}$
XII. $(a^2 + b^2)$. Quare si fiat CD = AC,
Fig. erit DB $= \sqrt{(a^2 + b^2)} - b$. Fiat jam
116. porro BE = BD & descripto super EB semicirculo ex C ducatur CH ipsi AB parallela (§. 258 *Geom.*) secans semicirculum in F. Ductis enim rectis EF & FB, erit EFB triangulum quæsitum.

PROBLEMA 128.

Tab. I. Fig. 18. 283. *Datis pro triangulo rectangulo* BAC *hypothenusa* BC *& differentia crurum* DC, *invenire crura.*

Sit BC $= c$, DC $= f$, $\tfrac{1}{2}$(AB + AC) $= x$; erit AC $= x + \tfrac{1}{2}f$, AB $= x - \tfrac{1}{2}f$ (§. 5), consequenter (§. 417 *Geom.*).

$$2x^2 + \tfrac{1}{2}f^2 = c^2$$

$$2x^2 = c^2 - \tfrac{1}{2}f^2$$

$$x^2 = \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2$$

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2)}$$

Constructio. Construatur rectangulum triangulum AFE, in quo AF = FE $= \tfrac{1}{2}c$, erit AE $= \sqrt{\tfrac{1}{2}cc}$. Super AE describatur semicirculus ob AF = FE transiturus per F & in eo applicetur EG $= \tfrac{1}{2}b$; erit AG $= x$, consequenter si fiat DG = GC = GE, crus majus AC, minus AB = AD.

PROBLEMA 129.

284. *In dato circulo aptare rectam datam* KL, *quæ producta transeat per datum punctum* H *tangentis* HI. Tab. I. Fig. 19.

Sit LK $= m$, HI $= n$, LH $= y$; erit (§. 379 *Geom.*).

$$y^2 + my = n^2$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$y^2 + my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + n^2$$

$$y + \frac{1}{2}m = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + n^2)}$$

$$y = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + n^2)} - \frac{1}{2}m$$

Constructio. In puncto tangentis I erigatur perpendicularis $MI = \frac{1}{2}m$; erit $HM = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + n^2)}$. Fiat $NM = MI = \frac{1}{2}m$; erit $HN = x$. Quare si ex centro H radio HN describatur arcus LN; erit L punctum, per quod recta HK ducenda, ut LK sit chorda in circulo aptanda.

PROBLEMA 130.

285. *Datis duobus quadratis invenire duo alia reciproca, quorum summa æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data bb, cc, dd, quæsita yy & $dd - yy$. Erit per conditionem problematis

$$yy : bb = cc : dd - yy$$

$$ddy^2 - y^4 = bbcc$$

$$y^4 - ddy^2 + \frac{1}{4}d^4 = \frac{1}{4}d^4 - bbcc$$

$$\frac{1}{2}dd - y^2 = \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - bbcc)}$$

$$y^2 = \frac{1}{2}dd - \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - bbcc)}$$

$$y = \sqrt{(\frac{1}{2}dd - \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - bbcc)})}$$

Constructio. Quæratur ad $AB = d$,
Tab. I. Fig. 20. $AC = b$ & $BD = c$ quarta proportionalis $CE = bc : d$. Describatur semicirculus super $CF = \frac{1}{2}d$ & in eo applicetur $CG = CE$; erit $FG = \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - bbcc)} : d$. Fiat $HC = d$ & $CI = \frac{1}{2}d - \sqrt{(\frac{1}{4}d^4 - bbcc)} : d$; erit media proportionalis $CK = y$. Denique super CH $= d$ describatur semicirculus & in eo applicetur $CL = CK$, erit $LH = \sqrt{(d^2 - y^2)}$ latus alterius quadrati quæsiti.

PROBLEMA 131.

286. *Datis duobus quadratis invenire duo alia reciproca, quorum differentia æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data ff, gg, hh, quæsita yy & $hh + yy$. Erit per conditionem problematis

$$yy : ff = gg : hh + yy$$

$$y^4 + hhyy = ffgg$$
$$\frac{1}{4}h^4 \quad \frac{1}{4}h^4$$

$$y^4 + hhyy + \frac{1}{4}h^4 = ffgg + \frac{1}{4}h^4$$

$$y^2 + \frac{1}{2}hh = \sqrt{(ffgg + \frac{1}{4}h^4)}$$

$$y^2 = -\frac{1}{2}hh + \sqrt{(ffgg + \frac{1}{4}h^4)}$$

$$y = \sqrt{(-\frac{1}{2}hh + \sqrt{(ffgg + \frac{1}{4}h^4)})}$$

Constructio. Eadem fere, quæ problematis præcedentis.

PROBLEMA 132.

287. *Datis tribus lateribus trianguli cujuscunque* HL, LI *&* IH, *invenire altitudinem* ML. Tab. II. Fig. 21. n. 1.

Sit HL $= c$, LI $= d$, HI $= g$, HM $= z$, erit MI $= g - z$. Quare (§. 417 *Geom.*) bis invento valore ipsius ML^2

$$cc - zz = dd - gg + 2gz - zz$$

$$cc = dd - gg + 2gz$$

$$cc - dd = 2gz - gg$$

$$cc + gg - dd = 2gz$$

$$\frac{cc + gg - dd}{2g} = z$$

Geometrica constructio non desideratur, utpote ex elementis manifesta; sed tantum regula arithmetica.

COROLLARIUM.

288. Vi æquationis tertiæ $dd - cc = gg - 2gz$. Sed $gg - 2zg$ est differentia inter zz & $gg - 2zg + zz$. Ergo in omni triangulo differentia quadratorum crurum HL & LI æquatur differentiæ quadratorum segmentorum basis HM & MI.

PROBLEMA 133.

Tab. II. Fig. 21. 289. *Triangulo dato* HLI *æquale & alteri dato* NOP *simile construere.*

n. 1. & 2. Sit HI $= f$, LM $= e$, NP $= m$, QO $= n$, basis trianguli quæsiti $= y$, altitudo $= z$: erit

(§. 396 *Geom.*) $m : n = y : z$

$$mz = ny$$

(§. 392 *Geom.*) $fe = zy$

$$fe : y = z \quad (y)$$

$$mfe : y = mz \quad (m)$$

$$ny = mfe : y$$

$$ny^2 = mfe \quad (y)$$

$$y^2 = mfe : n \quad (n)$$

$$y = \sqrt{(mfe : n)}$$

Constructio. Producatur altitudo OQ trianguli NOP in M, donec altitudini alterius LM æqualis fiat. Producantur itidem crura trianguli in R & S, & per M agatur ipsi NP parallela: erit RS $= me : n$. Quæratur inter RS & SI $= f$ media proportionalis TS $= \sqrt{(mfe : n)}$, super qua ob angulos N & P datos triangulum TSV construi potest. (§. 264 *Geom.*).

Aliter.

$n : m = z : y \qquad fe = zy$

Fiat $n : m = e : r \qquad f : z = y : e$ (§. 299 *Arithm.*)

erit $z : y = e : r$ (§. 167 *Arithm.*)

Ergo $f : y = y : r$ (§. 194 *Arithm.*)

Est ergo y media proportionalis inter f & r, seu inter f & $em : n$, ut ante.

PROBLEMA 134.

290. *Ex angulo* C *rhombi dati* ABDC *ducere rectam* CG *lateri* AB Tab. II. Fig. 22.

AB *continuato occurrentem in* G, *ita ut* EG *sit æqualis lineæ datæ.*

Ducatur Diagonalis CB & in E constituatur angulus CEF = CBG (§. 208 *Geom.*), cujus latus EF producatur, donec diagonali continuatæ in F occurrat.

Sit AB = b, CB = c, EG = d, BG = z, CF = y: erit BF = $y - c$. BG : GE = AB : EC (§. 268 *Geom.*) Unde reperitur EC = $bd:z$. Quoniam angulus CEF = CBG *per construct.* erit ob angulum communem C (§. 267 *Geom.*) CB : BG = CE : EF. Unde reperitur EF $zbd:cz = bd:c$. porro $o = x$ (§. 156 *Geom.*) & $x = u$ (§. 99. 204 *Geom.*). Ergo $o = u$ (§. 87 *Arithm.*), consequenter CBG = EBF (§. 88 *Arithm.*) = CEF (§. 87 *Arithm.*). Ergo ob angulum communem F (§. 267 *Geom.*).

$$CF : FE = FE : BF$$

$$y : \frac{bd}{c} = \frac{bd}{c} : y - c$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; c$$

$$cy : bd = bd : cy - cc$$

$$ccy^2 - c^3y = bbdd$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; cc$$

$$y^2 - cy = bbdd:cc$$

$$y^2 - cy + \tfrac{1}{4}cc = \tfrac{1}{4}cc + bbdd:cc$$

$$y - \tfrac{1}{2}c = \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd:cc)}$$

$$y = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd:cc)}$$

Ex æquatione prima statim liquet, inveniendas esse ipsi $bd:c$ reciprocas y & $y - c$. Ex ultima autem hæc elicitur

Constructio. Fiat BM = EG = d & ducatur LM ipsi AC parallela; erit LM = $bd:c$ (§. 268 *Geom.*) Dividatur BC bifariam in N & in C erigatur perpendicularis CO = LM; erit ON = $\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd:cc)}$ (§. 417 *Geom.*). Translata ergo ON ex N in F; erit CF = y. Denique cum EF = $bd:c$ = LM; ex puncto F intervallo EF determinetur punctum E. Quodsi jam ex C ducatur recta per E occurrens ipsi AB continuatæ in G, erit EG æqualis lineæ datæ.

PROBLEMA 135.

291. A *dato puncto* E *ducere rectam, quæ circulum datum tangat.* Tab. I. Fig. 23.

Quia punctum E positione, circulus GDFG & positione & magnitudine datur; dantur etiam EG & GC. Sit itaque EG = a, GC = b, ED = x; erit EF = $a + 2b$ & (§. 379 *Geom.*).

$$aa + 2ab = x^2$$

$$\sqrt{(aa + 2ab)} = x$$

 Con-

Constructio. Connectantur centrum circuli C & punctum datum E recta EC. Super ea describatur semicirculus CDE ducanturque chordæ CD & DE; erit D rectus (§. 317 *Geom.*). Est vero $CE^2 = aa + 2ab + bb$, $CD^2 = bb$: ergo $DE = \sqrt{(2ab + aa)} = x$ (§. 417 *Geom.*).

PROBLEMA 136.

292. *Examinare regulam* Renaldiniam, *polygonum regulare quodcunque circulo inscribendi.*

Regula *Caroli Renaldini* (e) hæc est. Dividatur diameter AB in tot partes æquales, in quot peripheria dividi debet, Super AB
Tab. II. Fig. 24. construatur triangulum æquilaterum AFB. Ex F per secundum divisionis punctum D ducatur recta FG. Erit ex ipsius mente BG latus polygoni.

Falsitatem regulæ una instantia ostendisse sufficit.

Sit BG latus octogoni & fiat BH = BG; erit HG latus quadrati. Sit porro CB = 1, EG = x; erit CD = $\frac{1}{2}$, *per regulam* Renaldini, FC = $\sqrt{3}$ (§. 268). Quoniam angulus ad C rectus (§. 184 *Geom.*) & is ad E itidem rectus (§. 291 *Geom.*), præterea verticales ad D æquales (§. 156 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*) FC : CD = EG : DE, hoc est, $\sqrt{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{3}}$. Hinc CE = $\frac{\sqrt{3} + x.}{2\sqrt{3}}$ Unde tandem ob $CE^2 + EG^2 = CG^2$ (§. 417 *Geom.*) reperitur

$$\frac{3 + 2x\sqrt{3} + x^2 + x^2 = 1}{12}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; 12$$

$$3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12$$

$$2x\sqrt{3} + 13x^2 = 9$$

$$\tfrac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \tfrac{9}{13}$$

$$\frac{3}{13.13} \qquad \frac{3}{13.13}$$

$$\frac{3}{13.13} + \tfrac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \tfrac{9}{13} + \frac{3}{13.13} = \frac{120}{13.13}$$

$$\tfrac{1}{13}\sqrt{3} + x = \tfrac{1}{13}\sqrt{120}$$

$$x = \tfrac{1}{13}\sqrt{120} - \tfrac{1}{13}\sqrt{3}$$
$$= \tfrac{2}{13}\sqrt{30} - \tfrac{1}{13}\sqrt{3}$$

Foret adeo semilatus quadrati, si vera esset regula *Renaldini*, $(2\sqrt{30} - \sqrt{3}) : 13$. Sed idem ex veris principiis elicitur $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 21. *Trigon.*) $= \sqrt{\frac{1}{2}}$: quod diversum a *Renaldiniano* esse extractio radicis pro-

(e) de Resolutione & Compositione Mathematica lib. 2. f. 367.

probat. Fallit ergo regula *Renaldini* in octogono, adeoque non universalis.

SCHOLION.

293. *Eodem prorsus modo ostenditur, quod etiam fallat in aliis polygonis.*

PROBLEMA 137.

294. *Data diagonali pentagoni regularis* AD, *invenire latus pentagoni* AE.

Tab. II. Fig. 25. Sit AE $= x$, AD $= a$. Quoniam anguli AEC mensura est arcus AB (§. 314 *Geom.*) & ipsius EFA semisumma arcuum AE & CD (§. 316 *Geom.*), hoc est, arcus AE (§. 342 *Geom.*), est vero AB $=$ AE (§. *cit. Geom.*); erit AEF $=$ AFE (§. 142 *Geom.*), consequenter AF $=$ AE (§. 253 *Geom.*) $= x$, adeoque FD $= a - x$. Porro anguli AED mensura est AB $+ \frac{1}{2}$ BC (§. 314 *Geom.*) & ipsius F mensura itidem AB $+ \frac{1}{2}$ BC (§. 316 *Geom.*) & angulus ADE utrique triangulo AED & EFD communis. Quare (§. 267 *Geom.*).

$$AD : ED = ED : FD$$
$$a : x = x : a - x$$
$$a^2 - ax = x^2$$
$$a^2 = x^2 + ax$$

Est adeo x pars major ipsius a media & extrema ratione sectæ (§. 258).

COROLLARIUM.

295. Erit ergo, substitutis a pro x & x pro a, $a = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{5}{4}x^2}$. Unde patet, quomodo ex dato latere diagonalis inveniatur.

PROBLEMA 138.

296. *Invenire circulum superficiei cylindri æqualem.*

Sit ratio radii ad peripheriam $r : p$; peripheria cylindri $= p$, altitudo a; erit superficies $= ap$ (§. 516 *Geom.*). Sit radius circuli $= x$; erit $r : p = x : \frac{px}{r}$, quæ est ejusdem peripheria (§. 425 *Geom.*). Unde habemus (§. 429 *Geom.*).

$$px^2 : 2r = ap \quad | \; 2r$$
$$px^2 = 2rap \quad | \; p$$
$$x^2 = 2ar$$
$$x = \sqrt{2ar}$$

Theorema. Superficies cylindri æquatur circulo, cujus radius est medius proportionalis inter diametrum & altitudinem cylindri.

PROBLEMA 139.

297. *Invenire cylindrum, cujus superficies sit circulo dato æqualis.*

Sit circuli radius $=r$, peripheria $=p$, altitudo cylindri $=x$, radius basis $=y$; erit peripheria ejus $py:r$ (§. 425 *Geom.*), consequenter (§. 516 *Geom.*).

$$pyx:r=\tfrac{1}{2}pr$$
$$\overline{\phantom{pyx=\tfrac{1}{2}pr^2}}\, r$$
$$pyx=\tfrac{1}{2}pr^2$$
$$\overline{\phantom{pyx=\tfrac{1}{2}pr^2}}\, p$$
$$yx=\tfrac{1}{2}r^2$$
$$\overline{\phantom{yx=\tfrac{1}{2}r^2}}\, y$$
$$x=r^2:2y$$

Est adeo problema indeterminatum, ita ut radius pro arbitrio assumi possit vel, quod perinde est, altitudo.

PROBLEMA 140.

298. *Data diametro sphæræ & altitudine cylindri ipsi æqualis, invenire diametrum cylindri.*

Sit diameter sphæræ $=d$, altitudo cylindri $=a$, diameter ejus $=x$, erit soliditas illius $157d^3:300$ (§. 552 *Geom.*), hujus $314ax^2:400$ (§. 514 *Geom.*). Quare per conditionem problematis:

$$157d^3:300=314ax^2:400$$
$$4.157d^3:3=314ax^2$$
$$\overline{}\, 314a$$
$$628d^3:942a=2d^3:3a=x^2$$
$$\sqrt{(2d^3:3a)}=x$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$3a:2d=d^2:x^2$$

resoluta sequens suppeditat

Theorema: Quadratum diametri sphæræ est ad quadratum diametri cylindri ipsi æqualis fere ut tripla cylindri altitudo ad diametrum sphæræ duplam.

PROBLEMA 141.

299. *Data diametro sphæræ* AB, *invenire latus tetraëdri ipsi inscribendi* AD. Tab. II. Fig. 26.

Sit diameter sphæræ AB $=a$, latus tetraëdri AD $=x$, erit radius circuli, cui unum e triangulis tetraëdri inscribi potest $=\sqrt{\tfrac{1}{3}x^2}$ (§. 269). Sit AC $=y$, erit CB $=a-y$, consequenter

(§. 327 *Geom.*) $AC:CD=CD:CB$ — (§. 417 *Geom.*) $AD^2=AC^2+CD^2$

$$y:\sqrt{\tfrac{1}{3}x^2}=\sqrt{\tfrac{1}{3}x^2}:a-y \qquad x^2=y^2+\tfrac{1}{3}x^2$$
$$ay-y^2=\tfrac{1}{3}x^2 \qquad \tfrac{2}{3}x^2=y^2$$
$$ay-\tfrac{2}{3}x^2=\tfrac{1}{3}x^2 \qquad \sqrt{\tfrac{2}{3}x^2}=y$$
$$ay=x^2$$
$$a\sqrt{\tfrac{2}{3}x^2}=x^2$$
$$\tfrac{2}{3}a^2x^2=x^4$$
$$\tfrac{2}{3}a^2=x^2$$

$V\frac{2}{3}a^2 = x$

Est ergo $x^2 : a^2 = 2 : 3$.

Theorema. Quadratum lateris tetraëdri est ad quadratum diametri sphæræ, cui inscribi potest, in ratione subsesquialtera.

COROLLARIUM 1.

300. Est ergo latus tetraëdri ad diametrum sphæræ, cui inscribitur, ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, consequenter huic incommensurabile.

COROLLARIUM 2.

Tab. 301. Porro quoniam $y^2 = \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}$
II. ay, erit $y = \frac{2}{3}a$. Patet adeo tetraëdrum
Fig. sphæræ inscribi, si diameter AB in tres
27. partes æquales dividatur fiatque $AC = \frac{2}{3}AB$.

PROBLEMA 142.

302. *Data diametro sphæræ, invenire latus cubi seu hexaëdri ipsi inscribendi* FG.

Tab. Sit diameter sphæræ, quæ dia-
II. gonali cubi FH æquatur, $= a$, latus
Fig. cubi $= x$; erit (§. 417 *Geom.*) $FI^2 =$
28. $2x^2$ & $FH^2 = 3x^2$, consequenter

$$3x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{1}{3}a^2$$

$$x = V\frac{1}{3}a^2$$

Theorema. Quadratum lateris hexaëdri est ad quadratum diametri sphæræ circumscriptæ in ratione subtripla.

COROLLARIUM 1.

303. Est ergo latus hexaëdri ad diametrum sphæræ, cui inscribitur, ut 1 ad $\sqrt{3}$ consequenter huic incommensurabile.

COROLLARIUM 2.

304. Sit in diametro sphæræ $AC = \frac{2}{3}a$ & $CB = \frac{1}{3}a$; erit $AD = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$, consequenter $DB = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$ seu latus hexaëdri. Tab. II. Fig. 27.

PROBLEMA 143.

305. *Data diametro sphæræ, invenire latus octaëdri inscripti* ML. Tab. II. Fig. 29.

Sit $LM = y$, diameter sphæræ circumscriptæ $HL = b$. Quoniam ML quadrantem subtendit (§. 342 *Geom.*); erit (§. 417 *Geom.*).

$$\frac{2}{4}bb \text{ seu } \frac{1}{2}bb = x^2$$

$$V\frac{1}{2}b^2 = x$$

Theorema. Quadratum lateris octaëdri est ad quadratum diametri sphæræ circumscriptæ in ratione subdupla.

COROLLARIUM 1.

306. Est ergo latus octaëdri ML ad diametrum sphæræ circumscriptæ ut 1 ad $\sqrt{2}$, adeoque huic incommensurabile.

COROLLARIUM 2.

307. Si ex centro sphæræ E erigatur perpendicularis EF, erit $FA = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$ adeoque latus octaëdri inscribendi, id quod

quod in ipso calculo supposuimus in futuros tamen usus sigillatim enunciandum.

PROBLEMA 144.

Tab. II. Fig. 30.

308. *Data diametro sphæræ, invenire latus dodecaëdri* AB.

Quoniam puncta A, C, F, H sunt in sphæra: planum per ea transiens est circulus, ut inferius in sphæricis independenter a dodecaëdro demonstrabitur. Quoniam anguli B, M, G & L, itemque latera AB, BC, CM, MF, FG, GH, HL & LA inter se æquantur (§. 475. 106 *Geom.*); AC = CF = HF = HA (§. 179 *Geom.*) adeoque AHFC quadratum (§. 342 & 98 *Geom.*). Jam cum pentagona 12 in 36 triangula resolvantur per lineas diagonales, quadratum vero AHFC nonnisi 6 subtendat; omnia ista triangula a sex quadratis subtendantur necesse est, consequenter diagonalis AC est lateri hexaëdri sive cubi eidem sphæræ inscripti æqualis (§. 459 *Geom.*).

Sit latus dodecaëdri AB = x, diameter sphæræ = d, erit AC = $\sqrt{\frac{1}{3}d^2}$ (§. 302), consequenter

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} : x = x : \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} - x \quad (\S. 294).$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 - x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x^2$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2}$$

$$\tfrac{1}{12}d^2 \qquad\qquad \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\tfrac{5}{12}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} + \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} = x + \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2}$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} - \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2} = x$$

h.e. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}d^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}d^2} = x$

Æquatio altera hoc suppeditat

Theorema: Quadratum diametri sphæræ æquatur rectangulo ex aggregato lateris dodecaëdri & hexaëdri eidem inscriptorum in triplum latus dodecaëdri.

COROLLARIUM 1.

309. Si diameter sphæræ fuerit 1, erit latus dodecaëdri inscripti $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$, consequenter illa ad hoc, ut 2 ad $\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}$ & quadratum illius ad quadratum hujus ut 6 ad $3 - \sqrt{5}$. Est ergo diameter sphæræ lateri dodecaëdri inscripti tum in se, tum potentia incommensurabilis.

COROLLARIUM 2.

310. Latus dodecaëdri est portio major BG lateris hexaëdri DB eidem sphæræ inscripti media & extrema ratione secti in G (§. 258). Tab. I. Fig. 27.

PRO-

PROBLEMA 145.

Tab. II. Fig. 31. 311. *Data diametro sphæræ* HM *invenire latus icosaëdri inscripti.*

Sit ABCDEA circulus subtendens angulum solidum icosaëdri H; erit latus icosaëdri æquale lateri pentagoni AB huic circulo inscripti (§. 475 *Geom.*). Concipiatur eidem circulo inscriptum decagonum regulare DKEFA &c. & alterum circulo alii, qui isti parallelus & ab eo distat intervallo radii GC; erit DN = DC (§. 279). Quodsi ergo anguli pentagonorum lineis transversis DN, DI, EI &c. connectantur; decem prodibunt triangula æquilatera juncta decem aliis, quorum quinque a circulo superiore, quinque ab inferiore subtenduntur.

Sit HM = b, HC = x, GC = y. Quoniam GC est latus hexagoni; erit HG latus decagoni (§. 279) adeoque = $\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - \tfrac{1}{2}y$, *vi* §. *cit.* Habemus ergo

$$2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - y + y = b \qquad x^2 = y^2 + \tfrac{5}{4}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2}$$
$$\text{h.e. } 2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} = b \qquad\qquad + \tfrac{1}{4}y^2$$

$$5y^2 = b^2 \qquad x^2 = \tfrac{5}{2}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{5}b^2 \qquad x^2 = \tfrac{1}{2}b^2 - \sqrt{\tfrac{1}{20}b^4}$$
$$\text{seu } \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$$
$$y = \sqrt{\tfrac{1}{5}b^2} = b : \sqrt{5}$$
$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})}$$

Constructio. Fiat AH = AB = b, erit EH = $\sqrt{\tfrac{5}{4}b^2}$ (§. 417 *Geom.*) & ob EH : AH = EK : IK, hoc est, $\tfrac{1}{2}b\sqrt{5} : b = \tfrac{1}{2}b : \tfrac{b}{\sqrt{5}}$ (§. 268 *Geom.*) IK $= b : \sqrt{5}$. Est ergo IK radius circuli, cui pentagonum icosaëdri inscribitur. Porro EI = $b : 2\sqrt{5} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$ (§. *cit. Geom.*) & hinc AI = $\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$. Unde tandem AK = $\sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})} = x$ (§. 330 *Geom.*). Tab. II. Fig. 27.

COROLLARIUM 1.

312. Quoniam $5y^2 = b^2$; quadratum diametri sphæræ est in ratione quintupla ad quadratum radii circuli angulum solidum icosaëdri subtendentis.

COROLLARIUM 2.

313. Liquet etiam, latus icosaëdri diametro sphæræ circumscriptæ tum in se, tum potentia incommensurabile esse.

SCHOLION 1.

314. *Si diameter sphæræ fuerit* 10000 *erit* (§. 299. 305. 302. 311. 308) *latus tetraedri inscripti* 81649, *octaëdri* 70710, *hexaëdri* 57736, *icosaëdri* 52573, *dodecaëdri* 35682 (f).

 SCHO-

(f) Herigonius Curs. Mathem. Tom. I. p. 779.

SCHOLION 2.

315. *Cum ex diametro sphæræ corporibus regularibus circumscriptæ invenire possimus latera eorum; non difficile foret, inde ulterius elicere tum superficies, tum soliditates eorundem, easque tum inter se, tum cum quadrato & cubo diametri sphæræ conferre: sed quoniam hæc doctrina rarissimi est usus, eam prætermittendam esse judicamus.*

CAP. IV.
DE ALGEBRA AD TRIGONOMETRIAM PLANAM APPLICATA.

PROBLEMA 146.

316. D*Atis basi* HI *trianguli cujuscunque & angulis ad basin* H & I, *invenire altitudinem.*

Tab. II. Fig. 21. n. 1. Sit HI $=a$, LM $=x$, sinus anguli MIL $=s$, ejus Cosinus $=c$; sinus anguli LHM $=p$, ejus Cosinus $=q$. Erit (§. 33 *Trigon.*) $s:x=c$: MI & $p:x=q$: HM. Unde reperitur MI $=cx:s$ & HM $=qx:p$ (§. 302 *Arithm.*). Quare (§. 87 *Arithm.*).

$$cx:s+qx:p=a$$
$$\overline{\hphantom{pcx+sqx=asp}}\; sp$$
$$pcx+sqx=asp$$
$$\overline{\hphantom{pcx+sqx=asp}}\; pc+sq$$
$$x=asp:(pc+sq)$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$pc+sq:sp=a:x$$

resoluta sequens exhibet

Theorema. In omni triangulo HIL basis HI est ad altitudinem ML ut summa rectangulorum ex sinu anguli obliqui ad basin unius in Cosinum alterius se habet ad rectangulum ex sinibus angulorum ad basin.

Aliter.

Sumatur ML pro sinu toto, erunt HM & MI tangentes angulorum HLM & MLI, seu cotangentes datorum H & I. Sint sinus totus $=t$, Cotangentes $=m$ & n, LM $=x$, HI $=a$; erit $t:m=x$: HM & $t:n=x$: MI (§. 40 *Trigon.*), consequenter HM $=mx:t$, MI $=nx:t$, adeoque (§. 87 *Arithm.*).

$$a=(mx+nx):t$$
$$\overline{\hphantom{at=mx+nx}}\; t$$
$$at=mx+nx$$
$$\overline{\hphantom{at=mx+nx}}\; m+n$$
$$at:(m+n)=x.$$

The-

Theorema. Basis trianguli est ad altitudinem ut summa Cotangentium angulorum ad basin ad sinum totum.

PROBLEMA 147.

Tab. II. Fig. 21. n. 1. 317. *Datis summa crurum* HL + LI *una cum angulis ad basin* H & I, *invenire crura* HL & LI.

Sit HL + LI $= a$, sinus H $= m$, sinus I $= n$, HL $= x$, erit IL $= a - x$. Quare (§. 33 *Trigon.*).

$$x : n = a - x : m$$

$$mx = na - nx$$

$$mx + nx = na$$

$$x = na : (m + n)$$

$$a - x = (ma + na - na) : (m + n)$$
$$= ma : (m + n)$$

Theorema. Summa crurum trianguli HL + LI est ad crus unum HL ut summa sinuum angulorum ad basin H & I ad sinum anguli I cruri isti HL oppositum.

PROBLEMA 148.

Tab. II. Fig. 21. 318. *Datis angulis ad basin* H & I *una cum segmento baseos uno* HM, *invenire segmentum alterum* MI.

Sit HM $= a$, MI $= x$, sinus anguli H $= m$, ejus Cosinus $= n$; sinus anguli I $= p$, ejus Cosinus $= q$. Erit (§. 33 *Trigon.*) $n : a = m :$ ML. Reperitur adeo ML $= am : n$. Porro *vi* §. *cit.* $q : x = p :$ ML. Reperitur itaque ML $= px : q$. Quare (§. 81 *Arithm.*),

$$px : q = am : n \quad nq$$

$$pnx = amq$$

$$x = amq : pn$$

Est adeo $pn : mq = a : x$

Theorema Si ex vertice trianguli L in basin HI perpendiculum demittitur; segmentum unum HM est ad alterum MI ut rectangulum ex sinu anguli segmento MI adjacentis in Cosinum anguli segmento HM adjacentis ad rectangulum ex sinu anguli H in Cosinum anguli I.

PROBLEMA 149.

319. *Data area trianguli rectanguli* ABC *una cum angulo* C, *invenire crura* AB & BC. Tab. I. Fig. 3.

Sit area $= b^2$ BC $= x$
Sinus totus $= r$ erit BA $= 2b^2 : x$ (§. 394 *Geom.*)
Tangens C $= t$
Quare (§. 40 *Trigon.*)

$$x : 2b^2 = r : t \quad x$$

$$x^2 : 2b^2 =$$

$$x^2 = 2rb^2 : t$$

$$x = V(2rb^2 : t)$$

Theorema: Area trianguli rectanguli est ad quadratum cruris unius BC ut tangens dimidia anguli adjacentis C ad sinum totum.

Tab. II. Fig. 32. *Constructio:* Intra crura anguli dati ADM erigatur perpendicularis FE, puncto E pro lubitu assumto, erit $DE = r$ & $FE = t$ (§. 7 *Trigon.*). Fiat $DG = FE$, $DH = b$ & agatur ipsi EG parallela HI: erit $DI = br : t$ (§. 271 *Geom.*). Fiat $MI = 2b$ & quaeratur inter MI & DI media proportionalis IK (§. 327 *Geom.*), quae erit crus unum. Dividatur MI bifariam in L & fiat $IN = LI$, ducaturque NO ipsi MK parallela, erit $IO = 2b^2 : x$ (§. 271 *Geom.*), adeoque crus alterum, consequenter KOI triangulum quaesitum.

Tab. XII. Fig. 117. *Aliter.* Sit EDA angulus datus. Fiat $DA = 2b$ & erigatur AE perpendicularis ad DA: erit simul $DA = r$ & $AE = t$ (§. 7 *Trigon.*). Producatur EA in infinitum & in D erigatur ad ED perpendicularis DG, erit $AG = \frac{2br}{t}$ (§. 327 *Geom.*). Fiat $AH = AG$ & $AI = \frac{1}{2} AD = b$, erit descripto super IH semicirculo $AL = \frac{\sqrt{2b^2r}}{t}$. Fiat denique $AB = AL$ & ducatur BC cruri anguli dati DE parallela; erit triangulum BAC quaesitum.

PROBLEMA 150.

Tab. III. Fig. 33. 320. *Data subtensa arcus* AB *quadrante minoris una cum radio circuli* CE, *invenire subtensam* CB *arcus compositi ex arcu* AB *& ejus complemento dimidio ad semicirculum.*

Applicetur AB diametro CD parallela & fiat $DF = AB$, ducanturque rectae EB, AD & BF. Quoniam $x = o$ (§. 315 *Geom.*), & ob parallelismum linearum AD & BF (§. 257 *Geom.*) $x = y$ (§. 233 *Geom.*); erit $o = y$ (§. 87 *Arithm.*). Est vero etiam ob $CE = EB$ (§. 40 *Geom.*) $u = o$ (§. 184 *Geom.*) $= y$, consequenter $CF : CB = CB : CE$ (§. 267 *Geom.*). Sit jam $AB = a$ $CE = r$, $CB = x$; erit $CF = a + 2r$, consequenter

$$a + 2r : x = x : r$$

$$ar + 2r^2 = x^2$$

$$\sqrt{(ar + 2a^2)} = x$$

COROLLARIUM 1.

321. Cum angulus CBD sit rectus (§. 317 *Geom.*); erit $BD^2 = 4r^2 - ar - 2r^2 = 2r^2 - ar$ (§. 417 *Geom.*), consequenter BD subtensa dimidii complementi ad semicirculum arcus $AB = \sqrt{(2r^2 - ar)}$.

COROLLARIUM 2.

322. Quadratum ergo chordae DB arcum quadrante minorem subtendentis aequatur rectangulo ex radio CE in diffe-

differentiam chordæ diametro parallelæ ex puncto B ductæ AB a diametro CD.

COROLLARIUM. 3.

323. Quadrata chordarum CB & BD, quæ ambæ simul semicirculum subtendunt, sunt inter se ut $2r^2 + ar$ ad $2r^2 - ar$ (§. 319. 320), hoc est, ut $2r +$ a ad $2r - a$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, ut aggregatum ex diametro CD & chorda AB ex puncto concursus B eidem parallela ducta ad differentiam hujus chordæ a diametro.

PROBLEMA 151.

Tab. 324. *Datis in quadrilatero cir-*
II. *culo inscripto lateribus* AE, EB, B
Fig. C *&* AC *una cum diagonali* EC,
34. *invenire diagonalem* AB.

Sit AE $= a$, EB $= b$, BC $= c$, AC $= d$, EC $= f$, AB $= y$. Ducatur EF, ita ut sit $o = x$ (§. 208 *Geom.*). Quoniam præterea ACE = ABE (§. 315 *Geom.*); erit EC : AC = EB : BF, hoc est, $f : d = b :$ BF (§. 267 *Geom.*). Reperitur ergo BF $= bd : f$. Quoniam porro EAB = ECB (§. 315 *Geom.*) & AEF = CEB (§. 88 *Arithm.*); erit EC (f) : CB (c) = EA (a) : AF ($ac : f$) (§. 267 *Geom.*). Quare (§. 86 *Arithm.*)

$$(bd + ac) : f = y$$

$$\overline{}$$

$$bd + ac = fy$$

Theorema. In quadrilatero circulo inscripto AEBC rectangulum ex diagoniis EC & AB æquatur rectangulis ex lateribus oppositis EB in AC & EA in BC.

PROBLEMA 152.

325. *Dato sinu anguli simpli, invenire sinus & Cosinus angulorum multiplorum.*

Sit angulus quicunque A, fiat Tab.
AB = BD = DF = FH = HL = LM III.
= MP = PQ = QT = TV : erit A Fig.
= ADB (§. 184 *Geom.*), EBD = A 35.
+ ADB (§. 239 *Geom.*) = 2A, *per demonstr.* Eodem modo ostenditur, esse FDH = A + DFA = 3A; HFL = A + AHF = 4A; LHK = A + ALH = 5A; PLM = A + AML = 6A &c. Demittantur perpendiculares BC, DE, FG, IH, LK, MN &c. Quodsi AB sumatur pro sinu toto; erit BC sinus, AC Cosinus anguli simpli A; ED sinus, EB Cosinus anguli dupli, FG sinus, DG Cosinus anguli tripli &c. (§. 2. 11. *Trigon.*).

Sit AB $= r$, BC $= b$, AC $= a$; erit ob angulum A utrique △△ BAC & EAD communem & rectos ad C & E æquales (§. 267 *Geom.*):

$$AB : BC = AD : DE$$
$$r : b = 2a : \frac{2ab}{r}$$

$$AB : AC = AD : AE$$
$$r : a = 2a : \frac{2a^2}{r}$$

Ergo $BE = AE - AB = 2a^2 : r - r = (2a^2 - r^2) : r$. Est vero $r^2 = a^2 + b^2$ (§. 417 *Geom.*). Ergo $BE = (2a^2 - a^2 - b^2) : r = (a^2 - b^2) : r$ & $AF = AE + EF = (3a^2 - b^2) : r$.

$$AB : BC = AF : FG \text{ (§. 268 Geo.)}$$
$$r : b = \frac{3a^2 - b^2}{r} : \frac{3a^2 b - b^3}{r^2}$$

$$AB : AC = AF : AG$$
$$r : a = \frac{3a^2 - b^2}{r} : \frac{3a^3 - ab^2}{r^2}$$

Ergo $DG = AG - AD = (3a^3 - ab^2) : r^2 - 2a = (3a^3 - ab^2 - 2ar^2) : r^2 =$ substituto valore ipsius $r^2 (= a^2 + b^2)$, $(a^3 - 3ab^2) : r^2$, consequenter $AH = AG + GH = (4a^3 - 4ab^2) : r^2$.

$$AB : BC = AH : HI$$
$$r : b = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2} : \frac{4a^3 b - 4ab^3}{r^3}$$

$$AB : AC = AH : AI$$
$$r : a = \frac{4a^3 - 4ab^2}{r^2} : \frac{4a^4 - 4a^2 b^2}{r^3}$$

Quia $FA = (3a^2 - b^2) : r = (3a^2 - b^2) r^2 : r^3 = (3a^2 - b^2)(a^2 + b^2) : r^3 = (3a^4 + 2a^2 b^2 + b^4) : r^3$, ideo erit $FI = AI - AF = (a^4 - 6a^2 b^2 + b^4) : r^3$.

Eodem prorsus modo reperitur $KL = (5a^4 b - 10a^2 b^3 + b^5) : r^4$ & $HK = (a^5 - 10a^3 b^2 + 5ab^4) : r^4$; $MN = (6a^5 b - 20a^3 b^3 + 6ab^5) : r^5$ & $LN = (a^6 - 15a^4 b^2 + 15a^2 b^4 - b^6) : r^5$; $PO = (7a^6 b - 35a^4 b^3 + 21a^2 b^5 - b^7) : r^6$ & $QR = (b^7 - 21a^5 b^2 + 35a^3 b^4 - 7ab^6) : r^6$.

Si itaque radius seu sinus totus $= r$, erit sinus anguli

simpli b
dupli $2ab : r$
tripli $(3ba^2 - b^3) : r^2$
quadrupli $(4ba^3 - 4b^3 a) : r^3$
quintupli $(5ba^4 - 10b^3 a^2 + b^5) : r^4$
sextupli $(6ba^5 - 20b^3 a^3 + 6b^5 a) : r^5$
septupli $(7ba^6 - 35b^3 a^4 + 21b^5 a^2 - b^7) : r^6$ &c.

Hinc patet lex progressionis in infinitum. Componitur nimirum formula pro sinu anguli multipli ex termino secundo, quarto, sexto, octavo &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simpli b compositi ad eam dignitatem evecti, cujus exponens idem est cum exponente multipli, signis $+$ & $-$ alternantibus (§. 95).

Hinc

Hinc formula generalis in casu indefinito emergit

$$\frac{mba^{m-1}}{1.r^{m-1}} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.r^{m-1}}b^3a^{m-3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5.r^{m-1}}b^5a^{m-5} - \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.3.4.5.6.r^{m-1}}b^7a^{m-7}$$

Similiter si sinus totus r, erit sinus anguli

simpli $= a$

dupli $(a^2 - b^2):r$

tripli $(a^3 - 3b^2a):r^2$

quadrupli $(a^4 - 6b^2a^2 + b^4):r^3$

quintupli $(a^5 - 10b^2a^3 + 5b^4a):r^4$

sextupli $(a^6 - 15b^2a^4 + 15b^4a^2 - b^6):r^5$

septupli $(a^7 - 21b^2a^5 + 35b^4a^3 - 7b^6a)$ $:r^6$ &c.

Unde denuo patet lex progressionis in infinitum. Nimirum formulæ componuntur ex terminis primo, tertio, quinto, septimo, nono &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simpli b compositi ad eam dignitatem evecti, cujus exponens est idem cum exponente multipli anguli desiderati signis + & — alternantibus (§.95). Erit ergo formula generalis in casu indefinito

$$a^m - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}}b^2a^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4.r^{m-1}}b^4a^{m-4} - \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6r^{m-1}}b^6a^{m-6} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6.m-7}{1.2.3.4.5.6.7.8r^{m-1}}b^8a^{m-8}$$

&c. Quoniam $b^2 = r^2 - a^2$ (§.16 *Trig.*) & ipsius b^2 potentiæ sunt etiam rationales; substituto hoc valore sive in formula generali, sive in specialibus, prodit Cosinus anguli multipli per solum Cosinum simpli & radium determinatus. Ita reperietur Cosinus anguli

dupli $\frac{a^2 - b^2}{r} = \frac{a^2 - r^2 + a^2}{r} = \frac{2a^2}{r} - r$

tripli $\frac{a^3 - 3r^2a + 3a^3}{r^2} = \frac{4a^3}{r^2} - 3a$

quadrupli $\frac{a^4 - 6r^2a^2 + 6a^4 + r^4 - 2a^2r^2 + a^4}{r^3} = \frac{8a^4}{r^3} - \frac{8a^2}{r} + r$

quintupli $\frac{a^5 - 10r^2a^3 + 10a^5 + 5r^4a - 10r^2a^3 + 5a^5}{r^4} = \frac{16a^5}{r^4} - \frac{20a^3}{r^2} + 5a$

Simi-

Similiter ex ſinuum formula excluditur Coſinus, ſi valor ipſius $a = V(r^2 - b^2)$ ſubſtituitur: quamvis ea non ſit ab irrationalitate libera.

COROLLARIUM.

326. Cum ſinus ſit chordæ dimidium (§. 2. *Trigon.*), ſi chorda arcus ſimpli dicatur b & chorda ejus complementi ad quadrantem a, & diameter r; per easdem formulas chordæ arcuum multiplorum determinantur. Quoniam vero data chorda datur etiam arcus; per eaſdem formulas arcus per datum numerum multiplicari poteſt.

PROBLEMA 153.

327. *Data tangente arcus ſimpli, invenire tangentem arcus multipli.*

Cum ſit ut Coſinus $a^m - \frac{m.m-1}{1.2 r^{m-1}} b^2 a^{m-2} +$ &c. ad ſinum $\frac{mba^{m-1}}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.r^{m-1}} b^3 a^{m-3}$ &c. ita radius r ad tangentem (§. 26 *Trigon.*); erit tangens (aſſumtis ad abbreviandum calculum pro coëfficientibus coſinuum A, B, C, D, E, pro coëfficientibus ſinuum P, Q, R, S, T excluſo tamen in diviſoribus r^{m-1}) =

$$\frac{Prba^{m-1} - Qrb^3a^{m-3} + Rrb^5a^{m-5} - Srb^7a^{m-7} \text{ \&c.}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} + Cb^6a^{m-6}}$$

Sit tangens anguli ſimpli t, erit (§. cit. *Trigon.*) $a : b = r : t$, conſequenter $a = br : t$. Quodſi hic valor in locum ipſius a ſubſtituatur, prodit formula tangentis

$$\frac{\frac{Pb^m r^m}{t^{m-1}} - \frac{Qb^m r^{m-2}}{t^{m-3}} + \frac{Rb^m r^{m-4}}{t^{m-5}} - \frac{Sb^m r^{m-6}}{t^{m-7}} \text{ \&c.}}{\frac{b^m r^m}{t^m} - \frac{Ab^m r^{m-2}}{t^{m-2}} + \frac{Bb^m r^{m-4}}{t^{m-4}} - \frac{Cb^m r^{m-6}}{t^{m-6}}}$$

Quodſi ulterius hæc formula dividatur per b^m & multiplicetur per t^m, prodibit tangens indefinita

$$\frac{Pr^m t - Qr^{m-2}t^3 + Rr^{m-4}t^5 - Sr^{m-6}t^7 \text{ \&c.}}{r^m - Ar^{m-2}t^2 + Br^{m-4}t^4 - Cr^{m-6}t^6}$$

Subſtitutis tandem valoribus P, Q, R, S & A, B, C, &c. tangentium formula erit $\left(\frac{m}{1} r^m t - \frac{m.m-1.}{1.2.}\right.$

m—2

$\frac{m-2}{3.} r^{m-2}t^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4.} \frac{m-4}{5.} r^{m-4}t^5 - \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4.} \frac{m-4.m-5.m-6.}{5.6.7.} r^{m-6}t^7$ &c.) : ($r^m -$ $\frac{m.m-1}{1.2} r^{m-2}t^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3}$ $+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.}{1.2.3.4.5.} r^{m-4}t^4$ $\frac{m-5}{6} r^{m-6}t^6$ &c.).

Apparet adeo, si binomium ex radio & tangente $r+t$ ad dignitatem indeterminatam elevetur (§. 95), fractionis, quæ tangentem indefinitam exprimit, denominatorem componi ex terminis imparibus, numeratorem vero ex terminis paribus, sed per radium multiplicatis & utrobique signis + atque – alternantibus.

PROBLEMA 154.

328. *Data secante arcus simpli, invenire secantem multipli.*

Quoniam secans est tertia proportionalis ad Cosinum & radium (§.26 *Trigon.*), erit (§.325) assumtis pro coëfficientibus Cosinus, excluso tamen in divisoribus r^{m-1}, A, B, C, D &c. secans indeterminata:

$$\frac{r^{m+1}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} - Cb^6a^{m-6}\ \&c.}$$

Est vero $r:b = s:t$ (§. cit *Trig.*): unde eruitur $r = bs:t$. Hoc valore in formula secantis substituto, mutatur ea in sequentem:

$$\frac{rb^m s^m}{a^m t^m - Ab^2a^{m-2}t^m + Bb^4a^{m-4}t^m\ \&c.}$$

Porro $a:b = r:t$ (§.*cit. Trigon.*), adeoque $a = br:t$. Substituto itaque valore ipsius a in formula proxime præcedente; prodibit

$$\frac{rb^m s^m}{b^m r^m - Ab^m r^{m-2}t^2 + Bb^m r^{m-4}t^4\ \&c.}$$

Si tandem hæc formula dividatur per b^m, determinabitur valor secantis indefinitæ ex tangente & secante anguli simpli

$$\frac{s^m}{r^{m-1} - Ar^{m-3}t^2 + Br^{m-5}t^4 + Cr^{m-7}t^6}$$

CAP. V. DE EXTRACTIONE RADICUM EX ÆQUATIONIBUS ALTIORIBUS.

PROBLEMA 155.

329. *Explicare naturam æquationum.*

1. Aſſumantur tot valores quantitatis incognitæ, quot libuerit, formenturque inde ſimplices æquationes, ſed nihilo æquales.

2. Æquationes ſimplices in ſe invicem ducantur; ita prodibunt æquationes altiores, quarum conſideratio earum proprietates manifeſtabit.

Sit $x=2$ $\quad x=a$
$x=-3$ $\quad x=-b$
$x=4$ $\quad x=c$
erit $x-2=0$. I $\quad x-a=0$
$x+3=0$. II $\quad x+b=0$
$x-4=0$. III $\quad x-c=0$

Multiplicetur primo æquatio I per æquationem II & factum denuo per æquationem III.

$$\begin{array}{ll} x-2=0 & x-a=0 \\ x+3=0 & x+b=0 \\ \hline +3x-6 & x^2+bx-ab=0 \\ x^2-2x & -ax \\ \hline x^2+x-6=0 & x-c=0 \\ x-4=0 & \\ \hline & -x^3-cx^2-bcx+abc=0 \\ -4x^2-4x+24 & +bx^2-acx \\ x^3+x^2-6x & -ax^2-abx \\ \hline x^3-3x^2-10x+24=0 & \end{array}$$

Ad has æquationes attendens (quæ facile ad ſuperiores gradus evehi poſſunt) ſequentia obſervabit:

1. *Quantitatem cognitam ſecundi termini eſſe ſummam radicum, ſed ſigno contrario affectarum, quantitatem cognitam tertii eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis; quantitatem cognitam quarti eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis &c. terminum denique ultimum eſſe factum omnium radicum.* E. gr. in æquatione quadratica termini ſecundi quantitas cognita $1=3-2$. Radi-

Radices vero sunt $+2$ & -3. Similiter in cubica quantitas cognita secundi termini $-3 = +3 -4 -2$. Radices sunt -3, $+4$ & $+2$. Quantitas cognita tertii termini in æquatione cubica $-10 = -6 + 8 - 12$. Radices sunt, $+2$, -3 & $+4$. In eadem terminus ultimus $+24 = 2 . 3 . 4$.

2. *Quamlibet æquationem tot habere radices, quot quantitas incognita primi termini dimensiones, seu exponens unitates.* E. gr. in æquatione quadratica x^2 duas habet dimensiones; radices duæ sunt $+2$ & -3. In æquatione cubica x^3 tres habet dimensiones, radices tres sunt $+2$, -3 & $+4$.

3. *In qualibet æquatione tot esse radices veras, quot sunt signorum permutationes; tot esse falsas, quot eorundem successiones.* E. gr. in æquatione quadratica $x^2 + x - 6 = 0$, una est signorum successio $+ +$, una permutatio $+ -$. Æquatio vero habet radices duas, alteram veram $+2$, alteram falsam -3. In æquatione cubica $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duæ sunt signorum permutationes $+ -$ & $- +$; una successio $- -$. Radices vero tres habet, duas quidem veras $+2$ & $+4$, unam falsam -3.

SCHOLION 1.

330. *Theoremata duo priora ex ipsa æquationum genesi haud difficulter demonstrantur: tertium vero, quod* Harriotus *per inductionem invenit, nemo hactenus demonstrare potuit.*

SCHOLION 2.

331. *Ceterum non est, quod miremur, unam æquationem multas habere posse radices. Unius enim ejusdemque problematis varii esse possunt casus & in singulis casibus ad eandem pervenitur æquationem: quemadmodum exempla in Quadraticis supra habuimus (§. 169. 162). Quoniam tamen casus quidam interdum impossibiles sunt; radices quoque impossibiles esse debent.*

COROLLARIUM.

332. Radices veræ mutantur in falsas & falsæ in veras, si signa terminorum alternorum mutentur. E. gr. æquatio $x^3 - 3x^2 + 10x + 24 = 0$ duas habet radices veras, unam falsam; sed si scribas $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$, duæ sunt signorum successiones $+ +$ & $- -$; una vero permutatio $+ -$ adeoque æquatio duas radices falsas, veram unam habet.

PROBLEMA 156.

333. *Radicem æquationis augere vel minuere quantitate data.*

Sit æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Invenienda est æquatio alia, in qua radix $x + 3$.

Fiat $x + 3 = y$

erit $x = y - 3$

$x^2 = y^2 - 6y + 9$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ -6x^2 &= -6y^2 + 36y - 54 \\ +13x &= +13y - 39 \\ -10 &= -10 \end{aligned}$$

$y^3 - 15y^2 + 76y - 130 = 0.$

En æquationem novam, in qua $y = x + 3$!

Sit e contrario in æquatione modo inventa radix minuenda binario.

Fiat $y - 2 = x$

erit $y = x + 2$

$y^2 = x^2 + 4x + 4$

$$\begin{aligned} y^3 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \\ -15y^2 &= -15x^2 - 60x - 60 \\ +76y &= +76x + 152 \\ -130 &= -130 \end{aligned}$$

$x^3 - 9x^2 + 28x - 30 = 0.$

En æquationem novam, in qua $x = y - 2$!

COROLLARIUM 1.

334. Quodsi radicem augeas quantitate radice falsa maxima majore; radices falsæ evadunt veræ, & contra si radicem minuas quantitate radice vera maxima majore, veræ evadunt falsæ. Si enim $y = -4$ & fiat $y + 5 = x$; erit $x = 5 - 4 = 1$. Contra si $y = 3$ & fiat $y - 4 = x$; erit $3 - 4 = -1 = x$. Dum itaque radicem minuimus quantitate quadam data, facile accidit ut radices veræ in falsas mutentur.

COROLLARIUM 2.

335. Dum radices veræ augentur, falsæ minuuntur. Nam si $y = 3$ & $= -5$, fiatque $y + 4 = x$; erit $x = 3 + 4 = 7$ & $y = 4 - 5 = -1$. Similiter si fiat $y - 2 = x$; erit $x = 3 - 2 = 1$ & $y = -5 - 2 = -7$.

PROBLEMA 157.

336. *Radicem æquationis per quantitatem datam multiplicare.*

Sit e. gr. radix æquationis $x^3 + px^2 + qx - r = 0$ multiplicanda per a.

Fiat $ax = y$

erit $x = y : a$

$x^2 = y^2 : a^2$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 : a^3 \\ +px^2 &= +py^2 : a^2 \\ +qx &= +qy : a \\ -r &= -r \end{aligned}$$

$$\frac{y^3}{a^3} + \frac{py^2}{a^2} + \frac{qy}{a} - r = 0. \quad \cdot a^3$$

$y^3 + apy^2 + a^2qy - a^3r = 0$

En

En æquationem novam, in qua
$y = ax$.

COROLLARIUM I.

337. Hinc manifestum est, æquationem datam tantum multiplicari debere per progressionem geometricam, in qua terminus primus 1, denominator rationis quantitas, per quam radix multiplicari jubetur. Sit e. gr. in æquatione $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ radix multiplicanda per 2. Ita ergo procedendum.

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$
$$y^4 + 8y^3 - 76y^2 - 848y - 1920 = 0$$

En æquationem, in qua $y = 2x$.

Similiter sit radix æquationis $x^3 - 3x + 1 = 0$ multiplicanda per 3.

$$x^3 * - 3x + 1 = 0$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$
$$y^3 * - 27x + 27 = 0$$

En æquationem, in qua $y = 3x$.

SCHOLION.

338 *Stellulæ repleri solent loca vacua, in quibus termini æquationis deficiunt.*

PROBLEMA 158.

339. *Radicem æquationis per quantitatem datam dividere.*

Sit æquationis $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ radix dividenda per a.

Fiat $x : a = y$

erit
$$x = ay$$
$$x^2 = a^2y^2$$
$$x^3 = a^3y^3$$
$$-px^2 = -a^2py^2$$
$$+qx = +aqy$$
$$-r = -r$$
$$a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0 \quad a^3$$
$$y^3 - \frac{py^2}{a} + \frac{qy}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$$

En æquationem novam, in qua
$y = x : a$.

COROLLARIUM.

340. Apparet adeo, non alia re opus esse, quam ut æquatio data dividatur per progressionem geometricam, cujus terminus primus 1, denominator rationis quantitas, per quam radix dividenda. Sit e. gr. radix æquationis $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ dividenda per 2. Ita igitur procedendum:

$$x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$
$$y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{2}x$.

Similiter si radix æquationis $x^3 * - 36x - 54 = 0$ dividatur per 3; erit

$$x^3 \; * \; -36x - 54 = 0$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$
$$y^3 \; * \; - 4y - 2 = 0.$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{3}x$.

PROBLEMA 159.

341. *Complere æquationem, in qua termini quidam deficiunt.*

Radix æquationis augenda est quantitate data.

Sit e. gr. æquatio $x^3 \; * \; -23x - 70 = 0$.

Fiat $x + 1 = y$

erit $x = y - 1$

$$x^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ -23x &= \qquad -23y + 23 \\ -70 &= \qquad\qquad -70 \end{aligned}$$

$$y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0.$$

Habetur hic æquatio completa, in qua $y = x + 1$.

SCHOLION.

342. *Idem problema solvi potest radicem æquationis quantitate data minuendo: sed cum hac ratione metuendum sit, ne radices veræ in falsas mutentur (§. 333), consultius est, ut radicem æquationis augeamus.*

PROBLEMA 160.

343. *Secundum terminum ex æquatione tollere.*

Sit in æquatione $x^3 \mp px^2 - qx + r = 0$ tollendus secundus terminus px^2.

Fiat $t + x = y$

erit $x = y - t$

$$x^2 = y^2 - 2ty + t^2$$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 3ty^2 + 3t^2y - t^3 \\ \mp px^2 &= \mp py^2 \pm 2pty \mp pt^2 \\ -qx &= \qquad -qy + qt \\ +r &= \qquad\qquad +r \end{aligned}$$

Ut secundus terminus tollatur, fieri debet

$$-3t - p = 0$$

Unde erit $-3t = p$

$$-3$$

$$t = -\tfrac{1}{3}p$$

Quodsi fuerit $+px^2$, erit

$$-3t + p = 0$$

$$-3t = -p$$

$$-3$$

$$t = +\tfrac{1}{3}p$$

Et in genere, si fuerit $x^m \mp px^{m-1}$ &c. & fiat $x = y - t$, erit

$x^m \mp$

$x^m = y^m - mty^{m-1}$ &c.
$\mp px^{m-1} = \mp py^{m-1}$ &c.
consequenter in casu primo
$-mt - p = 0$

$-mt = -p$

$t = p : m$
in casu autem altero
$-mt + p = 0$

$-mt = -p$

$t = -p : m$
Unde patet

Regula: Si terminus secundus sit positivus, augeatur; si privativus, minuatur radix quantitate cognita secundi termini per exponentem primi divisa.

Sit e. gr. ex æquatione $x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$ tollendus medius terminus.

Fiat $x - 8:3 = y$

erit $x = y + 8:3$
$x^2 = y^2 + 16y:3 + 64:9$

$$x^3 = y^3 + 8y^2 + 64y:3 + 512:27$$
$$-8x^2 = -8y^2 - 128y:3 - 512:9$$
$$-x = -y - 8:3$$
$$+8 = +8$$

$$y^3 * - 67y:3 - 880:27 = 0$$

In hac æquatione $y = x - 8:3$

COROLLARIUM 1.

344. Quodsi ex æquatione quadratica affecta secundus terminus aufertur, ad puram reducitur, sicque ea alio adhuc modo resolvi potest. Sit e. gr. $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Fiat $x - 4 = y$

erit $x = y + 4$

$$x^2 = y^2 + 8y + 16$$
$$-8x = -8y - 32$$
$$+15 = +15$$

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y = 1$$

Consequenter $x = 1 + 4 = 5$.

COROLLARIUM 2.

345. Secundo termino sublato, æquationes cubicæ ad tres casus reducuntur. Nimirum

$$x^3 * - px - r = 0$$
$$x^3 * + px - r = 0$$
$$x^3 * - px + r = 0$$

PROBLEMA 161.

346. *Ex æquatione terminum tertium tollere.*

Si in æquatione $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$

Fiat $x = y - m$

erit $x^2 = y^2 - 2my + m^2$

$x^3 =$

$$x^3 = y^3 - 3my^2 + 3m^2y + m^3$$
$$-4x^2 = -4y^2 + 8my - 4m^2$$
$$+4x = \quad + 4y - 4m$$
$$-6 = \quad -6$$

Quoniam æquatio ſiniſtra dextræ æqualis; ſi tertius terminus deficere debet, talis aſſumendus eſt valor ipſius m, ut ſit

$$3m^2 + 8m + 4 = 0$$

erit ergo $m^2 + \frac{8}{3}m = -\frac{4}{3}$
$$\frac{16}{9} \quad \frac{16}{9}$$

$$m^2 + \frac{8}{3}m + \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$$

$$m + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

Fiat ergo $x = y + \frac{2}{3}$

erit $x^2 = y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{8}{27}$$
$$-4x^2 = -4y^2 - \frac{16}{3}y - \frac{16}{9}$$
$$+4x = \quad +4y + \frac{8}{3}$$
$$-6 = \quad -6$$

$$y^3 - 2y^2 * - 130 : 27 = 0$$

En æquationem, in qua terminus tertius deficit, & $y = x - \frac{2}{3}$.

SCHOLION.

347. *Eodem artificio in aliis quoque caſibus utemur. Sed terminus quartus, quintus &c. hac methodo tolli nequeunt, quia radices altiores extrahendæ forent.*

PROBLEMA 162.

348. *Ex æquatione terminum penultimum tollere, ſi ſecundus deficiat.*

Pro quantitate incognita ſubſtituendus eſt terminus ultimus per y diviſus.

Sit e. gr. in æquatione $x^3 - 3x + 1 = 0$ tollendus terminus antepenultimus $-3x$. Operatio talis erit

$$x^3 = \frac{1}{y^3}$$

$$-3x = \frac{3}{y}$$

$$+1 = +1$$

$$\frac{1}{y^3} - \frac{3}{y} + 1 = 0 \quad \Big| \, y^3$$

$$y^3 - 3y^2 + 1 = 0$$

PROBLEMA 163.

349. *Æquationem datam a fractionibus liberare.*

Radix multiplicetur per factum ex omnibus denominatoribus fractionum occurrentium, aut per nume-

numerum, qui omnes denominatores metitur.

Exempla.

$$y^3 * - \tfrac{67}{3}y - \tfrac{880}{27} = 0$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$

$$x^3 * - 201x - 880 = 0$$

In hac æquatione $x = 3y$.

$$x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{3}{4}x - 64 = 0$$
$$1 \quad 12 \quad 144 \quad 1728$$
$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$$

In hac æquatione $y = 12x$.

PROBLEMA 164.

350. *Æquationem datam ab irrationalitate liberare.*

Interdum id fieri poteſt per multiplicationem; interdum per diviſionem radicis. Neutra tamen regula univerſalis eſt.

Si radix fuerit quadrata, quæ tolli debet, radix æquationis multiplicatur per ipſam; ſi vero cubica aut altior quædam, per radicem cubicam ex quadrato quantitatis ſub ſigno radicali tollendæ poſitæ, aut in genere per radicem ejusdem gradus, quæ tolli debet, ſed ex quantitate ſub ſigno radicali tollendæ poſita ad gradum proxime inferiorem elevata. Interdum circumſtantiæ ſingulares aliud ſuadent.

(Wolffii Math. Tom. I.)

Exempla.

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4$$

$$y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0.$$

In hac æquatione $y = x\sqrt{2}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - aab = 0$$
$$1 \quad 4^{1:3} \quad 16^{1:3} \quad 4$$

$$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4a^2b = 0$$

In hac æquatione $y = x\sqrt[3]{4}$

Diviſio exemplis rectius, quam regulis docetur.

$$x^3 - 3x^2\sqrt{3} * - 6\sqrt{3} = 0$$
$$1. \quad \sqrt{3}\,.\ 3.\ \ 3\sqrt{3}$$

$$y^3 - 3y^2 * - 2 = 0$$

In hac æquatione $y = x : \sqrt{3}$

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2$$

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \tfrac{1}{2}a^2b = 0$$

In hac æquatione $y = x : \sqrt[3]{2}$.

$$x^3 - x^2\sqrt{2} + 3\tfrac{1}{2}x - 3\sqrt{2} = 0$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 2\sqrt{2}$$

$$y^3 - y^2 + \tfrac{7}{4}y - \tfrac{3}{2} = 0$$

Quodsi ulterius fractiones tollere volueris; multiplicatio fieri debet per 2.

$$y^3 - y^2 + \tfrac{7}{4}y - \tfrac{3}{2} = 0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8$$

$$z^3 - 2z^2 + 7z - 12 = 0$$

In hac æquatione $z = 2y = 2x : \sqrt{2}$.

PROBLEMA 165.

351. *Invenire, utrum æquatio data habeat radices rationales, nec ne, &, si quas habet, quænam eæ sint.*

Cum æquationis terminus ultimus sit factum omnium radicum (§. 329), resolvatur is in suos factores & hi successive substituantur pro x in æquatione data: in quibus enim casibus numeri positivi & negativi se mutuo destruunt, in iis substitutus est valor ipsius x.

Sit e. gr. $x^2 - 6x + 8 = 0$. Terminus ultimus 8 factores habet 2 & 4. Ponatur $x = 2$; erit

$$x^2 = 4$$
$$-6x = -12$$
$$+8 = +8$$
$$0 = 0$$

Est ergo 2 radix vera æquationis. Fiat quoque $4 = x$; erit

$$x^2 = 16$$
$$-6x = -24$$
$$+8 = +8$$
$$0 = 0$$

Est ergo 4 radix altera vera æquationis

Sit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Factores termini ultimi 15 sunt 1, 3, 5.

Substituatur 1 pro x; erit

$$x = 1$$
$$-3x^2 = -3$$
$$-13x = -13$$
$$+15 = +15$$
$$0 = 0$$

Est ergo 1 una ex radicibus veris.

Substituatur porro 3 pro x; erit

$$x^3 = 27$$
$$-3x^2 = -27$$
$$-13x = -39$$
$$+15 = +15$$
$$0 = -24$$

Est ergo 3 nulla ex radicibus veris.

Substituatur ergo -3 pro x.

$$x^3 = -27$$
$$-3x^2 = -27$$
$$-13x = +39$$
$$+15 = +15$$
$$0 = 0$$

Est itaque -3 radix falsa æquationis,

Sub-

Substituatur denique 5 pro x; erit

$$x^3 = 125$$
$$-3x^2 = -75$$
$$-13x = -65$$
$$+15 = +15$$

Est ergo 5 radicum verarum altera.

Aliter.

Cum æquationes compositæ ex multiplicatione simplicium oriantur (§.329); si radix aliqua fuerit rationalis, æquatio per simplicem ex aliquo factore termini ultimi & x conflatam divisibilis sit necesse est. Quare divisio hæc tentanda.

Sit data æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. Factores termini ultimi sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12: unde æquationes simplices conflantur $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x + 4 = 0$, $x - 6 = 0$, $x + 6 = 0$, $x - 8 = 0$, $x + 8 = 0$, $x - 12 = 0$, $x + 12 = 0$. Divisio frustra tentatur per $x - 1$ & $x + 1$. Quare 1 nec radix falsa est, nec verarum una; succedit autem divisio per $x - 2$.

$$x - 2)\; x^3 - 3x^2 - 10x + 24\; (x^2 - x - 12$$
$$x^3 - 2x^2$$
$$\overline{-x^2 - 10x}$$
$$-x^2 + 2x$$
$$\overline{-12x + 24}$$
$$-12x + 24$$
$$\overline{\quad 0 \quad}$$

Est adeo 2 una ex radicibus veris, cumque terminus ultimus sit 12 in quotiente, 8 & 12 non sunt in numero radicum. Divisio æquationis quadraticæ $x^2 - x + 12 = 0$ per $x - 3$ frustra tentatur: sed per $x + 3$ succedit.

$$x + 3)\; x^2 - x - 12\; (x - 4$$
$$x^2 + 3x$$
$$\overline{-4x - 12}$$
$$-4x - 12$$
$$\overline{\quad 0 \quad}$$

Est ergo 3 radix falsa æquationis &, ob $x - 4 = 0$, 4 verarum altera.

Similiter sit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$: erunt factores termini ultimi 1, 3, 5, consequenter divisores tentandi $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 5 = 0$. Tentetur divisio per $x - 1$.

$$x - 1)\; x^3 - 3x^2 - 13x + 15\; (x^2 - 2x - 15$$
$$x^3 - x^2$$
$$\overline{-2x^2 - 13x}$$
$$-2x^2 + 2x$$
$$\overline{-15x + 15}$$
$$-15x + 15$$
$$\overline{\quad 0 \quad}$$

Est ergo 1 radicum verarum una. Divisio in æquatione quadratica per $x - 3$ non succedit: succedit tamen per $x + 3$.

$$x+3)\ x^2-2x-15\ (x-5$$
$$x^2+3x$$
$$-5x-15$$
$$-5x-15$$
$$0$$

Est itaque 3 radix falsa, & ob $x-5=0$, 5 verarum altera.

COROLLARIUM.

352. Ex modo allatis exemplis manifestum est, problema præsens hanc quoque admittere solutionem:

1. Numerus, quem radicem esse suspicamur, subducendus est ex coëfficiente secundi termini.
2. Residuum multiplicandum est per illum ipsum numerum & factum ex coëfficiente termini tertii subtrahendum.
3. Quod relinquitur, denuo per illum numerum multiplicetur; factum ex coëfficiente termini tertii subtrahatur & ita porro.

$$x^3-3x^2-10x+24=0$$
$$-2\quad +2\quad +24$$
$$-1\quad -12\quad 0$$
$$-2\text{———}\quad \text{———}(-2$$
$$+2\quad +24$$

Quoniam 0 relinquitur, 2 est una radicum verarum.

$$x^3-3x^2-13x+15=0$$
$$-1\quad +2\quad +15$$
$$-2\quad -15\quad 0$$
$$-1\text{———}\quad \text{———}-1$$
$$+2\quad +15$$

Est ergo 1 altera radicum verarum.

SCHOLION.

353. *Ne radicum rationalium investigatio molesta accidat, consultum est, ut vel æquationem propositam in aliam transformemus, in qua terminus ultimus divisores pauciores habet, vel duos numeros investigemus, intra quos radices continentur: quem in finem sequentia subnectimus problemata.*

PROBLEMA 166.

354. *Æquationem propositam, in qua terminus ultimus plures admittit divisores, transformare in aliam, in qua terminus ultimus pauciores divisores habet.*

Fiat $x=1$, vel $x=-1$, vel $x=2$, vel $x=-2$, vel $x=3$, vel $x=-3$, vel $x=4$, vel $x=-4$ &c. &, his valoribus successive substitutis, observetur, quo in casu summa relinquat numerum pauciores factores habentem, quam terminus ultimus æquationis: eo enim numero radix æquationis vel augenda est, vel minuenda (§. 332).

Sit e. gr. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$.

Fiat $x = 1$

erit $x^3 = 1$

$-3x^2 = -3$

$-10x = -10$

$+24 = +24$

Summa $= +12$

Cum 12 pauciores divisores admittat quam 24;

Fiat $x = y + 1$

erit $x^2 = y^2 + 2y + 1$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ -3x^2 &= \quad -3y^2 - 6y - 3 \\ -10x &= \quad\quad -10y - 10 \\ +24 &= \quad\quad\quad +24 \\ \hline & y^3 \; * - 13y + 12 = 0 \end{aligned}$$

In hac æquatione est $y = x - 1$.

SCHOLION.

355. *Eadem æquatio $y^3 * - 13y + 12 = 0$ habet radicem falsam -4. Si enim hunc valorem pro y substituas, prodibit $-64 + 52 + 12 = 0$. Ergo $x = y + 1 = -3$. Reperitur adeo radix falsa æquationis propositæ $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ prorsus ut supra (§. 350).*

PROBLEMA 167.

356. *Invenire limites æquationis, hoc est, duas quantitates, intra quas radix continetur.*

Sit $x^2 + px - q = 0$

erit $x^2 + px = q$

$px < q$ (§. 84 *Arithm.*).

$x < q:p$ (§. 182 *Arithm.*).

Similiter ob $x^2 + px = q$

$q > x^2$ (§. 84 *Arithm.*).

$\sqrt{q} > x$ (§. 246. 180

———— x *Arithm.*).

$x\sqrt{q} > x^2$ (§. 180 *Arithm.*).

$px \quad px$ add.

$x\sqrt{q} + px > x^2 + px$ (§. 90 *Arithm.*)

adeoque $(\sqrt{q} + p)x > q$ (§. 89 *Arith.*)

$x > q:(\sqrt{q} + p)$ (§. 182 *Arithm.*).

Sunt adeo limites æquationis $q:p$ & $q:(\sqrt{q} + p)$. Nempe radix minor esse debet quam $q:p$ & major quam $q:(\sqrt{q} + p)$.

Sit $x^2 - px + q = 0$

erit $x^2 + q = px$

$x^2 < px$

$x < p$

Similiter quia $x^2 = px - q$, adeoque differentia inter px & q positiva, erit

$$px > q$$

$$x > q:p$$

Sunt adeo limites æquationis p & $q:p$. Nempe radix minor est quam p & major quam $q:p$.

Sit $x^2 - px - q = 0$

erit $x^2 = px + q$

$$x^2 > q$$

$$x > \sqrt{q}$$

$$x\sqrt{q} > q$$

Ergo $px + x\sqrt{q} > px + q$
hoc est, $px + q < px + x\sqrt{q}$
adeoque $x^2 < px + x\sqrt{q}$

$$x < p + \sqrt{q}$$

Similiter $x^2 > px$

$$x > p$$

$$px > p^2$$

$$px + q > p^2 + q$$
$$x^2 > p^2 + q$$

$$x > \sqrt{(p^2+q)}$$

Sunt adeo limites $p + \sqrt{q}$ & $\sqrt{(p^2+q)}$. Nimirum radix minor esse debet quam $p + q$; sed major, quam $\sqrt{(p^2+q)}$.

Sit $x^3 - qx + r = 0$

erit $x^3 + r = qx$

Ergo $qx > r$

$$x > r:q$$

Similiter $x^3 < qx$

$$x^2 < q$$

$$x < \sqrt{q}$$

Sunt adeo limites $r:q$ & $\sqrt{q}$.

Sit $x^3 + qx - r = 0$

erit $x^3 + qx = r$

$$qx < r$$

$$x < r:q$$

Similiter $r > x^3$

$$r^{1:3} > x$$

$$\sqrt[3]{r^2} > x^2$$

$$xr^{2:3} > x^3$$

$xr^{2:3}$

$$xr^{2:3}+qx > x^3+qx$$
$$> r$$

$$x > r:(r^{2:3}+q)$$

Sunt adeo limites $r:q$, & $r:(r^{2:3}+q)$,

Sit $x^3-px^2+qx-r=0$

erit $x^3-px^2=r-qx$

Quodsi ergo x $> p$, erit quoque $r > qx$, consequenter $x < r:q$. Sed si $p > x$; erit $qx > r$, consequenter x $> r:q$.

In utroque igitur casu limites sunt p & $r:q$

Sit $x^3-px^2-qx+r=0$

erit $x^3+r=px^2+qx$

$$px^2+qx > r$$

$$x^2+qx:p > r:p$$
$$x^2+qx:p+q^2:4p^2 > r:p+q^2:4p^2$$

$$x+q:2p > \sqrt{}(r:p+q^2:4p^2)$$

$$x > \sqrt{}(r:p+q^2:4p^2)-q:2p.$$

Similiter $px^2+qx > x^3$

$$px+q > x^2$$

$$q > x^2-px$$

$$q+\tfrac{1}{4}p^2 > x^2-px+\tfrac{1}{4}p^2$$

$$\sqrt{}(q+\tfrac{1}{4}p^2) > x-\tfrac{1}{2}p$$

$$x < \sqrt{}(q+\tfrac{1}{4}p^2)+\tfrac{1}{2}p$$

Sunt adeo limites $\sqrt{}(r:p+q^2:4p^2)-q:2p$ & $\sqrt{}(q+\frac{1}{4}p^2)+\frac{1}{2}p$.

Sit $x^4-qx^2-rx-s=0$

erit $x^4-qx^2=rx+s$

Ergo $x^4 > qx^2$

$$x^2 > q$$
$$x > \sqrt{}q$$

Similiter $x^4-rx=qx^2+s$

ergo $x^3 > r$

$$x > r^{1:3}$$

Tandem $x^4-s=qx^2+rx$

$$x^4 > s$$
$$x > s^{1:4}$$

$$x^3 > s^{3:4}$$
$$x^3s^{1:4} > s$$

Similiter $x > q^{1:2}$ $\quad$ $x > r^{1:3}$

$xq^{1:2} > q$ $\quad$ $x^2 > r^{2:3}$

$x^3q^{1:2}$

$x^3 q^{1:2} > qx^2 \qquad x^2 r^{1:3} > r$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x^3 r^{1:3} > rx$

Ergo ob $x^4 = qx^2 + rx + s$

$x^4 > x^3 q^{1:2} + x^3 r^{1:3} + x^3 s^{1:4}$

$x > q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$

Sunt adeo limites $\sqrt{q}$ vel $r^{1:3}$ & $q^{1:2} + r^{1:3} + s^{1:4}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

SCHOLION.

357. *In aequatione* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *factores termini ultimi sunt* 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. *Limites reperiuntur* $\sqrt{\frac{24}{3} + \frac{25}{9}}) - \frac{5}{3} = \sqrt{\frac{97}{9}} - \frac{5}{3} = \frac{98 - 50}{30} = \frac{38}{30}$ $= 1\frac{1}{4}$ *fere &* $\sqrt{(10 + \frac{9}{4})} + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{49}{4}} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$. *Maxima igitur radicum non potest esse minor quam* $1\frac{1}{4}$ *debet tamen esse minor quam* 5. *Unde apparet divisionem tentandam esse per* $x - 2$. *Quo facto reperitur* $x = 2$ *& aequatio reducitur ad quadraticam* $x^2 - x - 12 = 0$ (§. 351). *Unde radix vera altera* $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37}$ (§. 143) *& radix falsa* $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37}$.

PROBLEMA 168.

358. *Ex aequatione cubica radicem extrahere.*

Aequationes cubicae, sublato secundo termino, ad hos tres casus reducantur (§. 345)

$x^3 = +px + q$

$x^3 = -px + q$

$x^3 = +px - q$

Fiat $x = y + z$

erit $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$

$px = py + pz$

Quamobrem in casu primo

$y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3 = py + pz + q$.

Fiat $3y^2z + 3z^2y = +py + pz$

$\qquad\qquad\qquad\qquad y + z$

erit $3yz = p$

$\qquad\qquad 3y$

$z = p : 3y$

Erit porro $y^3 + z^3 = q$

hoc est $y^3 + p^3 : 27y^3 = q$

$\qquad\qquad\qquad y^3$

$y^6 + \frac{1}{27}p^3 = qy^3$

$y^6 - qy^3 = -\frac{1}{27}p^3$

$\frac{1}{4}q^2 \qquad \frac{1}{4}q^2$

$y^6 - qy^3 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$

$y^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$

$\frac{1}{2}q - y^3 =$

$y^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$

$y = (\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})^{1:3}$

Est

Est nempe $y=\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)})}$ & $z=\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)})}$.

Ergo $y+z=x=\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)})}+\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)})}$.

Eodem modo reperitur radix in casu altero $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}+\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}$.

Denique in casu tertio $x=\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)})}+\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)})}$.

E. gr. Sit $x^3=6x+40$: erit $p=6$, $q=40$, adeoque $\frac{1}{2}q=20$, $\frac{1}{4}q^2=400$, $\frac{1}{3}p=2$, $\frac{1}{27}p^3=8$, consequenter $\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3=392$ & $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)}=\sqrt{392}=\sqrt{2.196}=14\sqrt{2}$. Unde $\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)}=20+14\sqrt{2}$, adeoque $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)})}=2+\sqrt{2}$. Quare per regulam primam $x=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$.

Sit $x^3=-3x+36$. Quia $p=3$, $q=36$, adeoque $\frac{1}{2}q=18$, $\frac{1}{4}q^2=324$, $\frac{1}{3}p=1$, $\frac{1}{27}p^3=1$, consequenter $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3=325=\frac{1300}{4}$ & $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}=10\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{40}{4}\sqrt{3\frac{1}{4}}$. Unde $\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}=18+\frac{40}{4}\sqrt{3\frac{1}{4}}$, adeoque $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)})}=\frac{3}{2}+\sqrt{3\frac{1}{4}}$. Quare per regulam secundam $x=\frac{3}{2}+\sqrt{3\frac{1}{4}}+\frac{3}{2}-\sqrt{3\frac{1}{4}}=3$.

Sit $x^3=6x-40$. Quoniam $p=6$, $q=40$, eodem modo, quo in casu primo, reperitur $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)})}=-2+\sqrt{2}$, adeoque $x=-2+\sqrt{2}-2-\sqrt{2}=-4$.

SCHOLION.

359. *Equidem ex* $20+\sqrt{392}$ *radix cubica extrahitur per regulas communes* (§. 282 Arithm.): *ut tamen appareat, quomodo radix inveniri possit, si regulæ communes commode applicari nequeant, methodum generalem apponere libet, qua & in aliis casibus similibus utendum. Ceterum formulas illas extrahendi radicem ex æquatione cubica* (§. 358) Cardani *regulas vocat* Cartesius (g), *quia eas primus publicavit: ipse enim* Cardanus *inventionis laudem* Scipioni Ferreo *tribuit.*

PROBLEMA 169.

360. *Extrahere radicem desideratam ex quantitate irrationali composita.*

Sit ex binomio $3+\sqrt{8}$ extrahenda radix quadrata. Ponamus eam esse $x+\sqrt{y}$, erit $x^2+2x\sqrt{y}+y=3+\sqrt{8}$.

(g) Geom. lib. 3. p. m. 93 & 94.

Fiat $x^2+y=3$ $\qquad 2x\sqrt{y}=\sqrt{8}$

erit $x^4+2x^2y+y^2=9 \qquad 4x^2y=8$

$$4x^2y=8$$

$$x^4-2x^2y+y^2=1$$

$$x^2-y=1$$

$$x^2=y+1$$

Est vero etiam, ob $x^2+y=3$, $x^2=3-y$

Quare $3-y=y+1$

$$3=2y+1$$

$$2=2y$$

$$1=y$$

Ergo $x^2=y+1$
$=2$

$$x=\sqrt{2}$$

Est ergo $x+\sqrt{y}=\sqrt{(3+\sqrt{8})}=1+\sqrt{2}$.

Sit similiter in problemate praecedente ex $20+\sqrt{392}$ extrahenda radix cubica. Ponamus radicem esse $x+\sqrt{y}$, erit ejus cubus

$$x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+\sqrt{y}^3=20+\sqrt{392}$$

Fiat $3x^2\sqrt{y}+\sqrt{y}^3=\sqrt{392}$

erit $9x^4y+6x^2y^2+y^3=392$

Porro $x^3+3xy=20$

$$x^6+6x^4y+9x^2y^2=400$$

$$9x^4y+6x^2y^2+y^3=392 \text{ subtr.}$$

$$x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3=8$$

$$x^2-y=2$$

$$x^2-2=y$$

Substituto valore ipsius y in aequatione:

$$x^3+3xy=20$$

erit $x^3+3x^3-6x=20$

hoc est $4x^3-6x=20$ $\quad 4$

$$x^3 * -\tfrac{6}{4}x=5$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad (\S. 337).$$

$$z^3 * -6z=40$$

Si pro z substituatur 4; erit $64-24=40$. Est ergo 4 radix hujus aequationis (§. 351), consequenter $x=z:2=2$. Quare cum sit

$$x^2-2=y$$

erit $4-2=y$

$$2=y$$

Est ergo radix cubica ex $20+\sqrt{392}$ extracta $2+\sqrt{2}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

PRO-

PROBLEMA 170.

361. *Æquationem biquadraticam, in qua secundus terminus deficit, reducere ad cubicam.*

Sit æquatio biquadratica $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$, ubi retinetur in omnibus terminis signum $+$, ut omnes casus repræsententur. Cum æquatio biquadratica ex multiplicatione duarum quadraticarum oriatur (§. 329); assumantur duæ quadraticæ $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$, quæ in se invicem ductæ generabunt

$$\begin{aligned} x^4 * + zx^2 + yvx + vz &= 0 \\ + vx^2 - yzx & \\ - y^2x^2 & \end{aligned}$$

Quoniam hæc æquatio eadem supponitur cum proposita; erit

$$z + v - y^2 = q \qquad yv - yz = r \qquad vz = s$$

$$q + y^2 = z + v \qquad v - z = r:y$$

$$q + y^2 - v = z \qquad v - q - y^2 + v = r:y$$

$$2v = q + y^2 + r:y$$

$$v = \frac{q + y^2 + r:y}{2}$$

Substituatur valor ipsius v in æquatione $q + y^2 - v = z$, erit

$$\frac{2q + 2y^2 - q - y^2 - r:y}{2} = z, \text{ hoc est,}$$

$$\frac{q + y^2 - r:y}{2} = z$$

Ergo $vz = \frac{(q + y^2 + r:y)}{2} \frac{(q + y^2 - r:y)}{2} =$

$$\frac{q^2 + 2qy^2 + y^4 - r^2 : y^2}{4} = s$$

$$q^2y^2 + 2qy^4 + y^6 - r^2 = 4sy^2$$

$$\begin{aligned} y^6 + 2qy^4 + q^2y^2 - r^2 &= 0 \\ - 4sy^2 & \end{aligned}$$

Fiat $y^2 = t$, erit

$$\begin{aligned} t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 &= 0. \\ - 4st & \end{aligned}$$

PROBLEMA 171.

362. *Ex æquatione biquadratica radicem extrahere.*

I. Si æquatio fuerit pura, e. gr. $x^4 = a^2bc$: extrahatur primum radix quadrata, ut habeatur $x^2 = a\sqrt{bc}$ & hinc denuo educatur radix quadrata. Reperietur $x = \sqrt{(a\sqrt{bc})}$

E. gr. Sit $x^4 = 32$; erit $x^2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, adeoque $x = 2\sqrt{2}$.

II. Si æquatio fuerit affecta

1. Tollatur secundus terminus, si adfuerit (§. 343).
2. Reducatur æquatio ad cubicam (§. 361).
3. Inde extrahatur radix cubica (§. 358).
4. Hac data ex æquationibus, quarum ope biquadraticam ad cubicam reduximus, radices æquationis propositæ erui possunt.

E. gr. Sit $x^4 - 86x^2 + 600x - 851 = 0$; erit $q = -86$, $r = 600$, $s = -851$. Jam cum æquatio cubica, ad quam ea reducenda, sit $t^3 + 2qt^2 \begin{matrix} + q^2 t \\ - 4st \end{matrix} - r^2 = 0$: si in ea substituantur valores quantitatum q, r, s, prodibit

$$t^3 - 172t^2 + 10800t - 360000 = 0$$

Hæc æquatio cum sit per $t - 100$ divisibilis (§. 351); erit $t = 100$, adeoque in problemate præcedente $y^2 = 100$ & hinc $y = 10$.

Hoc valore substituto in æquatione $\frac{q + y^2 - r:y}{2} = z$; reperitur $z = \frac{-86 + 100 - 600:10}{2} = -\frac{46}{2} = -23$:

Eodem valore ipsius y substituto in æquatione $v = \frac{q + y^2 + r:y}{2}$; invenitur $v = \frac{-86 + 100 + 600:10}{2} = \frac{74}{2} = 37$. Tandem valores quantitatum y, z & v substituendi sunt in æquationibus quadraticis $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$ & habebimus:

I. $x^2 + 10x - 23 = 0$

$$x^2 + 10x = 23$$
$$25 \quad 25$$
$$x^2 + 10x + 25 = 48$$
$$x + 5 = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$
$$x = 4\sqrt{3} - 5$$

II. $x^2 - 10x + 37 = 0$

$$x^2 - 10x = -37$$
$$25 \quad 25$$
$$x^2 - 10x + 25 = -12$$
$$x - 5 = \sqrt{-12} = 2\sqrt{-3}$$
$$5 - x =$$
$$x = 5 \pm 2\sqrt{-3}$$

Sunt

Sunt ergo radices æquationis propositæ $4\sqrt{3}-5$, $5+2\sqrt{-3}$ & $5-2\sqrt{-3}$.

PROBLEMA 172.

363. *Ex æquatione quacunque extrahere radicem per approximationem.*

Quamvis æquationum quadraticarum radices surdæ extrahi possint (§. 143), nec difficile sit inde ulterius radicem prope veram in fractionibus decimalibus elicere (§. 273 *Arithm.*): quoniam tamen methodus, quam nunc explicare intendimus, universalis est, ab exemplo facillimo æquationis quadraticæ ut ordiamur, consultum ducimus

Sit $x^2-5x-31=0$. Quoniam $x < 5+\sqrt{31}$ & $> \sqrt{56}$, sive $x < 10+$ & $> 7+$ (§. 354): ponamus radicem esse $8+y$, ita ut y denotet fractionem, qua numerus assumtus radicem vel excedit, vel ab ea deficit: erit

$$x^2=64+16y+y^2$$
$$-5x=-40-5y$$
$$-31=-31$$

$$-7+11y+y^2=0$$

Quoniam fractionum potentiæ continuo decrescunt & radix tantum desideratur prope vera, y^2 abjicitur: quo facto erit

$$-7+11y=0$$

$$y=\tfrac{7}{11}=\tfrac{6}{10}\text{ fere}=0.6$$

Ergo $x=8+0.6=8.6$

Ponamus $x=8.6+y$: erit

$$x^2=\tfrac{7396}{100}+\tfrac{172}{10}y+y^2$$
$$-5x=-\tfrac{430}{10}-5y$$
$$-31=-31$$

$$\tfrac{7396}{100}-\tfrac{430}{10}-31+\tfrac{172}{10}y-5y=0$$

hoc est, reductione ad eandem denominationem facta, (quod in gratiam tyronum semel hic exhibere placuit)

$$7396-4300-3100+(1720-500)y=0$$

$$-0.04+1220y=0$$

$$1220y=0.04$$

$$y=004:1220=0.0032$$

Ergo $x=8.6000+0.0032=8.6032$.

Ponamus $x=8.6032+y$, erit

$$x^2=7401505024+1720640000\,y+y^2$$
$$-5x=-4301600000-500000000y$$
$$-31=-3100000000$$

$$-0.000094976+1220640000y=0$$

$$y=0.000094976:1220640000$$
$$=0.0000077808.$$

Ergo $x = 8.6032000000 + 0.0000077808 = 8.6032077808$.

Sit similiter ex æquatione cubica $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ extrahenda radix per approximationem. Ponamus denuo radicem esse $5 + y$ (numerus 5 assumitur vi limitum æquationis (§.354)): quoniam termini, in quibus est y^2 & y^3, omittuntur; non opus est, ut in transformatione æquationis exprimantur. Reperitur adeo

$$
\begin{array}{l}
x^3 = 125 + 75y \ldots \\
+2x^2 = 50 + 20y \ldots \\
-23x = 115 - 23y \\
-70 = -70 \\
\hline
-10 + 72y = 0 \\
\hline
y = -\frac{10}{72} = 0.1
\end{array}
$$

Ergo $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Ponamus $x = 5.1 + y$: erit

$$
\begin{array}{l}
x^3 = 132651 + 78030y \ldots \\
+2x^2 = 52020 + 20400y \\
-23x = -117300 - 23000y \\
-70 = -70.000 \\
\hline
-2629 + 75430y = 0 \\
\hline
75430y = 2629 \\
\hline
y = 2629 : 75430 = 0.0349
\end{array}
$$

Ergo $x = 5.1 + 0.0349 = 5.1349$

Eodem modo progredi licet, quousque libuerit.

Nec difficile est eadem methodo regulam generalem investigare. Sit nempe $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + ex^{m-5}$ &c. $+ f = 0$. Ponamus esse $x = t + y$; erit

$$
\begin{array}{l}
x^m = t^m + mt^{m-1}y + \frac{m.m-1}{2}t^{m-2}y^2 \ldots \\
+ax^{m-1} = at^{m-1} + m-1.at^{m-2}y + \frac{m-1.m-2}{2}at^{m-3}y^2 \ldots \\
+bx^{m-2} = bt^{m-2} + m-2.bt^{m-3}y + \frac{m-2.m-3}{2}bt^{m-4}y^2 \ldots \\
+cx^{m-3} = ct^{m-3} + m-3.ct^{m-4}y + \frac{m-3.m-4}{2}ct^{m-5}y^2 \ldots \\
\text{\&c.} \qquad \text{\&c.} \\
+f = +f.
\end{array}
$$

Fiat $t^m + at^{m-1} + bt^{m-2} + ct^{m-3}$ &c. $= p$, $mt^{m-1} + \frac{m-1}{1}at^{m-2} + \frac{m-2}{1}bt^{m-3} + \frac{m-3}{1}ct^{m-4}$ &c. $= q$ & $\frac{m.m-1}{2}t^{m-2} + \frac{m-1.m-2}{2}at^{m-3}$

$+ m-2$

$+\frac{m-2\,m-3}{2}bt^{m-4}+\frac{m-4.m-5}{2}ct^{m-5}$ &c. $=r$. Quoniam termini, in quiqus y ad plures dimensiones ascendit, ob parvitatem abjiciuntur, erit

$$p+qy+ry^2=0$$

Fiat ut in exemplis specialibus

$$p+qy=0$$

erit $qy=-p$

$$y=-p:q$$

In applicatione regulæ hujus generalis eadem calculi instauratione opus est, qua in exemplis specialibus paulo ante usi sumus.

Quodsi vero regula desideretur, quæ celerius appropinquat, ex æquatione prima hunc in modum eruitur.

Quoniam $p+qy+ry^2=0$

erit $qy+ry^2=-p \quad (q+ry)$

$$y=-p:(q+ry)$$

Sed $y=-p:q$, per regulam priorem.

Ergo $y=-p:(q-\frac{pr}{q})=-pq:(q^2-pr)$.

Vel quia $p+qy+ry^2=0$

erit $qy+ry^2=-p \quad (r)$

$$qy:r+y^2=-p:r$$

$$q^2:4r^2+qy:r+y^2=q^2:4r^2-p:r$$

$$q:2r+y=V(\tfrac{1}{4}q^2-pr):r$$

Habetur adeo x, si valor ipsius y adjiciatur valori t, signo vel positivo, vel privativo, prout repertus fuerit.

SCHOLION.

364. *Duas regulas posteriores methodo ab hac diversa investigavit celeberrimus* Hallejus (b), *& eandem aliquot exemplis illustravit. Quamvis vero usus earum ex ante allatis exemplis manifestus esse videatur; non inconsultum tamen judicamus, ut unum apponamus.*

Sit $x^3+\underset{a}{438}x^2-\underset{b}{7825}x-\underset{f}{98508430}=0$. Fiat $x=t+y=300+y$; erit

$x^3=27000000+270000y+900y^2+y^3$
$+ax^2=39420000+262800y+438y^2$
$-bx=-2347500-7825y$
$-f=-98508430$

$$-34435930+524975y+1338y^2=0$$

Est itaque $p=-34435930$, adeoque $-p=34435930$, $q=524975$, $r=1338$. Quare $y=-p:(q-pr:q)=34435930:(524975+46075.74[illegible]:$

524

(b) In Transact. Anglican. n. 210. p. 136.

524975) = 34435930 : 612741 = 56, consequenter $x = 300 + 56 = 356$.

Fiat jam $x = 356 + y$; erit

$x^3 = 45118016 + 380208y + 1068y^2 + y^3$
$+ ax^2 = 55510368 + 311856y + 438y^2$
$- bx = - 2785700 - 7825y$
$- f = - 98508430$

$-665746 + 684239y + 1506y^2 = 0.$

Est itaque $p = -665746$, $q = 684239$, $r = 1506$. Quare $y = -p : (q - pr : q) = 665746 : (684239 + 1002613476 : 684239) = 6657460 : 6857040 = 0.9708$, consequenter $x = 356 + 0.9708 = 356.9708$.

Per regulam irrationalem radix in pluribus notis per duas operationes inveniri potest, quia rationali accuratior. Possunt quoque plures notæ inveniri per rationalem, si operatio continuetur.

COROLLARIUM.

365. Si $x^m - f = 0$ & fiat $x = t + y$; erit $x^m - f = t^m + mt^{m-1}y + \frac{m.m-1}{2}t^{m-2}y^2$ &c. $-f$. Unde si fiat $t^m + mt^{m-1}y - f = 0$, erit $y = f - t^m : mt^{m-1}$.

Quæ est regula per approximationem extrahendi radicem ex quavis æquatione pura. Si accuratior desideretur, fiat ut ante $t^m = p$, $mt^{m-1} = q$, $\frac{m.m-1}{2}t^{m-2} = r$; reperietur ut in problemate $y = -p : (q - pr : q)$. Unde apparet, eandem regulam inservire radicum extractioni tum ex æquationibus puris, tum ex affectis.

PROBLEMA 173.

366. *Ex serie infinita radicem extrahere.*

Sit $v = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$ &c.

Fiat $x = hv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. erit (§. 95).

$$x^2 = h^2v^2 + 2hiv^3 + i^2v^4 + 2ikv^5 + k^2v^6$$
$$+ 2hkv^4 + 2hlv^5 + 2ilv^6$$
$$+ 2hmv^6$$

$$x^3 = h^3v^3 + 3h^2iv^4 + 3hi^2v^5 + i^3v^6 \text{ &c.}$$
$$+ 3h^2kv^5 + 3h^2lv^6$$
$$+ 6hikv^6$$

$$x^4 = h^4v^4 + 4h^3iv^5 + 6h^2i^2v^6$$
$$+ 4h^3kv^6$$

$$x^5 = h^5v^5 + 5h^4iv^6$$

$$x^6 = h^6v^6$$

Substituantur valores modo inventi in æquatione $0 = -u + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. erit

$-u=-v$							
$+ax=$	$+ahv$	$+aiv^2$	$+akv^3$	$+alv^4$	$+amv^5$	$+anv^6$	&c.
$+bx^2=$		$+bh^2..$	$+2bhi..$	$+bi^2..$	$+2bik..$	$+bk^2$	
				$+2bhk..$	$+2bhl..$	$+2bil$	
						$+2bhm..$	
$+cx^3=$			$+ch^3..$	$+3ch^2i..$	$+3chi^2..$	$+lci^3..$	
					$+3ch^2k..$	$+3ch^2l$	
						$+6chik$	
$+dx^4=$				$+dh^4..$	$+4dh^3i..$	$+6dh^2i^2..$	
						$+4dh^3k..$	
$+ex^5=$					$+eh^5..$	$+5eh^4i..$	
$+fx^6=$						$+fh^6..$	

Jam cum æquatio ponatur nihilo æqualis, propterea quod v ſubducitur ex altero æquationis membro ipſi æquali; omnes terminos $v, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6$ &c. in nihilum ductos concipere licet.

Fiat ergo in hac æquatione cujuslibet termini coëfficiens nihilo æqualis, erit

$ah-1=0 \quad ai+bh^2=0$

$h=1:a \quad i=-bh^2:a$

$i=-b:a^3$

$ak+2bhi+ch^3=0$

$k=(-2bhi-ch^3):a$

$k=(+2b^2-ac):a^5$

$al+bi^2+2bhk+3ch^2i+dh^4=0$

$l=(-bi^2-2bhk-3ch^2i-dh^4):a$

conſequenter ob

$bi^2=b^3:a^6 \quad 2bhk=(4b^3-2abc):a^6$

$3ch^2i=-3bc:a^5 \quad dh^4=d:a^4$

$l=-b^3:a^7-4b^3:a^7+2abc:a^7+3bc:a^6-d:a^5$

$l=(5abc-5b^3-a^2d);a^7$

$am+2bik+2bhl+3chi^2+3ch^2k+4dh^3i+eh^5=0$

Ergo ob

$2bik=(-4b^4+2abc):a^8 \quad 3ch^2k=(6b^2c-3ac^2):a^7$

$2bhl=(10ab^2c-10b^4-2a^2bd):a^8 \quad 4dh^3i=-4bd:a^6$

$3chi^2=3b^2c:a^7 \quad eh^5=c:a^5$

$m=(14b^4-21ab^2c+6a^2bd+3a^2c^2-a^3c):a^9$

Eodem modo reperitur $n=(-42b^5+84ab^3c-28a^2bc^2-28a^2b^2d+7a^3cd+7a^3be-a^4f):a^{11}$ & ita porro.

Quodsi tandem in æquatione assumta $x = hv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. valores inventi coëfficientium h, i, k, l, m, n &c. substituantur, prodibit radix quæsita

$$x = \frac{v}{a} - \frac{bv^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 + \frac{5abc - 5b^3 + a^2d}{a^7}v^4 + \frac{14b^4 + 6a^2bd - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}v^5 \text{ \&c. in infinit.}$$

CAP. VI.

DE ALGEBRA AD GEOMETRIAM SUBLIMIOREM APPLICATA.

DEFINITIO 20.

367. PEr *Geometriam sublimiorem* intelligo eam Geometriæ partem, quæ de lineis curvis & solidis inde genitis tractat.

DEFINITIO 21.

368. *Diameter* curvæ est recta AD rectas MM inter se parallelas bifariam secans in P. In specie *Axis* vocatur, si rectas æquidistantes ad angulos rectos secet. Tab. III. Fig. 36.

DEFINITIO 22.

369. *Vertex Curvæ* est punctum A, ex quo ducitur diameter.

DEFINITIO 23.

370. *Ordinatim applicatæ* sunt lineæ æquidistantes MM, quæ a diametro bifariam secantur. Earum dimidiæ PM vocantur *semiordinatæ*. Vocantur etiam *Semiordinatæ* lineæ QM, QM ex punctis curvæ M, M ad lineam AT positione datam ductæ ac inter se parallelæ. Tab. V. Fig. 60.

DEFINITIO 24.

371. *Abscissa* AP est pars diametri vel alterius lineæ, ad quam curvæ refertur inter verticem aut aliud punctum fixum & semiordinatam PM intercepta. Quidam *sagittam* vocant. Tab. III. Fig. 36.

SCHOLION.

372. *Abscissæ nimirum a quovis puncto in linea positione data computari possunt,* ad

ad quam referuntur puncta curvæ, quemadmodum ex subsequentibus patebit.

DEFINITIO 25.

Tab. III. Fig. 37. 373. *Diameter transversa* AB est recta, quæ utrinque intra curvas continuata rectas intra easdem æquidistantes MM bifariam secat.

DEFINITIO 26.

374. *Diameter conjugata* est recta, quæ alteri diametro æquidistantes bifariam secat.

DEFINITIO 27.

375. *Quantitates variabiles* sunt, quæ crescentibus aliis vel decrescentibus aut crescunt, aut decrescunt. E. gr. semiordinata PM & abscissa AP circuli sunt quantitates variabiles: una enim crescente crescit etiam altera. *Quantitates constantes* sunt, quæ crescentibus aliis vel decrescentibus eædem manent. Ita semidiameter circuli AC est quantitas constans: crescentibus enim abscissis & semiordinatis AP & PM semper eadem manet. Tab. III. Fig. 38.

HYPOTHESIS 8.

376. *Quantitates constantes primis alphabeti litteris indigitentur* a, b, c, &c. *variabiles vero ultimis* z, y, x, &c. *Speciatim* x *abscissam*, y *semiordinatam denotet, nisi aliud expresse moneatur.*

DEFINITIO 28.

377. *Curva Algebraica* est, in qua relatio abscissarum AP ad semiordinatas per æquationem algebraicam explicari potest. Sit e. gr. in circulo $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$, erit $PB = a - x$, consequenter ob $PM^2 = AP.PB$ (§. 327. 377 *Geom.*), $y^2 = ax - x^2$. Vel sit $PC = x$, $AC = a$, $PM = y$; erit (§. 417 *Geom.*) $MC^2 - PC^2 = PM^2$, hoc est, $a^2 - x^2 = y^2$. Tab. III. Fig. 36. Tab. III. Fig. 38.

SCHOLION 1.

378. *Dicuntur æquationes algebraicæ, quæ determinati sunt gradus, ita ut æquatio semper eadem maneat in singulis punctis curvæ.*

SCHOLION 2.

379. *Vulgo cum* Cartesio (g) *lineas algebraicas* Geometricas *vocant, quod eas tantum ad construenda problemata admittant, adeoque in Geometriam recipiant. Aliter vero nobis videtur, non refragantibus summis in re Geometrica arbitris* Leibnitio *atque* Nevvtono (h).

DEFINITIO 29.

380. *Curva transcendens* est, quæ per æquationem algebraicam definiri nequit.

SCHOLION.

381. *Curvæ transcendentes ab aliis* Cartesii *exemplo dicuntur* mechanicæ *& ex Geometria ejiciuntur, aliter sentientibus*

(g) lib. 2. p. m. 17. & seq.
(h) Act. Erudit. Lip. A. 1708. p. 526.

tientibus viris summis Leibnitio *atque* Newtono. *Invenit quoque* Leibnitius *novam æquationum transcendentium genus, quibus curvæ transcendentes definiuntur & quæ sunt gradus indefiniti, hoc est, non constanter eædem in omnibus curvæ punctis* (i)

DEFINITIO 30.

382. *Curvæ algebraicæ ejusdem generis* sunt, quarum æquationes ad eandem dimensionem assurgunt. Cum vero sola æquatio, quæ rectam definit, unius dimensionis esse possit, *Curva primi generis* vocatur, in qua æquatio ad duas dimensiones assurgit; si ad tres, *curva secundi generis*; si ad quatuor, *curva tertii generis* &c. E. gr. æquatio pro circulo est $y^2 = ax - x^2$, vel etiam $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 377). Est ergo circulus curva primi generis. Similiter curva primi generis est, quæ definitur per æquationem $ax = y^2$. Sed curva secundi generis est, quam definit æquatio $a^2x = y^3$.

DEFINITIO 31.

383. *Familia curvarum* vocatur plurium curvarum diversi generis congeries, quæ omnes per eandem æquationem indeterminati gradus, sed pro diversitate generis diversimode explicandi definiuntur. E. gr. Sit æquatio indeterminati gradus $a^{m-1}x = y^m$. Si $m = 2$, erit $ax = y^2$. Si $m = 3$, erit $a^2x = y^3$; si $m = 4$, erit $a^3x = y^4$ &c. in infinitum. Omnes istæ curvæ dicuntur ejusdem familiæ.

SCHOLION.

384. *Æquationes, per quas curvarum familiæ definiuntur, cum transcendentibus non sunt confundendæ. Licet enim intuitu totius familiæ sint gradus indeterminati; cujuslibet tamen ex familia curvæ respectu gradum determinatum habent, cum æquationes transcendentes respectu ejusdem curvæ indefiniti gradus existant* (§. 381).

COROLLARIUM.

385. Omnes adeo curvæ algebraicæ familiam quandam componunt, ex innumeris aliis constantem, quarum una quælibet infinita genera complectitur. Cum enim æquationes, per quas curvæ definiuntur, ingrediantur facta vel ex potentiis abscissarum & semiordinatarum in coëfficientes datos, vel ex potentiis abscissarum in potentias semiordinatarum, vel ex meris quantitatibus datis, omnes vero æquationes nihilo æquales fieri possint (*e*. gr. si $ax = y^2$, erit $ax - y^2 = 0$); æquatio pro omnibus curvis algebraicis erit $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$. Signum + in omnibus terminis retinetur, quia in casibus singularibus infinitæ variationes occurrere possunt. Et, si plures potentiæ ejusdem indeterminatæ quantitatis, v. gr. x occurrunt, coëfficiens termini in formula, v. gr. b explicatur per omnes ejus

(i) Act. Erudit. Lips. A. 1684. p. 234. 235.

ejus coëfficientes & exponens dignitatis v. gr. n per omnes dignitatum exponentes.

DEFINITIO 32.

386. *Sectiones conicæ* sunt lineæ curvæ, quæ ex coni sectione oriuntur.

SCHOLION.

387. *Sectiones conicæ præter circulum sunt tres* Parabola, Hyperbola & Ellipsis. *Nos præcipuas earum proprietates, quæ scilicet frequentioris sunt usus, ex æquationibus eas definientibus per calculum algebraicum eruemus, quia nobis propositum est, Algebræ ad Geometriam sublimiorem applicationem exemplis docere, licet non diffiteamur, communes earum proprietates una eademque opera demonstrari, si in solido seu in cono, ex quo secantur, considerentur.*

DEFINITIO 33.

388. *Parabola* est curva, in qua $ax = y^2$, hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex abscissa in rectam constantem, quæ axis *Parameter*, ab aliis *Latus rectum* dicitur.

SCHOLION.

389. *Hanc proprietatem parabolæ competere assumimus respectu axis: quod vero etiam ipsi competere debeat respectu cujuslibet diametri, inferius demonstrabitur.*

COROLLARIUM 1.

390. Est ergo parabola curva primi generis & crescentibus abscissis crescunt semiordinatæ, consequenter curva in se non redit.

COROLLARIUM 2.

391. Et in ea $x = y^2 : a$ atque $a = y^2 : x$, hoc est, abscissa est tertia proportionalis ad parametrum & semiordinatam, parameter vero tertia proportionalis ad abscissam & semiordinatam.

COROLLARIUM 3.

392. Porro $\sqrt{ax} = y$, hoc est, semiordinata est media proportionalis inter parametrum & abscissam.

COROLLARIUM 4.

393. Data itaque parametro AB describi potest parabola. Continuetur enim parameter AB in C & in B erigatur perpendicularis infra lineam AC continuanda in N. Ex centris ad libitum assumtis circino usque ad A aperto ducantur arcus, rectam BV in I, II, III, IV, V &c. rectam vero BC in 1, 2, 3, 4, 5 &c. intersecantes: erunt B1, B2, B3, B4, B5 &c. abscissæ, BI, BII, BIII, BIV, BV, &c. semiordinatæ (§. 327 *Geom.*). Quare si lineæ B1, B2, B3 &c. ex recta BC in BN transferantur & in punctis 1, 2, 3 &c. normales applicentur 1I = BI, 2II = BII, 3III = BIII &c. curva per puncta I, II, III &c. transiens parabola est: PN vero ejus axis (§. 392). Elegantius parabola describitur, si sumto AX pro axe parabolæ & puncto A pro vertice fiat AB parametro æqualis & ducta recta CD, quæ rectam BX ad angulos rectos secet, de- Tab. III. Fig. 39. Tab. XII. Fig. 118.

 scri-

ſcribantur pro arbitrio circuli quotcunque tranſeuntes per B & axem ſecantes in P, P, P &c. erunt enim AP, AP, AP &c. abſciſſæ, PI = A1, PII = A2, PIII = A3 &c. ſemiordinatæ parabolæ (§. 327 *Geom.*).

COROLLARIUM 5.

Tab. III. Fig. 39. 394. Quodlibet etiam punctum parabolæ geometrice determinari poteſt. E. gr. quæritur, utrum punctum M ſit in parabola, nec ne. Demittatur ex M ad BN perpendicularis PM & fiat PN parametro AB æqualis. Super BN deſcribatur ſemicirculus. Quodſi enim is tranſeat per M; erit punctum M in parabola (§. 327 *Geom.* & §. 391 *Analyſ.*).

DEFINITIO 34.

395. *Focus* eſt punctum axis F, in quo ſemiordinata FN æquatur ſemiparametro.

PROBLEMA 174.

Tab. III. Fig. 40. 396. *Invenire diſtantiam Foci a vertice* AF.

Sit AF $= x$, parameter $= a$, erit FN $= \frac{1}{2}a$ (§. 395), conſequenter

$$\frac{1}{4}a^2 = ax \text{ (§. 387)}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} a$$
$$\frac{1}{4}a = x$$

Theorema. In Parabola diſtantia foci a vertice AF eſt ad parametrum in ratione ſubquadrupla, ſeu quarta pars parametri.

COROLLARIUM 1.

397. Quoniam $y^2 = ax$ (§. 388); quadratum ſemiordinatæ PM eſt quadruplum rectanguli ex diſtantia foci a vertice in abſciſſam $\frac{1}{4}ax$ ſive AF. AP.

COROLLARIUM 2.

398. Invenitur adeo diſtantia foci a vertice AF, ſi ad abſciſſam quamcunque AP & dimidiam ſemiordinatam $\frac{1}{2}$ PM quæratur tertia proportionalis (§. 327 *Geom.*). Eſt enim $\frac{1}{4}$ PM^2 = AP. AF (§. 377 *Geom.*), conſequenter PM^2 = 4 AF. AP.

PROBLEMA 175.

399. *Determinare quantitatem rectæ* FM *ex foco* F *ad extremitatem ſemiordinatæ* M *ductæ.* Tab. III. Fig. 40.

Sit AP $= x$. Quoniam AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 396), erit PF $= x - \frac{1}{4}a$ vel $\frac{1}{4}a - x$, ſi AF > PA, conſequenter

$$PF^2 = x^2 - \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{16}a^2$$
$$PM^2 = \quad ax \quad \text{(§. 388)}$$
$$FM^2 = x^2 + ax + \tfrac{1}{16}a^2 \quad \text{(§. 417 Geom.)}$$
$$FM = x + \tfrac{1}{4}a.$$

Theorema. Recta FM ex foco F ad extremitatem ſemiordinatæ parabolæ ducta æquatur aggregato ex abſciſſa AP & diſtantia foci a vertice AF.

COROLLARIUM 1.

400. Si quarta pars parametri ex A in *f* & F transfertur & per AD parallelæ quotcunque ipſi in punctis P normales MM aguntur, tandemque ex F intervallo

vallo Pf puncta M determinantur; curva per hæc puncta transiens est parabola.

COROLLARIUM 2.

Tab. III. Fig. 41. 401. Potest ergo parabola etiam continuo motu describi. Nimirum assumta recta pro axe fiat $fA = AF = \frac{1}{4}a$. In A firmetur regula DB secans axem fD ad angulos rectos. Extremitati regulæ alterius EC alligetur filum, altero sui extremo in foco F fixum, quod sit $= AD + AF$. Quodsi stylo ad regulam EC applicato regula EC juxta ductum alterius DB dextrorsum & dein sinistrorsum promoveatur; stylus parabolam designabit. Est enim constanter $FM = EM = Pf = x + \frac{1}{4}a$, consequenter punctum M in parabola (§. 399).

PROBLEMA 176.

402. *Invenire rationem semiordinatarum in Parabola.*

Sint abscissæ x & v, semiordinatæ y & z; erit $y^2 = ax$ & $z^2 = av$ (§. 388), consequenter

$$y^2 : z^2 = ax : av$$

$$y^2 : z^2 = x : v \qquad (§. 124)$$
$$y : z = \sqrt{x} : \sqrt{v}$$

Theorema. Quadrata semiordinatarum sunt inter se ut abscissæ: ipsæ autem semiordinatæ in ratione subduplicata abscissarum.

PROBLEMA 177.

403. *Determinare quantitatem rectanguli ex summa duarum semiordinatarum* PM + pm *in differentiam earundem* R*m*. Tab. III. Fig. 40.

$$PM + pm = \sqrt{ax} + \sqrt{av} \quad (§. 402$$
$$mR = \sqrt{av} - \sqrt{ax} \qquad 388).$$

$$(PM + pm)mR = av - ax = a(v - x)$$
$$= a \,.\, Pp$$

Theorema. Rectangulum ex summa duarum semiordinatarum in differentiam earundem æquatur rectangulo ex parametro in differentiam abscissarum.

COROLLARIUM.

404. Est ergo parameter ad summam duarum semiordinatarum, ut earundem differentia ad differentiam abscissarum (§. 299 *Arithm.*).

PROBLEMA 178.

405. *Determinare quantitatem rectanguli ex semiordinata in abscissam.*

Quoniam $PM = \sqrt{ax}$ (§. 392); erit $PM.AP = x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3}$ (§. 61). Quare cum sit $ax : \sqrt{ax^3} = \sqrt{ax^3} : x^2$, hoc est, $ax : x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$; erit $a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$ (§. 124) hoc est $a : PM = PM.AP : AP^2$. Tab. III. Fig. 40.

Theorema. In parabola est rectangulum ex semiordinata in abscissam ad quadratum abscissæ ut parameter ad semiordinatam.

PRO-

PROBLEMA 179.

406. *Determinare quantitatem rectanguli ex abſciſſa una in alteram.*

Sit abſciſſa una $= x$, altera $= v$; ſemiordinata una $= y$, altera $= z$; erit $x = y^2 : a$ & $v = z^2 : a$ (§. 391), conſequenter $xv = y^2 z^2 : a^2$, adeoque $a^2 : y^2 = z^2 : xv$.

Theorema. In parabola quadratum parametri eſt ad quadratum ſemiordinatæ unius, ut quadratum ſemiordinatæ alterius ad rectangulum abſciſſarum,

PROBLEMA 180.

Tab. III. Fig. 41. 407. *Determinare quantitatem chordæ* AM.

Si Parameter $= a$, AP $= x$, erit $PM^2 = ax$ (§. 388). Quare cum $AP^2 = x^2$; erit $AM^2 = ax + x^2$ (§. 417 *Geom.*), $= (a + x) x = (a + AP). AP$.

Theorema. In parabola chorda eſt media proportionalis inter abſciſſam & compoſitam ex parametro & abſciſſa.

DEFINITIO 35.

Tab. III. Fig. 42. 408. Si TM curvam tangit in M, ducatur MR ad tangentem normalis; recta P T inter tangentem TM & ſemiordinatam PM intercepta *Subtangens* vocatur: quæ vero inter ſemiordinatam & normalem intercipitur PR, *Subnormalis* audit.

COROLLARIUM.

409. Eſt adeo TMR triangulum rectangulum (§. 91 *Geom.*), adeoque ob PM ad AR normalem (§. 329. 267 *Geom.*), PR : PM = PM : PT & PM : PT = MR : TM, hoc eſt, in omni curva ſubnormalis eſt tertia proportionalis ad ſubtangentem & ſemiordinatam, & normalis eſt ad tangentem ut ſemiordinata ad ſubtangentem.

PROBLEMA 181.

410. *Determinare quantitatem ſubtangentis PT & ſubnormalis P R in Parabola.* Tab. III. Fig. 42.

Sit AP $= x$, MR ad tangentem TM perpendicularis $= t$, RA $= v$, erit PR $= v - x$, $PM^2 = ax$ (§. 388) & (§. 417 *Geom.*)

$$ax = t^2 - v^2 + 2vx - x^2$$

hoc eſt

$$\begin{aligned} x^2 - 2vx + v^2 &= 0 \\ + ax - t^2 & \end{aligned}$$

Eadem æquatio provenit, ſi recta TM parabolam ſecet, & quidem ad utrumque ſectionis punctum. Quoniam itaque in puncto contactus duo illa puncta coincidunt; æquatio duas radices æquales habere debet, coincidentibus nimirum etiam abſciſſis per x deſignatis. Quare ſi fiat $x = z$ ſeu $x - z = 0$ & inde formetur æquatio $x^2 - 2zx + z^2 = 0$, duas æquales radices con-

continens (§.329); hæc cum antea inventa eadem esse debet, consequenter

$$-2z=-2v+a$$

Ergo ob $z=x$) $x=v-\frac{1}{2}a$

$$\frac{1}{2}a=v-x=PR$$

Porro (§.406) PR : PM = PM : PT

hoc est, $\frac{1}{2}a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax} : PT$

Ergo $PT = ax : \frac{1}{2}a = 2x$.

Theorema. In parabola subtangens PT est abscissæ AP dupla; subnormalis vero PR parametri subdupla, adeoque constans.

COROLLARIUM 1.

Tab. III. Fig. 40. 411. Quoniam TA $=x$ & distantia foci a vertice AF $=\frac{1}{4}a$ (§.396); erit TF $=\frac{1}{4}a+x$. Ergo recta FM ex foco F ad punctum contactus M ducta æquatur rectæ TF (§.399), consequenter TFM triangulum æquicrurum.

COROLLARIUM 2.

412. Quoniam PA $=x$ & AF $=\frac{1}{4}a$ (§.396), erit PF $=x-\frac{1}{4}a$, consequenter cum sit PR $=\frac{1}{2}a$ (§.410), FR $=x+\frac{1}{4}a$, adeoque FR = FM (§.399) = TM (§.411). Circulus igitur ex foco parabolæ F per punctum ejus M ductus subtangentem PT & subnormalem PR determinat, consequenter punctum T, ex quo ducitur tangens TM.

COROLLARIUM 3.

413. Quodsi MG ducatur parallela axi AQ, erit angulus GMS = FTM (§. 233 *Geom.*). Cumque sit TF = FM (§. 411); erit FTM = FMT (§. 184 *Geom.*), consequenter FMT = GMS (§. 87 *Arithm.*). Tab. III. Fig. 42.

PROBLEMA 182.

414. *Ducta* ON *tangenti* TM, *&* MG *axi* AQ *parallela, determinare rationem segmentorum* HF *&* FN. Tab. III. Fig. 43.

Sit AP = AT $=x$, erit PM $=\sqrt{ax}$ (§.392) PT = IO (ob TO = MF = PI, (§.257 *Geom.*) $=2x$ (§. 410). Sit MF = PI $=v$, erit TI $=v+2x$, IA $=v+x$. Sit denique IQ = FG $=t$, erit OQ = OI + IQ $=2x+t$, QA $=x+v+t$, & hinc $QN^2 = ax+av+at$ (§. 388). Porro (§. 268 *Geom.*).

$$OI : IF = OQ : QN$$

$$\text{h.e. } OI^2 : IF^2 = OQ^2 : QN^2$$

$$4x^2 : ax = (2x+t)^2 :$$

$$4x : a = (2x+t)^2 : a(2x+t)^2$$

$$\overline{4x}$$

$$\text{Est itaq; } a(x+v+t) = a(2x+t)^2 : 4x$$

$$4x^2+4xv+4tx = 4x^2+4tx+t^2$$

$$4xv = t^2$$

Quodsi LI dicatur t; reperietur eodem modo $t^2 = 4xv$, reliquis manentibus iisdem. Unde patet, esse LI = IQ. Est vero (§. 268 *Geom.*).

OH : OL = HN : LQ &

OH : OL = HF : LI, adeoque HN : HF = LQ : LI (§. 167. 173 *Arithm.*). Sed LI = $\frac{1}{2}$LQ = IQ, *per demonstrata*. Ergo FH = $\frac{1}{2}$HN = HF (§. 149 *Arithm.*).

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MG ex puncto contactus M cum axe parallela ducta eam bifariam secat in F.

COROLLARIUM 1.

Tab. III. Fig. 43. 415. Est ergo MG diameter, HN ejus ordinata, MF abscissa (§. 368. 370. 371).

COROLLARIUM 2.

416. Quoniam anguli recti ad G & P *per constr.* aequales sunt (§. 145 *Geom.*) & ob parallelismum rectarum FG & OQ *per construct.* anguli F & G in ΔΔ FNG & FOI aequales sunt (§. 233 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$OI : FI = FG : GN$$

$$2x : \sqrt{ax} = \sqrt{4vx} : \sqrt{av}$$

Et quia (§. 417 *Geom.*) $FN^2 = FG^2 + GN^2$: erit $FN^2 = 4vx + av = (a + 4x)v$. Jam cum FM $= v$, & x respectu puncti M constans; $a + 4x$ est parameter diametri, & quadratum etiam ad diametrum applicatae aequale rectangulo ex parametro in abscissam.

COROLLARIUM 3.

417. Recta ex foco ad verticem diametri M ducta est $\frac{1}{4}a + x$ (§. 399); diameter ergo parametri est rectae illius quadrupla.

PROBLEMA 133.

418. *Si TM parabolam tangit in M & MR fuerit ad eam normalis & ex foco F ducatur recta FM atque FO ad TM normalis, demittatur etiam ex R ad rectam FM normalis HR; determinare quantitatem segmentorum MH & FH, itemque rectae OF.* Tab. XII. Fig. 118.

Sit parameter a, AP $= x$, erit FM $= \frac{1}{4}a + x$ (§. 399), PR $= \frac{1}{2}a$ & TP $= 2x$ (§. 410). Cum TFM sit triangulum aequicrurum (§. 411), adeoque TO = OM (§. 184 *Geom.*); erit ob $FM^2 - OM^2 = FO^2$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam itaque $TM^2 = TP^2 + PM^2$ (*§. cit.*); erit $TM^2 = 4x^2 + ax$ (§. 388), consequenter $OM^2 = x^2 + \frac{1}{4}ax$, quod ex $FM^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{2}ax + x^2$ subductum relinquit $FO^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ax = (\frac{1}{4}a + x)\frac{1}{4}a$. Porro $MR^2 = PR^2 + PM^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}a^2 + ax = (\frac{1}{4}a + x)a$. Jam cum in ΔΔ OFM & MHR anguli ad O & R recti *per hypoth.* sint inter se aequales (§. 145 *Geom.*) & ob parallelismum rectarum

MR

MR & FO (§. 256 *Geom.*) anguli F & M æquales (§. 233 *Geom.*); erit (§. 268 *Geom.*).

$$FM : OF = MR : MH$$

adeoq; $FM^2 : OF^2 = MR^2 : MH^2$ (§. 124)

$$(\tfrac{1}{4}a + x)^2 : (\tfrac{1}{4}a + x)\tfrac{1}{4}a = (\tfrac{1}{4}a + x)a : MH^2$$

$$\tfrac{1}{4}a + x : \tfrac{1}{4}a = (\tfrac{1}{4}a + x)a : MH^2 \quad (\S 124.)$$

$$1 : \tfrac{1}{4}a = a : MH^2 \quad (\S. cit.)$$

$$MH^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$MH = \tfrac{1}{2}a = PR$$

Ergo $HF = FM - HM = x - \tfrac{1}{4}a = FP$.

Theorema 1. Recta OF ex foco parabolæ F ad tangentem TM ducta est media proportionalis inter parametrum & rectam FM ex foco F ad punctum parabolæ M ductam.

Theorema 2. Si MR fuerit ad parabolam in puncto M normalis & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem parabolæ punctum M ductum normalis HR; erit MH subnormali PR & HF portioni axs inter focum F & semiordinatam PM interceptæ æqualis.

PROBLEMA 184.

Tab. III. Fig. 42. 419. *Invenire æquationem ad parabolam externam, hoc est, punctis parabolæ M ad rectam AO, quæ ad axem AR in vertice A perpendicularis, relatis.*

Sit abscissa $AN = x$, semiordinata $NM = y$, parameter $= a$. Quoniam AN *per hypoth.* & PM (§. 368) perpendicularis ad AR; erit AN ipsi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Cum ex eadem ratione NM sit parallela ipsi AR; erit $AN = PM$ & $NM = AP$ (§. 257 *Geom.*), consequenter $PM = x$, $AP = y$, atque ideo $x^2 = ay$ (§. 388).

DEFINITIO 36.

420. *Ellipsis* est linea curva, in qua quadratum semiordinatæ PM est ad rectangulum ex segmentis axis AP & PB ut parameter ad axem, hoc est, si $AB = a$, parameter $= b$, $PM = y$, $AP = x$, erit $b : a = y^2 : ax - x^2$ adeoque $ay^2 = abx - bx^2$. Tab. III. Fig. 44.

COROLLARIUM 1.

421. est ergo $y^2 = bx - bx^2 : a$, hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex parametro in abscissam, demto tamen alio rectangulo ex eadem abscissa in quartam proportionalem ad axem, parametrum & abscissam.

COROLLARIUM 2.

422. Fiat $y = 0$, erit $bx - bx^2 : a = 0$, adeoque $abx = bx^2$, consequenter $a = x$. Patet adeo curvam secare AB in A & B, consequenter in se redire.

COROLLARIUM 3.

423. Fiat $x = \frac{1}{2} a$. Erit $y^2 = \frac{1}{2} ab - a^2 b : 4a = \frac{1}{4} ab$, consequenter $y = CD = V \frac{1}{4} ab$. Ergo $DE = 2V \frac{1}{4} ab = V ab$, hoc est, axis minor ED est medidius proportionalis inter majorem AB & parametrum, consequenter parameter tertia proportionalis ad axem majorem & minorem.

COROLLARIUM 4.

424. Quia $ay^2 = abx - bx^2$

erit $bx^2 = abx - ay^2$

$bx^2 : (bx - y^2) = a$

Invenitur ergo axis parametro, abscissa & semiordinata datis, si fiat 1. $b : y = y : \frac{y^2}{b}$, 2. $x - \frac{y^2}{b} = (bx - \frac{y^2}{b}) : x = x : a$.

Tab. XII. Fig. 119. Nimirum sit axis AB positione datus & parameter AL ad eum perpendicularis. Datis abscissa AP & semiordinata PM, fiat $AN = AQ = PM$; ducta NF ipsi LQ parallela, erit $AF = y^2 : b$, consequenter $FP = x - y^2 : b$. Continuetur LA in G, factaque $AH = FP$ & $AG = AP$ ducatur GB ipsi HP parallela: erit $AB = bx^2 : (bx - y^2)$, adeoque axis quaesitus.

COROLLARIUM 5.

Tab. IV. Fig. 45. 425. Quia $ay^2 = abx - bx^2$

erit $ay^2 : (ax - x^2) = b$

consequenter 1. $x : y = y : \frac{y^2}{x}$ & 2. $a - x : \frac{y^2}{x} = a : b$.

Datis ergo axe AB, abscissa AP & semiordinata PM, ita invenitur parameter AG. 1. Fiat $AI = PM$ & ex A per M ducatur recta AL. 2. In I erigatur perpendicularis LI; erit (§. 268 *Geom.*) ob $AP : PM = AI : LI$; $LI = y^2 : x$. 3. Producatur PM in O, donec $PO = LI = y^2 : x$, & ex B per O ducatur recta BG. 4. In A excitetur perpendicularis GA = (ob BP : PO = BA : GA) $ay^2 : (ax - x^2)$: quae erit parameter AG.

COROLLARIUM 6.

426. $y = V(\frac{abx - bxx}{Va}) = V(bx(\frac{a - x}{a}))$. Datis itaque axe AB & parametro AG, cuilibet abscissae BP semiordinata PN assignatur, si parametro AG axi AB ad angulos rectos juncta ducatur GB & erecta perpendiculari PN, fiat $PL = PH$, tandemque super AL semicirculus describatur. Est enim AB (a) : GA (b) = BP (x) : PH $(bx : a)$ & $PN = V(AP.PL) = V(a - x, bx : a) = V(bx - bx^2 : a)$.

PROBLEMA 185.

427. *Invenire distantiam foci a vertice* AF. Tab. III. Fig. 44.

Sit $AB = a$, parameter $= b$, AF $= x$, erit $FR = \frac{1}{2} b$ (§. 395) &

$\frac{1}{4} ab^2$

$$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} b$$
$$\frac{1}{4}ab = ax - x^2$$

$$x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab$$
$$\frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$$

$$\frac{1}{2}a - x = \surd(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)$$

$$\frac{1}{2}a - \surd(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab = x$$

Constructio. Ex B in L transferatur dimidia parameter, erit CL $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. In centro C erigatur perpendicularis CK occurrens semicirculo super AL descripto in K, erit CK $= \surd(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)$. Fiat itaque CF $=$ CK; erit in F focus.

Aliter. Quoniam $\surd \frac{1}{4}ab =$ CD, (§. 423) si intervallo DF $= \frac{1}{2}a$ intersecetur AB in F, erit in F focus. Nam CD$^2 = \frac{1}{4}ab$ & DF $= \frac{1}{4}a^2$. Ergo CF $= \surd(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)$, ut ante.

Æquatio secunda sequens suppeditat

Theorema. Si axis AB in foco F secetur; erit rectangulum ex segmentis axis AF. FB subquadruplum rectanguli ex parametro in axem seu quadrato axis dimidii majoris CD æquale.

COROLLARIUM.

428. Distantia foci a centro est $= \surd(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)$, hoc est, quadratum ejus est differentia quadratorum DC & AC.

PROBLEMA 186.

429. *Invenire rationem ordinatarum* PM & pm *in ellipsi.* Tab. III. Fig. 44.

Sit AB $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, A$p = z$, $pm = v$; erit

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = bx - bx^2 : a \\ v^2 = bz - bz^2 : a \end{array}\right\} (\text{§. } 421).$$

Ergo $y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$

h. e. $y^2 : v^2 = ax - x^2 : az - z^2$

seu PM$^2 : pm^2 =$ AP. BP : Ap.pB

Theorema. In ellipsi quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex axis segmentis.

COROLLARIUM 1.

430. Est igitur etiam DC^2 : PM^2 $=$ CB^2 : AP.PB, consequenter DC^2 : CB^2 $=$ PM^2 : AP.PB (§. 173 *Arithm.*), hoc est, quadratum axis minoris est ad quadratum majoris ut quadratum semiordinatæ ad rectangulum ex axis segmentis.

COROLLARIUM 2.

431. Sit CP $= x$, erit AP $= \frac{1}{2}a - x$ & PB $= \frac{1}{2}a + x$, consequenter AP. PB $= \frac{1}{4}a^2 - x^2$. Habemus adeo (§. 430)

$$\frac{1}{4}ab : \frac{1}{4}a^2 = y^2 : \frac{1}{4}a^2 - xx$$

hoc est $b : a =$

$$ay^2 = \frac{1}{4}a^2 b - bx^2$$

$$y^2 = \frac{1}{4}ab - bx^2 : a$$

En æquationem aliam, quæ naturam ellipsis definit, abscissis a centro C computatis.

COROLLARIUM 3.

432. Sit $CD = d$, $AC = r$, $PC = x$, erit $AP = r - x$ & $PB = r + x$, consequenter $AP.PB = r^2 - x^2 = AC^2 - PC^2$. Habemus ergo ut ante

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

unde $r^2y^2 = d^2(r^2 - x^2)$

$$y^2 = d^2(r^2 - x^2) : r^2$$

En æquationem adhuc aliam, quæ itidem ellipsis naturam definit, abscissis denuo a centro C computatis, & qua in subsequentibus ob commoditatem utemur.

COROLLARIUM 4.

433. Crescentibus adeo abscissis x, semiordinatæ decrescere debent. Quodsi tandem fiat $x = r$; erit $r^2 - x^2 = 0$, consequenter $y^2 = 0$, adeoque ellipsis cum axe tandem concurrit. Unde porro intelligitur, ellipsin esse lineam in se redeuntem.

PROBLEMA 187.

334. *Determinare quantitatem* Tab. IV. Fig. 46. *rectarum* FM *&* fM *ex utroque foco* F *&* f *ad idem peripheriæ punctum* M *ductarum.*

Sint $FC = fC = c$, reliqua ut ante: erit $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$, $PF = c - \frac{1}{2}a + x$, adeoque $PF^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2$, $= (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + x^2$, $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - 2cx - ax + x^2 . = (\frac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + x^2$. Est vero (§.430).

$$CB^2 : DC^2 = AP . PB : PM^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - xx : PM^2$$

Habemus adeo

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$

$$PF^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + xx$$

$$FM^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$

$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Porro

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$

$$Pf^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + xx$$

$$fM^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$

$$fM = \tfrac{1}{2}a + c - 2cx : a$$

$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

$$fM + FM = a = AB$$

Theorema. Summa rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum æquatur axi majori AB.

COROLLARIUM I.

435. Datis ergo axibus conjugatis ellipſis facillime deſcribitur. Determinatis enim focis F & f (§. 427), clavi in iis defigantur & his filum circumligetur FMf axi majori AB æquale. Quodſi immiſſo ſtylo filum extendatur & circa clavos circumducatur, ellipſis deſignabitur.

COROLLARIUM 2.

436. Immo eodem modo geometrice determinatur quodlibet punctum ellipſeos M. Axis enim AB dividitur pro arbitrio utcunque in duas partes, & parte una ex foco F, altera ex foco f deſcribitur arcus: duæ enim hi arcus ſe mutuo ſecabunt in puncto M. Poſſunt autem una eademque opera quatuor ſimul determinari puncta, ſingula nempe in ſingulis quadrantibus AD, DB, BE & EA.

PROBLEMA 188.

Tab. III. Fig. 44. 437. *Determinare quantitatem rectæ* MR *ex quovis ellipſis puncto* M *ad axem conjugatum* DC *perpendicularis.*

Sit MR $=$ PC $= v$, AC $= r$, erit AP $= r - v$ & PB $= r + v$. Sit DR $= z$, DC $= c$, erit RC $=$ PM $= c - z$, conſequenter (§. 430)

$$DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP.PB$$

$$cc : rr = z^2 - 2cz + c^2 : r^2 - v^2$$

$$c^2 : z^2 - 2cz + c^2 = r^2 : r^2 - v^2 \quad (\text{§. } 173 \text{ Arithm})$$

$$2cz - z^2 : c^2 = v^2 : r^2 \quad (\text{§. } 193 \text{ Arithm.})$$

$$2cz - z^2 : v^2 = c^2 : r^2 \quad (\text{§. } 173 \text{ Arithm.})$$

$$DR.RE : RM^2 = DC^2 : AC^2.$$

Theorema. Rectangulum ex ſegmentis axis conjugati eſt ad quadratum ſemiordinatæ ipſius ut quadratum axis conjugati ad quadratum axis majoris.

COROLLARIUM I.

438. Habent ergo ad axem conjugatum coordinatæ eandem relationem, quæ inter coordinatas ad axem majorem intercedit.

COROLLARIUM 2.

439. Quoniam $v^2 = \frac{2r^2z}{c} - \frac{r^2z^2}{c^2}$ (§. 437); ſi fiat $2r^2 : c = p$, erit $v^2 = pz - pz^2 : 2c$. Eſt adeo p parameter axis conjugati (§. 420). Quare parameter axis conjugati tertia proportionalis ad $2c$ & $2r$, ſeu ad axem conjugatum & axem majorem.

PROBLEMA 189.

440. *Determinare ſubtangentem* PT *& ſubnormalem* PR *in Ellipſi.* Tab. IV. Fig. 47.

Eadem prorſus methodo utendum, qua in parabola uſi ſumus. Nimirum ſit Parameter $= b$, axis major $= a$, AP $= x$, PM $= y$, MR $= t$, RA $= z$; erit PR $= z - x$, conſequenter $PM^2 = t^2 - z^2 + 2zx - x^2$. Eſt vero etiam $PM^2 = bx - bx^2 : a$ (§. 421). Quare

$$t^2-z^2+2zx-x^2=bx-bx^2:a$$

$$at^2-az^2+2azx-ax^2=abx-bx^2$$

$$ax^2-bx^2+abx-2azx+az^2-at^2=0$$

$$x^2+\frac{(ab-2az)}{a-b}x+\frac{az^2-at^2}{a-b}=0$$

Cum ex superioribus constet, æquationem hanc duas habere debere radices æquales; ponatur ut supra (§. 410) $x-v=0$, erit $x^2-2v x+v^2=0$, æquatio eadem cum anteriore, consequenter

$$(ab-2az):(a-b)=-2v$$

$$ab-2az=-2av+2bv$$

$$ab+2av-2bv=2az$$

$$\tfrac{1}{2}b+v-bv:a=z$$

Est vero $v=x$, *per hypoth.* Quare si x pro v substituatur, prodibit $z=\frac{1}{2}b+x-bx:a=$ AR. Ergo PR $=\frac{1}{2}b+x-bx:a-x=\frac{1}{2}b-bx:a=(\frac{1}{2}ab-bx):a$, quæ expressio hanc suppeditat analogiam:

$$a:b=\tfrac{1}{2}a-x:\text{PR}$$

Theorema. In ellipsi est ut axis primus ad parametrum ita distantia semiordinatæ a centro ad subnormalem.

Porro PR : PM = PM : PT (§. 409).

$$\frac{\frac{1}{2}ab-bx}{a}:y=y:\frac{ay^2}{\frac{1}{2}ab-bx}$$

Est vero $ay^2=abx-bx^2$ (§. 420). Ergo PT $=(abx-bx^2):(\frac{1}{2}ab-bx)=(ax-x^2):(\frac{1}{2}a-x.)$ Habemus adeo

$$\tfrac{1}{2}a-x:x=a-x:\text{PT}$$

$$\text{PC}:\text{AP}=\text{PB}:\text{PT}$$

Ergo PB . AP = CP . PT

Theorema. In ellipsi rectangulum ex segmentis axis æquatur rectangulo ex distantia semiordinatæ a centro in subtangentem.

Tandem AT = PT − AP $=(ax-x^2):(\frac{1}{2}a-x)-x=(ax-x^2-\frac{1}{2}ax+x^2):(\frac{1}{2}a-x)=\frac{1}{2}ax:(\frac{1}{2}a-x)$. Quare

$$\tfrac{1}{2}a-ax:\tfrac{1}{2}a=x:\text{AT}$$

$$\text{PC}:\text{AC}=\text{AP}:\text{AT}$$

Theorema. Ut distantia semiordinatæ a centro ad axem dimidium, ita abscissa ad portionem subtangentis inter verticem ellipsis & tangentem interceptam.

COROLLARIUM 1.

441. Quia PC : AC = AP : AT; erit etiam PC : AP = AC : AT (§. 173 *Arithm.*), consequenter PC : PC + PA = AC : CA + AT (§. 190 *Arithm.*), hoc est, PC : AC = AC : CT.

COROLLARIUM 2.

442. Est ergo AC² = PC . CT (§. 377 *Geom.*) hoc est, quadratum dimidii Axis AC æquatur rectangulo ex CT in PC.

CO-

COROLLARIUM 3.

443. Crescentibus abscissis x, decrescit $\frac{1}{2}a-x$, consequenter ratio $\frac{1}{2}a-x : \frac{1}{2}a$ minuitur (§. 203 *Arithm.*). Abscissa igitur major ad AT rationem minorem habet quam minor.

COROLLARIUM 4.

444. Si $x=\frac{1}{2}a$, hoc est, quando AC fit abscissa, $\frac{1}{2}a-x=0$, consequenter abscissa rationem infinitam habet ad AT, adeoque tangens TM cum subtangente TP nunquam concurrit. Est igitur axi parallelus.

COROLLARIUM 5.

445. Hinc vero ulterius liquet, quantitatem finitam AC respectu infinitæ pro nihilohabendam esse.

PROBLEMA 190.

Tab. IV. Fig. 47. 446. *Determinare quantitatem rectanguli ex subtangente* PT *in abscissam* CP.

Sit PC$=x$, PT$=t$, AC$=r$; erit AP$=r-x$ & PB$=r+x$, CT$=t+x$. Quoniam (§. 441)

$$PC : AC = AC : CT$$
$$x : r = r : t+x$$
erit $$tx+xx=r^2$$

$$tx=r^2-x^2=AP.PB$$

Theorema. Rectangulum ex subtangente PT in abscissam CP æquatur rectangulo ex segmentis axis.

PROBLEMA 191.

447. *Determinare valorem subtangentis* PT, *abscissis a centro computatis.* Tab. IV. Fig. 47.

Sit AC$=r$, PC$=v$, erit PB$=r+v$, AP$=r-v$, consequenter (§. 440).

$$PC : PB = AP : PT$$
$$v : r+v = r-v : t$$

$$tv=r^2-v^2$$

Theorema. Rectangulum ex subtangente & distantia ordinatæ a centro æquatur differentiæ quadrati hujus distantiæ a quadrato semiaxis transversi.

PROBLEMA 192.

448. *Determinare quantitatem subtangentis* KE *in axe conjugato.* Tab. IV. Fig. 47.

Si tangens TM continuetur, donec axi conjugato continuato in E occurrat, & ex M demittatur perpendicularis MK$=$PC (§. 157 *Geom.*) erit ob parallelismum rectarum KM & CT angulus T$=$EMK (§. 233 *Geom.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$TP : PM = MK : KE$$
$$\frac{r^2-v^2}{v} : y = v : \frac{v^2y}{r^2-v^2}$$

Quodsi fiat DC$=c$, DK$=z$, erit KC $=$ PM$=y=c-z$ & $v^2=\frac{2r^2z}{c}-\frac{r^2z^2}{c^2}$. (§.436) Hinc $r^2-v^2=(c^2r^2-2r^2cz+r^2z^2):c^2$ & $v^2y=(2r^2cz-r^2z^2)(c-z):c^2$. Quare $v^2y:(r^2-v^2)=(2r^2cz-r^2z^2)(c-z):(c^2r^2-2r^2cz+r^2z^2)$ $=(2r^2cz-r^2z^2):(cr^2-r^2z)=(2cz-z^2):(c-z)$.

Expressio itaque subtangentis in axe conjugato eadem, quæ in transverso.

RPOBLEMA 193.

Tab. IV. Fig. 48. 449. *Si recta* HN *tangenti* TM *parallela ducatur & punctum contactus* M *atque centrum* C *jungantur recta* MC, *quæ* HN *secat in* G, *determinare rationem rectarum* HG *&* GN.

Sit AB$=a$, PM$=y$, PC$=c$, FG $=$ KD $=t$, GI$=$KS$=z$, erit IF$=$ HL$=$DS$=t-z$, $HL^2=t^2-2tz+z^2$. Opera nunc danda, ut HL^2 alia adhuc ratione exprimatur. Est itaque (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = FG : FC$$
$$y : t = t : (tc:y)$$

Et quia $\triangle$TMP $\backsim$ FOG (§. 233. & 267 *Geom.*), & GIH $\backsim$ FOG (§. 268 *Geom.*); erit etiam TMP $\backsim$ GIH consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$PM : PT = GI : HI$$
$$y : \frac{ax-x^2}{c} = z : \frac{(ax-x^2)z}{cy} \quad (\S.\ 440)$$

Ponamus brevitatis gratia $ax-x^2=v$; erit FL $=$ HI $=vz:cy$. Ergo CL$=$FL$+$FC $=tc:y+vz:cy=(tc^2+vz):cy$. Hinc AL$=$AC$-$CL$=\frac{1}{2}a-(tc^2-vz):cy=(\frac{1}{2}acy-tc^2-vz):cy$ & BL $=$ AB$-$AL$=a-(\frac{1}{2}acy+tc^2+vz):cy=(\frac{1}{2}acy+tc^2+r^2z):cy$. Est vero (§.429)

$$AP.PB : LA.LB = PM^2 : HL^2$$
$$v : \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2-t^2c^4-2tc^2vz-v^2z^2}{c^2y^2} = y^2 : HL^2$$

Hinc $HL^2=$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2-t^2c^4-2tc^2vz-v^2z^2}{c^2v}=t^2\frac{(-2tz+z^2}{c^2v}$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2-t^2c^4-2tc^2vz-v^2z^2=t^2c^2v-(2tc^2zv+z^2c^2v$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2-t^2c^4-v^2z^2=t^2c^2v+z^2c^2v$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2-t^2c^4-t^2c^2v=v^2z^2+c^2vz^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2-t^2c^4-t^2c^2v}{v^2+c^2v}=z^2$$

Quodsi

Quodsi jam KN dicatur z, reliqua maneant ut ante; reperietur eodem modo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v}$, consequenter $KN^2 = KS^2$, adeoque & KN = KS.

Est vero (§. 268 *Geom.*) KN : KS = GN : HG. Ergo GN = HG.

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MC per contactum M & centrum ellipsis C transiens eam bifariam secat.

COROLLARIUM 1.

Tab. IV. Fig. 49. 450. Est ergo MQ diameter, HN ejus ordinata (§. 368. 370).

COROLLARIUM 2.

451. Cum vero parallelæ HN quamcunque aliam, & rectæ MQ itidem quamcunque aliam substituere liceat; omnes rectæ per centrum transeuntes & in peripheria utrinque terminatæ sunt diametri, ipsisque coordinatæ sunt tangentibus parallelæ.

COROLLARIUM 3.

452. Est ergo etiam ECV diameter, consequenter MQ & EV sunt diametri conjugatæ (§. 374).

PROBLEMA 194.

453. *Si ex diametri* VE *tangenti* TM *parallelæ extremitate* V *perpendicularis* VR *demittatur in axem* AB; *determinare quantitatem rectæ* RC.

Sit CA = r, CR = v, PT = t, PC = x; erit AR = $r - v$, RB = $r + v$, consequenter AP.PB = tx (§. 446), AR.RB = $r^2 - v^2 = tx + x^2 - v^2$ (§. 447). Quoniam VE ipsi TM parallela, Tab. IV.
per hypoth. erit MTC = TCV (§. Fig.
233 *Geom.*). Quare cum anguli 49.
ad P & R sint recti, *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*), PM : RV = TP : RC. Hinc $PM^2 : RV^2 = TP^2 : RC^2$ (§. 124). Est vero etiam $PM^2 : RV^2$ = AP.PB : AR.RB (§. 429). Ergo (§. 167 *Arithm.*)

AP.PB : AR.RB = $TP^2 : RC^2$

$$tx : tx + x^2 - v^2 = t^2 : v^2$$

$$tv^2x = t^3x + t^2x^2 - t^2v^2 \quad | \; t$$

$$v^2x = t^2x + tx^2 - tv^2$$

$$tv^2 + xv^2 = t^2x + tx^2 \quad | \; t + x$$

$$v^2 = tx$$

hoc est, CR^2 = AP.PB. consequenter AP : CR = CR : PB.

PROBLEMA 195.

454. *Determinare quantitatem semiordinatæ* GH *ad diametrum ellipsis* MQ. Tab. IV. Fig. 49.

Ductis KI ipsi FD & KG ipsi AB parallelis, fiat CP = x, AC = r, PT = t, PM = y, KG = IL = m, LC = n. Erit (§. 268 *Geom.*)

 CP:

$$CP : PM = CL : LG$$
$$x : y = n : \frac{ny}{x}$$

Porro ob parallelas TM & HN *per constr.* ang. TSA = KHG (§. 233 *Geom.*) adeoque ob rectos ad A & K *per constr.* T = HGK (§. 246 *Geom.*), & hinc (§. 267 *Geom.*).

$$TP : PM = KG : KH$$
$$t : y = m : \frac{my}{t}$$

$$HI = KI - KH = \frac{ny}{x} - \frac{my}{t}$$
$$CI = CL + LI = n + m$$
$$HI^2 = \frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2}$$
$$CI^2 = n^2 + 2mn + m^2$$

$AI.IB = AC^2 - CI^2 = r^2 - n^2 - 2mn - m^2$ (§. 432).

Est vero (§. 429)

$$AP.PB : AI.IB = PM^2 : HI^2$$
$$r^2 - x^2 : r^2 - n^2 - 2mn - m^2 = y^2 : HI^2$$

Unde elicitur $HI^2 = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$

Quare

$$\frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

Sed $\frac{2mny^2}{tx} = \frac{2mny^2}{r^2 - x^2}$ (§. 446). Ergo

$$\frac{n^2y^2}{x^2} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

$$\frac{n^2}{x^2} + \frac{m^2}{t^2} = \frac{r^2 - n^2 - m^2}{r^2 - x^2}$$

$$n^2 + \frac{m^2x^2}{t^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2} - n^2$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2 + n^2x^2}{r^2 - x^2}$$
$$= \frac{r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2}{r^2 - x^2}$$

hoc est, ob $t^2x^2 = (r^2 - x^2)^2$ (§. 446)

$$m^2x^4 = (r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2)(r^2 - x^2)$$
$$= r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + m^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^2 - m^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} - x^2 + n^2$$

$$m^2 = r^2 + n^2 - x^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} = KG^2$$

Sit

Si jam $CM = v$, erit (§. 268 *Geom.*)

$CP : CM = CL : CG$

$x : v = n : (vn : x)$

Ergo $MG = MG - CG = v - vn : x$ & $GQ = GC + MC = v + vn : x$ $MG.GQ = v^2 - v^2 n^2 : x^2$

Quodsi $v^2 - v^2 n^2 : x^2 = MG.QG$ multiplices per $r^2 - x^2 = CR^2$ (§. 453) & $r^2 + n^2 - x^2 - r^2 n^2 : x^2 = KG^2$ per $v^2 = CM^2$; utrobique prodit $r^2 v^2 + n^2 v^2 - x^2 v^2 - r^2 n^2 v^2 : x^2$ Est itaque $MG.QG.CR^2 = KG^2.CM^2$, adeoque (§.299 *Arithm.*) $KG^2 : CR^2 = MG.QG : CM^2$. Jam ob parallelas EV & HN, *per hypoth.* MCV = MGH (§.233 *Geom.*) & ob parallelas KG & RC, *per constr.* MGK = MCR (§. *cit.*). Ergo KGH = RCV (§. 91 *Arithm.*), consequenter $KG^2 : CR^2 = HG^2 : CV^2$ (§. 267 *Geom.* & §. 260 *Arithm.*). Unde tandem habetur (§. 167 *Arithm.*) $MG.QG : CM^2 = HG^2 : CV^2$.

Theorema. In ellipsi est quadratum semiordinatæ ad quadratum semidiametri conjugatæ ut rectangulum ex segmentis diametri ad quadratum semidiametri.

COROLLARIUM.

455. Sit $MQ = a$, $EV = c$, $MG = x$, $HG = y$, erit $GQ = a - x$, consequenter (§. 454)

$$ax - x^2 : \tfrac{1}{4}a^2 = y^2 : \tfrac{1}{4}c^2$$

$$\tfrac{1}{4}c^2 ax - \tfrac{1}{4}c^2 x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 y^2 \quad \Big| \ \tfrac{1}{4}a$$

$$\frac{c^2 x - c^2 x^2}{a} = ay^2$$

Fiat $\frac{c^2}{a} = b$, erit $c^2 = ab$.

Hinc $abx - bx^2 = ay^2$

Eadem ergo est relatio semiordinatarum ad diametros, quæ ad axem (§. 420) & diametri parameter est tertia proportionalis ad diametros a & c.

SCHOLION.

456. *Cum ex hac æquatione fundamentali reliquas ellipsis proprietates respectu axis deduxerimus; evidens est, omnes quoque istas proprietates ellipsi competere intuitu diametri.*

PROBLEMA 196.

457. *Determinare quantitatem rectæ FO ex foco F ad Tangentem Ellipsis TM perpendicularis.* Tab. XII. Fig. 118.

Sit RM ad tangentem TM normalis: erunt MR & OF inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), adeoque TR : RM = TF : FO (§. 268 *Geom.*). Porro cum in triangulo rectangulo TMR semiordinata PM sit ad hypothenusam TR perpendicularis (§. 368. 370); erit △ PMR ∽ △ TMP (§. 329 *Geom.*), adeoque TR:

TR : RM = RM : PR (§. 267 *Geom.*). Eſt ergo RM : PR = TF : FO (§. 167 *Arithm.*), conſequenter FO.RM PR. TF (§. 378 *Geom.*).

Theorema. Rectangulum ex ſubnormali PR in differentiam diſtantiæ foci a ſemiordinata atque ſubtangentis TF æquale eſt rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari FO.

PROBLEMA 197.

Tab. XII. Fig. 118. 458. *Si in F fuerit focus ellipſis & MR ad eam normalis, HR vero normalis ad FM ex foco ad punctum contactus ductam; determinare quantitatem ſegmentorum MH & HF.*

Sit parameter $= b$, axis $= a$, diſtantia foci a centro $= c$, erit FM $= \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$ (§. 434), PR $= (\frac{1}{2}ab - bx) : a$ (§. 440), AT $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ (§. *cit.*) & AF $= \frac{1}{2}a - c$, conſequenter TF $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x) + \frac{1}{2}a - c = ax : (a - 2x) + \frac{1}{2}a - c = (\frac{1}{2}a^2 - ac - 2cx) : (a - 2x)$. Ducatur FO ad tangentem TM normalis, erit OF parallela ipſi MR (§. 256 *Geom.*), adeoque angulus OFM ipſi HMR æqualis (§. 233 *Geom.*) & hinc ob rectos ad O & H æquales (§. 145 *Geom.*) reperitur (§. 267 *Geom.*) FM : FO = MR : MH hoc eſt, FM : $\frac{PR.TF}{MR}$ = MR : MH (§. 457). Eſt itaque MH = (PR.TF) : FM, conſequenter FM : TF = PR : MH. Quare

$$\frac{\frac{1}{2}a - c + 2cx}{a} : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac - 2cx}{a - 2x} = \frac{ab - 2bx}{2a} : MH$$

h. e. $a^2 - 2ac + 4cx : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac - 2cx}{a - 2x} = ab - 2bx : MH$ (§. 184 *Arithm.*) & $\frac{a^2 - 2ac + 4cx}{a - 2x} : \frac{\frac{1}{2}a^2 - ac - 2cx}{a - 2x} = b : MH$ (§. 183 *Arithm.*). Eſt ergo MH $= \frac{1}{2}b$ (§. 149 *Arithm.*).

Theorema. Si MR fuerit ad ellipſin normalis & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem parabolæ punctum M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO 37.

459. *Hyperbola* eſt linea curva, in qua $ay^2 = abx + bxx$, hoc eſt, $b : a = y^2 : ax + x^2$, ſeu quadratum ſemiordinatæ eſt ad rectangulum ex abſciſſa in rectam compoſitam ex eadem abſciſſa & recta quadam conſtante, quæ *Axis transverſus*, vel *latus transverſum* audit, ut recta alia conſtans, quæ *axis Parameter* dicitur, ad axem transverſum.

CO-

COROLLARIUM.

460. Est ergo etiam hic ut in ellipsi $y^2 = bx + bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax + xx)$, $a = bxx : (y^2 - bx)$ &c. nisi quod hic contraria signa occurrant (§. 421 & seqq.).

DEFINITIO 38.

461. In hyperbola *Axis conjugatus* dicitur media proportionalis inter axem transversum & parametrum, quia talis est axis conjugatus in ellipsi (§. 423).

DEFINITIO 39.

Tab. III. Fig. 37. 462. Si axis transversus AB axi AX in directum jungitur & in C bifariam dividitur; punctum C *Centrum* appellatur.

PROBLEMA 198.

463. *Datis parametro & axe transverso* AB, *invenire distantiam foci a vertice* AF.

Sit parameter $= b$, AB $= a$, erit FN $= \frac{1}{2}b$ (§. 395) & (§. 459).

$$b : a = \tfrac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb = abx + bxx$$

$$\tfrac{1}{4}ab = ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Invenitur adeo x quærendo inter $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ mediam proportionalem ac inde auferendo $\frac{1}{2}a$. vel: Quia $\sqrt{\frac{1}{4}ab} =$ CE (§. 461), si fiat AG $=$ EC, erit GC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Quare cum sit AC $= \frac{1}{2}a$, si ex centro C radio CG describatur arcus GF axem secans in F, erit AF $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)} - \frac{1}{2}a$, adeoque in F focus. Tab. III. Fig. 37.

COROLLARIUM 1.

464. Est adeo distantia foci a centro FC $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)}$. Quare si FC$^2 = c^2$; erit CE$^2 = c^2 - \frac{1}{4}a^2$.

COROLLARIUM 2.

465. Quia $ax + xx = \frac{1}{4}ab$ & $ax + xx =$ AF.FB, $\frac{1}{4}ab$ vero quadratum semiaxis conjugati (§. 461), rectangulum ex AF in FB huic quadrato æquale est.

PROBLEMA 199.

466. *Invenire rationem semiordinatarum* PM *&* pm. Tab. III. Fig. 40.

Sit axis transversus $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, Ap $= v$, pm $= z$; erit (§. 460).

$$y^2 : z^2 = bx + \frac{bxx}{a} : bv + \frac{bv^2}{a}$$

$$ax + xx : bv + v^2 \quad (§. 124)$$

$$(a + x)x : (b + v)v$$

Theorema. In hyperbola quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula

gula ex abſciſſa in rectam quandam compoſitam ex abſciſſa & axe transverſo.

COROLLARIUM.

467. Creſcentibus adeo abſciſſis x, creſcunt quoque rectangula $ax + x^2$, conſequenter & quadrata ſemiordinatarum y^2, adeoque ſemiordinatæ ipſæ. Hyperbola igitur continuo ab axe recedit.

PROBLEMA 200.

468. *Invenire rationem axis transverſi ad axem conjugatum.*

Si axis transverſus $= a$, parameter $= b$, erit quadratum axis conjugati $= ab$ (§. 461). Hoc ergo ad quadratum transverſi, ut ab ad aa, hoc eſt, ut b ad a (§. 124).

Theorema. Quadratum axis conjugati eſt ad quadratum transverſi, ut parameter ad axem transverſum.

COROLLARIUM.

469. Quoniam $b : a = PM^2 : AP.PB$ (§. 459); quadratum axis conjugati eſt ad quadratum transverſi ut quadratum ſemiordinatæ ad rectangulum ex abſciſſa in compoſitam ex abſciſſa & axe transverſo.

Tab. III. Fig. 37.

PROBLEMA 201.

470. *Sint duæ hyperbolæ æquales, eandem parametrum, eundem axem transverſum atque conjugatum habentes, quarum axes* AX *&* BY *cum axe transverſo communi* AB *in directum jacent. Ex focis* F *&* f *ad punctum* M *hyperbolæ unius ducantur rectæ* fm *&* FM: *determinare quantitatem harum rectarum.*

Sit $FC = fC = c$, reliqua ut in præcedentibus: erit $AF = c - \frac{1}{2}a$, $AE = c + \frac{1}{2}a$, $PF = x - c + \frac{1}{2}a$, $Pf = c + \frac{1}{2}a + x$, $PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{1}{4}a^2$, $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$. Jam (§. 464) quadratum ſemiaxis conjugati $CE = cc - \frac{1}{4}aa$. Porro (§. 469)

$$AC^2 : CE^2 = AP.BP : PM^2$$
$$\tfrac{1}{4}aa : cc - \tfrac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$$

Eſt itaque

$$PM^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$FM^2 = c^2 - 2cx - ac + \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

Similiter

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$
$$Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$$

fM^2

$$fM^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$fM = c + \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$
$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB$$

COROLLARIUM 1.

Tab. IV. Fig. 50. 471. Datis ergo axe transverso & distantia a vertice, hyperbola motu continuo ita describitur. Scilicet in focis F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC, altero sui extremo C regulæ Cf alligatum, quæ ipsum superet axe transverso AB. Altera regulæ extremitas perforata clavo f injiciatur & stilo ad filum applicato regula emoveatur.

COROLLARIUM 2.

472. Iisdem datis puncta quotcunque hyperbolæ determinantur, si ex foco f intervallo quocunque AB majore describatur arcus, facto fb = AB, intervallo residuo bm ex F ducatur arcus alius priorem in m intersecans, erit enim ob fm − Fm = AB, m punctum hyperbolæ (§. 470). Vel commodius hyperbola ita describitur: Fiat AB axi transverso æqualis determinenturque foci f & F (§. 463). Jungatur ipsi fO recta fK sub angulo acuto quocunque & ex centro f radiis ipsa fA majoribus describantur arcus quotcunque concentrici secantes rectam fK in I, II, III &c. Fiat fL = AB & ex foco F intervallis LI, LII, LIII &c. intersecentur arcus isti utrinque in 1, 2, 3: erunt puncta 1, 2, 3 &c. in hyperbola. Est enim f1 = fI, fII = f2, fIII = f3 &c. (§. 40 *Geom.*). Sed F1 = LI, F2 = LII, F3 = LIII &c. *per constr.* Ergo f1 − F1 = fI − LI = AB, f2 − F2 = fII − LII = AB, f3 − F3 = fIII − LIII = AB &c. consequenter puncta 1, 2, 3 &c. in hyperbola (§. 470).

Tab. XII. Fig. 119.

PROBLEMA 202.

473. *Determinare situm rectæ* DE, *quæ per verticem* A *ipsi ordinatæ* Mm *parallela ducitur.* Tab. IV. Fig. 51.

Sit AP = x, PM = y, parameter = b, axis transversus = a: erit $y^2 = bx - bx^2 : a$ (§. 460). Quoniam in vertice A fit $x = 0$; erit etiam $y = 0$, consequenter DE tota extra hyperbolam cadit, eamque adeo tangit.

Theorema. Si recta DE per verticem A ordinatis Mm parallela ducatur; hyperbolam in A tangit.

DEFINITIO 40.

474. Si recta DE per verticem hyperbolæ A ordinatis Mm parallela ducatur, fiatque axi conjugato æqualis, nempe pars DA & AE semiaxi; præterea ex centro C per Tab. IV. Fig. 51.

D & E agantur rectæ CF & CG: rectæ hæ dicuntur *Asymptotæ hyperbolæ.*

COROLLARIUM 1.

475. Quoniam (§. 268 *Geom.*) CA : AE = CP : Pr & CA : (DA) AE = CP : PR; erit Pr = PR (§. 177 *Arithm.*). Quare cum sit PM = Pm (§. 370); erit quoque MR = mr (§ 91 *Arithm.*).

COROLLARIUM 2.

476. Si AI ducatur parallela ipsi DC & AH ipsi CE; erit EA : ED = AI : DC (§. 268 *Geom.*). Sed EA = $\frac{1}{2}$ ED (§. 474). Ergo AI = $\frac{1}{2}$ DC = $\frac{1}{2}$ CE. Et quoniam porro EA : AD = EI : IC (§. 268 *Geom.*); erit EI = CI = $\frac{1}{2}$ EC, consequenter AI = CI (§. 87).

DEFINITIO 41.

477. Quadratum rectæ CI vel AI dicitur *Potentia hyperbolæ.*

PROBLEMA 203.

478. *Determinare potentiam hyperbolæ.*

Sit CA = $\frac{1}{2}a$, AE = $\frac{1}{2}c$, erit CE = $V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)$ (§. 417 *Geom.*) adeoque CI = $\frac{1}{2}V(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)$. Ergo $CI^2 = \frac{aa + cc}{16}$.

Theorema: Potentia hyperbolæ est decima sexta pars quadratorum axium conjugatorum, vel quarta pars quadratorum semiaxium conjugatorum.

COROLLARIUM.

479. Quoniam $cc = ab$ (§. 461); erit $CI^2 = \frac{aa + ab}{16} = \frac{1}{4}a(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b)$, hoc est, potentia hyperbolæ æquatur rectangulo ex quarta parte axis transversi in quartam partem aggregati ex axe transverso & parametro.

RPOBLEMA 204.

480. *Determinare differentiam quadratorum* PM & PR. Tab IV. Fig. 51.

Quoniam DA = $V\frac{1}{4}ab$ (§. 461) & CP = $\frac{1}{2}a + x$; præterea (§. 268 *Geom.*).

$$CA : AD = CP : PR$$
$$\tfrac{1}{2}a : V\tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{2}a + x ; PR$$

erit PR = $(\frac{1}{2}aV\frac{1}{4}ab + xV\frac{1}{4}ab) : \frac{1}{2}a = V\frac{1}{4}ab + 2xV\frac{1}{4}ab : a$. Quare

$$PR^2 = \tfrac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$$
$$PM^2 = \qquad bx + bx^2 : a \ (\S.460)$$

$$PR^2 - PM^2 = \tfrac{1}{4}ab = DA^2.$$

Theorema. Si in hyperbola semiordinata PM producatur, donec asymptoto in R occurrat; erit differentia quadratorum PM & PR æqualis quadrato semiaxis conjugati DA.

COROLLARIUM.

481. Crescente adeo semiordinata PM, decrescit recta PR, consequenter MR, adeoque hyperbola ad asymptotum propius accedit. Nunquam tamen cum ea concurrere potest, quia cum sit $PR^2 - PM^2 = DA^2$, fieri nequit, ut $PR^2 - PM^2 = 0$ evadat.

SCHO-

SCHOLION.

482. *En rationem, cur lineas CF & CG ἀσυμπτώτους seu non coincidentes vocaverint veteres.*

PROBLEMA 205.

483. *Determinare quantitatem rectanguli ex* MR *in* Mr.

Sit PR $=z$, PM $=y$; erit MR $= z-y$, MR $=z+y$, consequenter MR.Mr $=z^2-y^2=$ PR$^2-$PM^2.

Theorema. In hyperbola rectangulum ex MR & Mr aequatur differentiae quadratorum PR^2 & PM^2.

COROLLARIUM.

484. Idem ergo rectangulum aequale est quadrato semiaxis conjugati DA (§. 480), consequenter omnia rectangula eodem modo formata aequalia sunt.

PROBLEMA 206.

Tab. IV. Fig. 51. 485. *Si* QM *&* fm *cum asymptoto* CG, qm *&* SM *cum altera* CF *parallelae ducantur; determinare rationem rectangulorum* QM.MS *&* qm.mf.

Sit MR $=mr=a$, R$m=r$M $=b$, QM $=v$, $mq=z$. Erit (§. 268 Geom.)

$$RM : MQ = Rm : mf$$
$$a : v = b : (bv : a)$$
$$rm : mq = rM : MS$$
$$a : z = b : (bz : a)$$

Est ergo MQ.MS $=bvz:a$ & $mq.mf=bvz:a$, consequenter MQ.MS $=mq.mf$.

Theorema. Si QM & mf cum asympto CG, qm vero & MS cum altera CF parallelae ducantur; rectangula ex QM in MS & qm in mf aequalia sunt.

COROLLARIUM.

486. Quoniam C$q=fm$ & CQ $=$ SM (§. 257 Geom.); etiam rectangula ex Cq in qm & ex CQ in QM aequalia sunt.

PROBLEMA 207.

487. *Determinare rationem rectanguli ex* qm *in* mf *ad potentiam hyperbolae seu* AI^2. Tab. IV. Fig. 51.

Sit $mr=z$, $qm=y$, AE $=c$: erit, ob parallelas AE & Pr, ang. E $=r$, & ob parallelas AI & qm, ang. I $=q$ (§. 233 Geom.); consequenter (§. 268 Geom.).

$$mr : qm = AE : AI$$
$$z : y = c : \frac{cy}{z}$$

Porro ob mR.$mr=$ AE^2 (§. 484) erit (§. 299 Arithm.)

$$mr : AE = AE : mR$$
$$z : c = c : \frac{cc}{z}$$

Denique ob parallelas fm & CE $o=x$ & ob parallelas DE & Rm, $x=y$ (§. 233 Geom.) adeoque $o=y$ (§. 87 Arithm.). Similiter ob parallelas AI & CR, angulus IAE $=$ CDE & ob parallelas DE & Rm, CDE

CDE $= f$Rm (§. 233 *Geom.*). Ergo IAE = R (§. 87 *Arithm.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$AE : IE = mR : fm$$
$$c : \frac{cy}{z} = \frac{cc}{z} : \frac{ccy}{zz}.$$

Quare $fm.qm = ccyy : zz$. Est vero etiam $AI^2 = c^2y^2 : z^2$. Ergo $fm.qm = AI^2$.

Theorema. Si qm cum asymptoto CF parallela ducatur, rectangulum ex qm in Cq æquatur potentiæ hyperbolæ.

COROLLARIUM 1.

488. Quare si fiat $CI = AI = a$, $Cq = x$ & $qm = y$; erit $a^2 = xy$: quæ est æquatio naturam hyperbolæ intra asymptotos declarans.

COROLLARIUM 2.

489. Datis ergo asymptotis positione & latere potentiæ hyperbolæ CI vel AI, si in una asymptotorum CG sumantur abscissæ quotcunque, invenientur totidem semiordinatæ & per eas puncta quotlibet hyperbolæ determinabuntur, quærendo ad abscissas & latus potentiæ CI tertias proportionales (§. 271 *Geom.*). Nimirum sint AB & AC asymptoti, AD
Tab. = DI = a latus potentiæ hyperbolæ. Sit
XII. AP = x. Ducatur FG parallela ipsi AC
Fig. & PN parallela ipsi DI; erit PN = DI
120. (§. 257 *Geom.*) = a. Ducatur AN secans DI in H: erit (§. 268 *Geom.*)

$$AP ; PN = AD : DH$$
$$x ; a = a : DH$$

adeoque DH $= a^2 : x$. Quare si fiat P M ($= y$) = DH: erit $y = a^2 : x$, consequenter $yx = a^2$, adeoque punctum M in hyperbola (§. 488).

COROLLARIUM 3.

490. Quodsi abscissæ non computentur a centro C, sed ab alio quovis puncto L, dicaturque CL $= b$; erit Cq $= b + x$, consequenter $a^2 = by + xy$.

PROBLEMA 208.

491. *Determinare in hyperbola subtangentem* PT *&* *subnormalem* PR. Tab. III. Fig. 42.

Si parameter $= b$, axis transversus $= a$, AP $= x$, PM $= y$, RM $= z$, RA $= t$, erit PR $= t - x$, RM$^2 = z^2 - t^2 + 2tx - x^2$. Quare (§. 417 *Geom.*).

$$z^2 - t^2 + 2tx - x^2 = bx + bx^2 : a$$

$$az^2 - at^2 + 2atx - ax^2 = abx + bx^2$$

$$bx^2 + ax^2 + abx + at^2 = 0$$
$$\quad - 2atx - az^2$$

$$\overline{}\; b + a$$

$$x^2 + \frac{(ab - 2at)x}{b+a} + \frac{(at^2 - a^2)z^2}{b+a} = 0$$

Fiat jam ob rationes supra (§. 410) allatas $x - v = 0$: erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, & quia hæc æquatio eadem cum præcedente, habetur

$$\frac{ab - 2at}{b+a} = -2v$$

$$\overline{}\; b + a$$

ab —

$$ab - 2at = -2bv - 2av$$

$$ab + 2bv + 2av = 2at \quad |\ 2a$$

$$\frac{\frac{1}{2}b + bv + v = t}{a}$$

hoc est, quia $x = v$,

$\frac{1}{2}b + bx : a + x = t = RA$.

Ergo $PR = \frac{1}{2}b + bx : a + x - x = \frac{1}{2}b + bx : a = (\frac{1}{2}a + x) b : a$.

Theorema In hyperbola est ut axis transversus ad parametrum, ita aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad subnormalem.

Porro (§. 409)

$$PR : PM = PM : PT$$

$$\frac{(\frac{1}{2}a + x)b}{a} : \sqrt{\frac{(bx + bx^2)}{a}} = \sqrt{\frac{(bx + bx^2)}{a}} :$$

Reperitur ergo $PT = (abx + bx^2) : (\frac{1}{2}a + x) b = (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x)$.

Theorema. In hyperbola est ut aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad abscissam ita aggregatum ex integro axe transverso & abscissa ad subtangentem.

Denique $AT = (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x) - x = (ax + x^2 - \frac{1}{2}ax - x^2) : (\frac{1}{2}a + x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$.

Theorema. In hyperbola est ut aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad abscissam, ita semiaxis transversus ad rectam AT inter verticem & tangentem interceptam.

PROBLEMA 209.

492. *Ducta* NO *tangenti* TM *parallela, & ex centro* C *per contactum* M *recta* CQ, *quæ* NO *secat in* G, *determinare rationem segmentorum* GN *&* GO. Tab. V. Fig. 52.

Demittatur ex N perpendicularis NS ad axem AS continuanda in D, donec rectæ OD axi AS parallelæ occurrat in D. Ducantur porro HG ad ND & GF, MP, OL ad axem AS perpendiculares: erit GI ipsi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Sit AB axis transversus $= a$, $AP = x$, $PM = y$, $PC = \frac{1}{2}a + x = p$, $GI = HS = v$, $GF = HD = z$, erit $IF = DS = LO = z - v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = GI : IC$$

$$y : p = v : \frac{pv}{y}$$

Ob parallelas TM & GO (§. 233 *Geom.*) angulus K = T & ob parallelas KI & OF *per constr.* angulus K = O, consequenter O = T. Quare cum præterea F & P sint recti; erit (§. 267 *Geom.*)

$$PM : PT = GF : FO$$

$$y : \frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x} = z : \frac{(ax + x^2)z}{(\frac{1}{2}a + x)y}$$

Ponatur brevitatis gratia $ax + x^2 = q$ & $\frac{1}{2}a + x = p$ ut ante; erit

 FO

$FO = qz : py$. Ergo $LC = IC - FO = pv : y - qz : py = (p^2v - qz) : py$ & $LA = LC - AC = (p^2v - qz - \frac{1}{2}apy) : py$, $LB = LC + CB = (p^2v - qz + \frac{1}{2}apy) : py$. Est vero (§.466) $AP.PB : AL.LB = PM^2 : OL^2$

$$q : \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2y^2} = y^2 : OL$$

Quare

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2q}$$

Jam $yy = (ax + xx)b : a$ (§.459). Cum itaque posuerimus $ax + xx = q$; $yy = bq : a$. Hoc valore in expressione ipsius OL^2 substituto habetur $OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq}{p^2q}$. Enimvero $LO^2 = z^2 - 2zv + v^2$. Habemus adeo

$$z^2 - 2zv + v^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq}{p^2q}$$

$$p^2qz^2 - 2p^2qzv + p^2qv^2 = p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq$$

$$\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2 = q^2z^2 - p^2qz^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q} = z^2.$$

Quodsi HN dicatur z & calculus eodem modo instituatur; reperietur denuo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{p^2 - p^2q}$. Tab. IV. Fig. 47.
Unde liquet esse $HN^2 = GF^2 = HD^2$, consequenter $HN = HD$. Quoniam igitur (§.268 *Geom.*) $HN : HD = NG : GO$; erit $NG = GO$.

Theorema. Recta CQ ex centro C per contactum M ducta dividit rectas NO tangenti TM parallelas bifariam.

COROLLARIUM.

493. Est itaque CQ diameter, NO ordinatim ad eam applicata (§.368); MC vero est semidiameter transversa.

PROBLEMA 210.

494. *Ductis duabus rectis* Hm *&* mK *ex eodem hyperbolæ puncto* m, *utrinque in asymptotis* CQ *&* CT *terminatis, itidemque duabus aliis* LN *&* NO *prioribus parallelis; determinare rationem rectangulorum* Hm.mK *&* LN.NO. Tab. V. Fig. 53.

Ducantur ordinatæ ad axem utrinque usque ad asymptotos continuandæ Rr & QT.

Sit $Rm = y$, $QN = z$, $TN = t$. Quoniam $Rm.mr = QN.NT$ (§.484); erit (§.299 *Arithm.*)

$$Rm : QN = TN : mr$$
$$y : z = t : \frac{tz}{y}$$

Sit

Sit porro $Hm = a$, $mK = b$. Quoniam ob parallelas mr & NT, angulus $r = T$ & ob parallelas K m & NO, $K = O$ (§. 233 *Geom.*) erit (§. 267 *Geom.*)

$$mr : Km = TN : NO$$
$$\frac{tz}{y} : b = t : \frac{by}{z}$$

Ob similem rationem, nempe similitudinem △△ QLN & RHm

$$Rm : Hm = QN : LN$$
$$y : a = z : \frac{az}{y}$$

Ergo $LN . NO = abzy : zy = ab$. Est vero etiam $Hm . mK = ab$. Sunt igitur duo ista rectangula æqualia.

Theorema. Si intra asymptotos hyperbolæ ex ejus puncto m ducantur utcunque duæ rectæ Hm & mK & iis aliæ duæ parallelæ LN & NO; erit $Hm . mK = LN . NO$.

Idem invenitur, si ductæ rectæ Hmk agatur parallela LNo. Nempe in hoc etiam casu $Hm . mK = LN . NO$.

COROLLARIUM.

495. Omnia igitur rectangula ex rectis eidem Hk vel duabus Hm & mK parallelis eodem modo formata inter se æqualia sunt.

Tab. V. Fig. 54.

PROBLEMA 211.

496. *Si recta* Hk *utcunque intra asymptotos* CQ *&* CT *ducatur, determinare rationem segmentorum* HE *&* mk *inter hyperbolam & asymptotos interceptorum.*

Ducantur per E & m rectæ IG & Rr ad axem normales, fiatque $Rm = a$, $IE = b$, $EG = c$, $Hm = x$, $mk = y$. Quia $IE . EG = Rm . mr$ (§. 484); erit (§. 299 *Arithm.*)

$$mR : IE = EG : mr$$
$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Porro ob IG ipsi Rr parallelam (§. 268 *Geom.*)

$$mR : Hm = IE : EH$$
$$a : x = b : \frac{bx}{a}$$
$$rm : km = EG : Ek$$
$$\frac{bc}{a} : y = c : \frac{ay}{b}$$

Est itaque $Ek . EH = abxy : ab = xy = Hm . mk$. Quare

$$Ek : mk = mH : HE$$
$$Ek - mk : mk = mH - HE : HE$$ (§. 193 *Arithm.*)

h. e. $Em : mk = Em : HE$,

consequenter $mk = HE$ (§. 177 *Arithm.*).

Theorema. Si inter asymptotos recta Hk utcunque ducatur, segmenta HE & mK inter hyperbolam & asymptotos utrinque intercepta æqualia sunt.

CO-

COROLLARIUM 1.

497. Quando fit $Em = 0$; recta H k hyperbolam tangit. Tangens adeo FD inter asymptotos intercepta in contactu V bifariam dividitur.

COROLLARIUM 2.

498. Rectangulum itaque ex segmentis Hm & mk rectæ tangenti FD parallelæ æquatur quadrato tangentis dimidiæ DV (§.495).

PROBLEMA 212.

Tab. V. Fig. 54. 499. *Determinare relationem semiordinatæ* PM *ad diametri abscissam* AP.

Sit AB diameter transversa, DE diameter conjugata, adeoque ordinatæ NM parallela, in C centrum hyperbolæ & CQ atque CR sint ejus asymptotæ. Fiat $DA = c$, $CA = r$, $PM = y$, $CP = v$ & $CB = AC$: erit (§. 268 *Geom.*)

$$CA : DA = CP : PR$$
$$r : c = v : \frac{cv}{r}$$

Quare $RM = \frac{cv}{r} - y = \frac{cv - ry}{r}$ & $MQ = \frac{cv + ry}{r}$, consequenter $RM.MQ = (c^2v^2 - r^2y^2) : r^2$. Est vero $RM.MQ = DA^2 = c^2$ (§.498). Habemus itaque

$$(c^2v^2 - r^2y^2) : r^2 = c^2$$
$$\overline{} r^2$$
$$c^2v^2 - r^2y^2 = r^2c^2$$
$$c^2v^2 - r^2c^2 = r^2y^2$$

quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam,

$$y^2 : v^2 - r^2 = c^2 : r^2$$
$$PM^2 : AP.PB = DA^2 : AC^2$$

Est nimirum $BP = BC + CP = r + v$ & $AP = CP - CA = v - r$, adeoque $AP.PB = (v - r)(v + r) = v^2 - r^2$.

Theorema. Quadratum semiordinatæ in hyperbola est ad rectangulum ex abscissa & aggregato ex diametro transversa AB & abscissa AP, ut quadratum semidiametri conjugatæ AD ad quadratum semidiametri transversæ CA.

COROLLARIUM.

500. Quodsi fiat $AP = x$, & $2r = AB = a$, erit $v^2 - r^2 = ax + x^2$, consequenter $y^2 = (c^2ax + c^2x^2) : \frac{1}{4}aa = \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$. Fiat $4c^2 : a = b$; erit $y^2 = bx + bx^2 : a$. Eadem ergo æquatio hyperbolæ naturam definit respectu diametri, quæ eam exprimit respectu axis, estque parameter teria proportionalis ad diametros conjugatas DE & AB. Unde liquet easdem proprietates hyperbolæ competere respectu diametri, quæ superius

perius ex æquatione fundamentali respectu axis deduximus..

PROBLEMA 213.

Tab. V. Fig. 54. 501. *Ductis AF & TN asymptoto CR parallelis, determinare rationem rectanguli ex TN in TC ad rectangulum ex AF in FC.*

Sit $CF = a$, $AF = b$, $AD = c$, $RN = z$, erit ob $AE = DA$ etiam $EF = FC = a$ (§. 268 *Geom.*). Et quoniam $RN . NQ = DA^2$ (§.498), erit (§. 299 *Arithm.*).

$$RN : DA = DA : NQ$$
$$z : c = c : \frac{c^2}{z}$$

Porro (§. 268 *Geom.*)

$$AE : AF = QN : TN$$
$$c : b = \frac{c^2}{z} : \frac{bc}{z}$$
$$AE : FE = QN : TQ$$
$$c : a = \frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z}$$
$$QN : QT = RN : TC$$
$$\frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z} = z : \frac{az}{c}$$

Ergo $TC . TN = \frac{azbc}{cz} = ab = CF.AF$.

Theorema. Si ex vertice A & quocunque parabolæ puncto N ducantur AF & TN cum asymptoto CR parallelæ; erit rectangulum ex TN in TC æquale rectangulo ex FA in FC.

COROLLARIUM.

502. Quodsi adeo fiat $TC = x$, $TN = y$; æquatio hyperbolæ naturam inter asymptotos respectu diametri declarans erit $xy = ab$.

PROBLEMA 214.

503. *Determinare quantitatem rectæ FO ex foco F ad Tangentem hyperbolæ TM perpendicularis.* Tab. XII. Fig. 118.

Eodem prorsus, quo supra (§. 457), modo reperitur $FO.RM = PR.TF$, ut verba singula huc transcribere liceat.

Theorema. Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantiæ foci a semiordinata atque subtangentis TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari.

PROBLEMA 215.

504. *Si in F fuerit focus hyperbolæ & MR ad eam normalis, HR vero normalis ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam; determinare quantitatem segmentorum MH & HF.* Tab. XII. Fig. 118.

Sit parameter $= b$, axis $= a$, distantia foci a centro $= c$, erit $FM = c$

$=c-\frac{1}{2}a+2cx:a$ (§. 470), PR$=(\frac{1}{2}ab+bx):a$ & AT$=\frac{1}{2}ax:(\frac{1}{2}a+x)$ (§. 491), AF$=c-\frac{1}{2}a$, TF$=\frac{1}{2}ax:(\frac{1}{2}a+x)+c-\frac{1}{2}a=ax:(a+2x)+c-\frac{1}{2}a=(ac-\frac{1}{2}a^2+2cx):(a+2x)$. Ducta FO ad Tangentem TM parallela, reperitur prorsus ut supra, iisdem retentis verbis, FM : TF = PR : MH (§. 458). Quare

$$\frac{c-\frac{1}{2}a+2cx}{a} : \frac{ac-\frac{1}{2}a^2+2cx}{a+2x} = \frac{\frac{1}{2}ab+bx}{a} : MH$$

h. e. $2ac-a^2+4cx : \frac{ac-\frac{1}{2}a^2+2cx}{a+2x} =$

$ab+2bx : MH$ (§. 184 *Arithm.*)

$$\frac{2ac-a^2+4cx}{a+2x} : \frac{ac-\frac{1}{2}a^2+2cx}{a+2x} = b : MH$$ (§. 183 *Arithm.*).

Est ergo MH$=\frac{1}{2}b$ (§. 149 *Arith.*).

Theorema. Si MR fuerit ad hyperbolam normalis & ex R ducatur ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO 42.

Tab. IV. Fig. 51. 505. *Hyperbola æquilatera* dicitur, in qua axes conjugati AB & DE sunt æquales.

COROLLARIUM 1.

506. Cum parameter sit tertia proportionalis ad axes conjugatos (§. 461); ipsa etiam axibus æqualis est.

COROLLARIUM 2.

507. Quare si in æquatione $y^2 = bx + bx^2 : a$ fiat $b = a$; æquatio $y^2 = ax + x^2$ naturam hyperbolæ æquilateræ declarat.

COROLLARIUM 3.

508. Hinc quadrata ordinatarum y^2 & z^2 sunt inter se ut $ax + x^2$ & $av + v^2$, hoc est, ut rectangula ex abscissis in rectas compositas ex abscissis & axe determinato vel parametro.

COROLLARIUM 4.

509. Si sint CP$= x$, CA$= r$, erit AP$= x - r$ & PB$= r + x$, consequenter $y^2 = r^2 - x^2$

COROLLARIUM 5.

510. Quoniam AE = CA (§. 506); erit ACE angulus semirectus (§. 241 *Geom.*), consequenter angulus asymptotorum FCG in hyperbola æquilatera rectus.

PROBLEMA 216.

511. *Investigare naturam curvæ, quæ oritur, si conus* ABC *ita secetur ut sectionis axis* DE *sit lateri Coni* AC *parallelus, ipsum vero planum sectionis* DLN *ad basin sectionis triangularis* AB *perpendicularis.* Tab. V. Fig. 55.

Secetur conus plano HMI basi ANB parallelo: erit HMI circulus

lus (§. 468 *Geom.*), consequenter cum uterque circulus HMI & ANB per sectionem triangularem ACB secetur in HI & AB & a sectione data in PM & LN; erunt cum HI & AB, tum PM & LN inter se parallelæ (§. 499 *Geom.*). Quare cum sit EN perpendicularis ad AB *per hypoth.* erit etiam PM perpendicularis ad HI (§. 492 *Geom.*), consequenter cum DE & HI, itemque DE & AB sint in eodem plano sectionis triangularis, EN & PM etiam perpendiculares sunt ad DE (§. 484 *Geom.*) adeoque semiordinatæ ad axem DE applicatæ (§. 368. 370). Et quia AH parallela ipsi EP *per hypoth.* HP parallela ipsi AE *per demonstr.* erit $HP = AE$ (§. 257 *Geom.*). Sit jam $AE = HP = v$, $PI = t$, $DP = x$, $DE = z$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$DP : DE = PI : EB$$
$$x : z = t : \frac{tz}{x}$$

Ergo $PM^2 = HP \cdot PI$ (§. 377) $= tv$ & $EN^2 = AE \cdot EB$ (§. *cit.*) $= tzv : x$. Est ergo (positis $PM^2 = y^2$, $EN^2 = q^2$)

$$y^2 : q^2 = tv : \frac{tzv}{x}$$

hoc est $tvx : tzv$ (§. 124).
$x : z$

Est itaque curva DMNLD parabola (§. 402).

PROBLEMA 217.

512. *Si Conus* ABC *ita secetur, ut axis sectionis* DE *cum diametro basis* AB *continuata in* F *concurrat, & planum sectionis continuatum eam ad angulos rectos secet, invenire naturam curvæ ex hac sectione prodeuntis* DMNELD. Tab. V. Fig. 56.

Eodem, quo ante (§. 511) modo ostenditur esse PM & QM cum semiordinatas circulorum IMH & LNK, tum ellipseos DMNE. Sit jam $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = s$; erit $PE = a - x$, $QE = a - v$ & (§. 268 *Geom.*)

$$DP : PH = DQ : QK$$
$$x : t = v : \frac{vt}{x}$$

$$EQ : QL = EP : PI$$
$$a - v : s = a - x : \frac{sa - sx}{a - v}$$

Quare (§. 377) $PM^2 = HP \cdot PI = (tsa - tsx) : (a - v)$ & $QN^2 = KQ \cdot QL = vts : x$. Est adeo

$$PM^2 : QN^2 = \frac{tsa - tsx}{a - v} : \frac{vts}{x}$$

hoc est $tsax - tsx^2 : avts - v^2ts$
(§. 124) $ax - x^2 : av - v^2$

 Est

Est itaque curva DMNELD Ellipsis (§. 429).

PROBLEMA 218.

Tab. IV. Fig. 57. 513. *Si Conus* ABC *ita secetur, ut axis sectionis* DQ *continuatus cum latere Coni* AC *continuato in* E *concurrat, planum vero sectionis* DLN *secet diametrum basis* AB *ad angulos rectos; invenire naturam curvae* DLN, *quae ex hac sectione resultat.*

Eodem modo, quo paulo ante (§. 511), ostenditur, QN & PM esse semiordinatas cum circulorum HMI atque ANB, tum hyperbolae DMN.

Sit $ED = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $PI = s$; erit $EP = a + x$, $EQ = a + v$ & (§. 268 *Geom.*)

$$EP : PH = EQ : AQ$$

$$a + x : t = a + v : \frac{at + vt}{a + x}$$

$$DP : PI = DQ : QB$$

$$x : s = v : \frac{sv}{x}$$

Ergo $HP \cdot PI = ts$ & $AQ \cdot QB = (atsv + v^2ts) : (ax + x^2)$, consequenter ob $PM^2 = HP \cdot PI$ & $QN^2 = AQ \cdot QB$ (§. 377).

$$PM^2 : QN^2 = ts : \frac{atsv + v^2st}{ax + x^2}$$

hoc est, (§. 124)

$$1 : \frac{av + v^2}{ax + x^2}$$

$$ax + x^2 : av + v^2$$

Est itaque DLN hyperbola (§. 466), DE ejus axis transversus, E vertex hyperbolae oppositae.

SCHOLION.

514. *Hinc intelligimus, quod statim ab initio parabolam, hyperbolam atque ellipsin tanquam ex Cono sectas proponere & ex indole sectionis aequationem fundamentalem eruere licuisset, nisi nobis constitutum fuisset ostendere, quomodo ex aequationibus utcunque assumtis vel datis curvarum proprietates ac descriptiones per algebram & arithmeticam speciosam eruere debeamus. Immo potuissent quoque (quod faciunt alii) earundem curvarum per motum continuum descriptiones fundamenti loco assumi & inde aequationes elici: quod ut appareat, unum de ellipsi exemplum proposuisse suffecerit.*

RPOBLEMA 219.

515. *Sit descripta curva* ADMB, *circumductu regulae* GM *in instrumento, cujus structura ex Fig. 59. Tab. IV. manifesta est, ita ut paxilli in* E *defixi basis mobilis incedat per canalem* ab, *alterius vero in* F *per* cd; *investigare naturam ejus.* Tab. IV. Fig. 58.

Ex curvae descriptione manifestum, esse longitudinem regulae E Tab. IV. Fig. 59.

Maxi

M axi majori dimidio CB, partem vero ejus FM axi dimidio minori DC æqualem, consequenter distantiam paxillorum EF differentiam inter semiaxem majorem AC & semiaxem minorem DC.

Tab. IV. Fig. 58. Assumamus itaque quemcunque regulæ situm EFM & determinetur curva, in qua sit punctum ejus M. Demittantur ex puncto M ordinatæ ad utrumque axem PM & MR.

Fiat $CP = RM = x$, $PM = y$, $AC = EM = a$, $CD = FM = b$, erit $EF = a - b$ & (§. 268 *Geom.*)

$$EM : MR = EF : FC$$

$$a : x = a - b : \frac{ax - bx}{a}$$

Ergo $PF = x - x + bx : a = bx : a$.

Hinc $PM^2 = FM^2 - FP^2$ (§. 417 *Geom.*) $= b^2 - b^2x^2 : a^2 = (a^2b^2 - b^2x^2) : a^2 = y^2$.

Est adeo curva ADMD Ellipsis (§. 432).

DEFINITIO 43.

Tab. III. Fig. 38. 516. *Circuli superiorum generum* sunt curvæ, in quibus est $AP^m : PM^m = PM : PB$ vel etiam $AP^m : PM^m = PM^n : PB^n$.

COROLLARIUM 1.

517. Sit $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$; erit $PB = a - x$, consequenter $x^m : y^m = y : a - x$. Hinc æquatio infinitos circulos definiens est $y^{m+1} = ax^m - x^{m+1}$ & alios adhuc infinitos definiens $y^{m+n} = (a-x)^n x^m$.

COROLLARIUM 2.

518. Si $m = 1$, erit $y^2 = ax - x^2$, adeoque circulus primi generis sub hac æquatione una continetur. Si $m = 2, n = 1$, erit $y^3 = ax^2 - x^3$; quæ æquatio circulum secundi generis definit.

DEFINITIO 44.

519. *Parabolæ superiorum generum* sunt curvæ algebraicæ, quæ definiuntur per $a^{m-1}x = y^m$, e. gr. per $a^2x = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^4x = y^5$, $a^5x = y^6$ &c. Dicuntur a nonnullis *Paraboloides*: speciatim *Paraboloidem cubicalem* vocant, si $a^2x = y^3$; *Paraboloidem biquadraticalem*, si $a^3x = y^4$; *surdesolidalem* si $a^4x = y^5$ &c. Harum curvarum respectu *Parabola* primi generis superius explicata dicitur *Apolloniana*, item *quadratica*. Ad parabolas quoque referri solent curvæ, in quibus $ax^{m-1} = y^m$, veluti $ax^2 = y^3$, $ax^3 = y^4$: quæ a nonnullis *semiparabolæ* appellantur. Omnes comprehenduntur sub communi æquatione $a^m x^n = y^r$, quæ ad alias quoque curvas extenditur, veluti ad eas, in quibus $a^2x^2 = y^4$, $a^2x^3 = y^5$, $a^3x^4 = y^7$.

COROLLARIUM.

520. Cum in parabolis superiorum generum sit $y^m = a^{m-1}x$, si alia quæcunque semiordinata dicatur v, abscissa ipsi respondens z, erit $v^m = a^{m-1}z$, consequenter

$$y^m : v^m = a^{m-1}x : a^{m-1}z$$

hoc est, $x : z$.

Communis adeo parabolarum proprietas est, quod ordinatarum potentiæ rationem abscissarum habeant.

COROLLARIUM 2.

521. In semiparabolis vero est $y^m : v^m = ax^{m-1} : az^{m-1}, = x^{m-1} : z^{m-1}$, seu potentiæ semiordinatarum sunt ut potentiæ abscissarum uno gradu inferiores e. gr. in semiparabolis cubicalibus cubi ordinatarum y^3 & v^3 sunt ut quadrata abscissarum x^2 & z^2. Et in genere in omnibus curvis parabolæ agnatis $y^{m+n} : v^{m+n} = a^m x^n : a^m z^n = x^n : z^n$.

DEFINITIO 45.

522. *Ellipses infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m (a-x)^n$, quæ a nonnullis *Elliptoides* dicuntur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$. E. gr. *Elliptoidem cubicalem*, si $ay^3 = bx^2 (a-x)$: *Elliptoidem biquadraticalem* appellant ellipsin tertii generis, in qua $ay^4 = bx^2 (a-x)^2$. Harum curvarum respectu *Ellipsis* primi generis *Apolloniana* vocatur.

COROLLARIUM 1.

523. Si alia quæcunque ordinata dicatur v & abscissa respondens z; erit $av^{m+n} = bz^m (a-z)^n$, consequenter $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m (a-x)^n : bz^m (a-z)^n$ hoc est, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m (a-x)^n : z^m (a-z)^n$.

COROLLARIUM 2.

524. Si fiat $a = b$, erit $y^{m+n} = x^m (a-x)^n$, & si porro fiat $n = 1$, erit $y^{m+1} = x^m (a-x) = ax^m - x^{m+1}$; hoc est, ellipses superiorum generum degenerant in circulos superiorum generum.

DEFINITIO 46.

425. *Hyperbolas infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$, quæ a nonnullis *Hyperboloides* appellantur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m&$n > 1$ e. gr. $ay^3 = bx^2 (a+x)$. Et harum curvarum respectu *Hyperbola* primi generis *Apolloniana* salutatur.

COROLLARIUM.

526. Est ergo in infinitis hyperboloidibus $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m (a+x)^n : bz^m (a+z)^n$ hoc est, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m (a+x)^n : z^m (a+z)^n$.

DEFINITIO 47.

527. *Conos superiorum generum* appello, quorum bases & sectiones basibus parallelæ sunt circuli superiorum generum. Generatur istiusmodi Conus, si recta linea AC in puncto sublimi C fixa, sed quæ pro re nata magis aut minus extendi posse concipitur, Tab. V. Fig. 55.

circa

circa peripheriam circuli ANB convertatur.

PROBLEMA 220.

Tab. V. Fig. 55. 528. *Investigare naturas curvarum, quae prodeunt, si Coni superiorum generum ita secentur, ut axis sectionis DE sit lateri Coni AC parallelus, planum vero sectionis LDN secet diametrum basis AB ad angulos rectos.*

Eodem, quo supra (§.511), modo ostenditur, esse PM & EN inter se parallelas & cum circulorum HMI atque ANB, tum curvae DLN semiordinatas. Sit PM $= y$, EN $= q$, AE $=$ HP $= v$, DP $= x$, DE $= z$ PI $= t$; reperietur ut *in probl.* 216 (§.511) EB $= tz : x$. Est vero (§.516)

$$HP^m \; PM^m = PM : PI$$
$$v^m : y^m = y : t$$

$$y^{m+1} = tv^m$$

Porro $AE^m : EN^m = EN : EB$
$$v^m : q^m = q : (tz : x)$$

$$q^{m+1} = tzv^m : x$$

Quare $y^{m+1} : q^{m+1} = tv^m : \frac{tzv^m}{x}$

hoc est $1 : \frac{z}{x}$ (§.124).

seu $x : z$

Sunt ergo curvae istae parabolae superiorum generum (§.520).

Vel sit generaliter (§.516)

$$HP^m : PM^m = PM^n : PI^n$$
$$v^m : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n v^m$$

$$AE^m : EN^m = EN^n : EB^n$$
$$v^m : q^m = q^n : \frac{t^n z^n}{x^n}$$

$$q^{m+n} = \frac{t^n z^n v^m}{x^n}$$

Quare
$$y^{m+n} : q^{m+n} = t^n v^m : \frac{t^n z^n v^n}{x^n}$$
$$= x^n : z^n$$

Sunt itaque curvae DLN superiorum generum parabolis agnatae (§.521).

PROBLEMA 221.

529. *Investigare naturam curvarum, quae enascuntur, si coni superiorum generum ita secantur, ut axis sectionis DE cum diametro basis AB continuata in F concurrat, planum vero sectionis continuatum eandem ad angulos rectos secet.* Tab. V. Fig. 56.

Patet, ut supra (§.511) PM & QN esse inter se parallelas atque

que semiordinatas cum circulorum HMI & KNL, tum curvæ DMNE. Sit $DE=a$, $DP=x$, $DQ=v$, $PH=t$, $QL=s$, $PM=y$, $QN=z$; erit $PE=a-x$, $QE=a-v$ & reperietur ut *in probl.* 217 (§. 512) $QK=vt:x$, $PI=(sa-sx):(a-v)$. Est vero (§. 517)

$$IP^m : PM^m = PM^n : PH^n$$
$$\frac{s^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n s^m (a-x)^m : (a-v)^m$$

Porro $QL^m : QN^m = QN^n : KQ^n$

$$s^m : z^m = z^n : \frac{v^n t^n}{x^n}$$

$$z^{m+1} = t^n s^m v^n : x^n$$

Quare

$$y^{m+1} : z^{m+1} = \frac{t^n s^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : \frac{v^n t^n s^m}{x^n}$$

hoc est $(a-x)^m x^n : (a-v)^m v^n$

Sunt adeo curvæ istæ in numero ellipsium superiorum generum (§. 523).

PROBLEMA 222.

Tab. IV. Fig. 57. 530. *Investigare naturam curvarum, quæ gignuntur, si Coni superiorum generum ita secentur, ut axis sectionis* DQ *cum latere Coni continuato* AC *continuatus & ipse in* E *concurrat, planum vero sectionis* DLN *diametrum basis* AB *ad angulos rectos secet.*

Patet ut supra (§. 511), PM & QN esse inter se parallelas, atque semiordinatas cum circulorum HMI & KNL, tum curvæ DLN. Sit $DE=a$, $DP=x$, $DQ=v$, $PH=t$, $PI=s$; erit $EP=a+x$, $EQ=a+v$ & reperietur ut *in probl.* 218 (§. 513) $AQ=t(a+v):(a+x)$ & $QB=sv:x$. Est vero (§. 517)

$$PI^m : PM^m = PM^n : PH^n$$
$$s^m : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n s^m$$

Porro $QB^m : QN^m = QN^n : AQ^n$

$$\frac{s^m v^m}{x^m} : z^m = z^n : \frac{t^n (a+v)^n}{(a+x)^n}$$

$$z^{m+n} = \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

Quare.

$$y^{m+n} : z^{m+n} = t^n s^m : \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

hoc est (§. 124) $1 : \frac{v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$

seu $x^m (a+x)^n : v^m (a+v)^n$

Sunt

Sunt adeo curvæ hyperbolæ superiorum generum (§. 526.)

PROBLEMA 223.

Tab. V. Fig. 60. 531. *Diametro semicirculi* AB *jungatur ad angulos rectos recta* AT *ducanturque ex centro* C *secantes* QC. *Erigantur in* Q *normales* QM *ipsis* QR *æquales. Investigare naturam curvæ* AMP, *quæ est locus omnium punctorum* M *hac ratione inventorum.*

Sit AQ=PM=y, QM=QR=x, AB=a, erit (§. 379. *Geom.*) $y^2 = ax + x^2$.

Est adeo curva AMR hyperbola æquilatera, cujus axes & parameter diametro circuli AB æquales (§. 461.)

COROLLARIUM

532. Habemus adeo facilem hyperbolæ æquilateræ per innumera puncta M geometrice determinata descriptionem.

PROBLEMA 224.

Tab. XII. Fig. 121. 533. *Invenire æquationem hyperbolæ ad axem* CR *ex centro* C *ductæ & ad axem transversum* AB *normalem relatæ.*

Sit CQ=PM=x, CP=QM=y, CB=CA=a, erit BP=$a+y$, AP=$y-a$, adeoque BP. PA=y^2-a^2. Sit porro parameter=b, erit.

$$b : a = x^2 : y^2 - a^2$$

$$ax^2 = by^2 - a^2b$$

$$ax^2 + a^2b = by^2$$

$$\frac{ax^2}{b} + a^2 = y^2$$

COROLLARIUM.

534. Quodsi hyperbola fuerit æquilatera, erit $a = b$ (§. 505), consequenter $y^2 = x^2 + a^2$, sive $QM^2 = CQ^2 + CB^2$

DEFINITIO 48.

535. Si ducatur recta BD & alia AC ad ipsam in E perpendicularis, ex puncto autem C agantur rectæ quotcunque CM rectam BD secantes in Q, fiatque QM=QN=AE=EF; Curva, in qua sunt puncta M, dicitur a *Nicomede* inventore *Conchilis* seu *Conchois prima*; altera vero, in qua sunt puncta N, *Conchois secunda*; recta BD *regula*; punctum C *Polus*. Excogitavit autem instrumentum, quo motu continuo Conchois prima describi potest. Nimirum in regula AD excavatus est canalis, ut clavus teres regulæ mobili CB in F firmiter infixus intra eam libere moveri possit. Regulæ EG in K infigitur clavus alius, in fissuram regulæ mobilis CB immittendus. Quodsi regula BC ita Tab. VI. Fig. 61. Fig. 62.

ita moveatur, ut clavus F canalem AD percurrat; ſtylus in C Conchoidem primam deſcribet.

COROLLARIUM 1.

536. Sit $AP = x$, $AE = a$, erit $PE = MR = a - x$. Creſcentibus adeo x, decreſcit $a - x$ ſeu MR, adeoque curva continuo ad *regulam* BD propius accedit. Eodem modo patet, rectam NO continuo decreſcere debere, adeoque conchoidem quoque inferiorem ad regulam continuo propius accedere.

COROLLARIUM 2.

537. Quoniam tamen inter conchoidem utramque & rectam BD ſemper interjicitur recta QM vel QN ipſi AE æqualis (§. 535); neutra conchoidum cum recta BD concurrere poteſt, conſequenter BD eſt aſymptotus utriusque conchoidis.

PROBLEMA 225.

Tab. VI. Fig. 61. 538. *Invenire æquationem pro Conchoide.*

Sit $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = EP = x$, $ER = PM = y$, erit $CP = b + x$ & (§. 268. *Geom.*)

$$PE : MQ = EC ; CQ$$
$$x : \quad a = b : \frac{ab}{x}$$

Hinc $CM = a + ab : x = (ax + ab) : x$. Et quoniam $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 417. *Geom.*); erit $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2) : x^2$, conſequenter $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$: quæ eſt æquatio naturam conchoidis primæ explicans.

Sit $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$, $GN = EO = y$; erit $GC = b - x$ & (§. 268. *Geom.*)

$$EG : QN = GC : CN$$
$$x : \quad a = b - x : \frac{ab - ax}{x}$$

Habemus ergo ob $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 417. *Geom.*), $(a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2y^2$, hoc eſt, $a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 = b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2y^2$: quæ eſt æquatio naturam conchoidis inferioris declarans.

COROLLARIUM.

539. Eſt adeo conchois utraque linea tertii generis (§. 382).

DEFINITIO 49.

540. Aliæ *Conchoidum* ſpecies prodeunt, ſi fiat $CE : CQ = QM : AE$, vel indefinite ſi $CE^m : CQ^m = QM^m : AE^m$.

COROLLARIUM

541. Quare ſi $CE = b$, $EA = a$, $CQ = x$, $QM = y$, erit $ab = xy$ & pro infinitis conchoidibus $a^mb^m = x^my^m$.

SCHOLION.

542. *Æquatio hæc videtur eadem cum æquatione hyperbolæ inter aſympto-*

tos

tos (§.486); *eadem tamen non est, cum in præsente casu æquatio non exprimat relationem punctorum per rectas parallelas ad eandem rectam positione datam, quemadmodum in hyperbola.*

PROBLEMA 226.

543. *Invenire æquationem ad quodlibet punctum Conchoidis, in qua* CE : CQ = QM : AE.

Sit AE = a, CE = b, PM = y, PE = x, erit CP = $b + x$, $CP^2 = b^2 + 2bx + x^2$, $CM^2 = y^2 + b^2 + 2bx + x^2$ (§ 417. *Geom.*) & (§. 268. *Geom.*) CP : CM = CE : CQ = EP : QM. Quare CE. EP : CQ. QM = CP^2 : CM^2 (§.213. *Arithm.*), hoc est, ob CQ. QM = CE. EA *per hypoth.*

CE. EP : CE. EA = CP^2 : CM^2 hoc est (§.181), EP : EA = CP^2 : CM^2

$$x : a = b^2 + 2bx + x^2 : y^2 + b^2 + 2bx + x^2$$

$$ab^2 + 2abx + ax^2 = y^2x + b^2x + 2bx^2 + x^3$$

quæ est æquatio desiderata.

DEFINITIO 50.

Tab. VI. Fig. 63. 544. Diametro AB semicirculi AOB jungatur ad angulos rectos recta indefinita BC. Ducatur recta AH fiatque AM = IH, vel in altero quadrante LC = AN: erit punctum M, itemque L in curva AMOL, quam *Cissoidem* dixit *Diocles* inventor.

COROLLARIUM 1.

545. Ducantur rectæ PM & KI ad AB normales; erunt eædem inter se parallelæ (§. 256. *Geom.*) & (§. 268. *Geom.*) AP : KB = AM : IH. Sed AM = IH (§. 544). Ergo AP = KB (§. 149. *Arithm.*), consequenter AK = PB (§. 88. *Arithm.*) & PN = IK.

COROLLARIUM 2.

546. Eodem modo patet, Cissoidem AMO semicirculum AOB bifariam dividere. Est enim AO : OF = AG : GB (§. 268. *Geom.*). Sed AO = OF (§. 544.). Ergo AG = GB (§. 149. *Arithm.*). Est itaque ANO quadrans.

COROLLARIUM 3.

547. AK : KI = KI : KB (§. 327. *Geom.*), hoc est, AK : PN = PN : AP (§. 545). Porro AK : (KI) PN = AP : PM (§. 268. *Geom.*). Ergo PN : AP = AP : PM (§. 167. *Arithm.*). Sunt adeo AK, PN, AP & PM quatuor lineæ continue proportionales &, si fiat PN = v, AP = x, PM = y, $x^2 = vy$. Eodem modo ostenditur esse AP, PN, AK, KL continue proportionales.

PROBLEMA 227.

548. *Invenire æquationem, quæ naturam Cissoidis* AMOL *declarat.*

Sit AB = a, AP = x, PM = y; erit AK = PB (§. 545.) = $a - x$, $KI^2 = PN^2 = ax - x^2$ & (§. 547. 124.)

$$AK^2 : PN^2 = AP^2 : PM^2$$

$$a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$$

$$a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 = ax^3 - x^4$$

$$a - x$$

ay^2

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

hoc est, $(a-x)\,y^2 = x^3$

Theorema. In Cissoide *Dioclis* cubus abscissæ AP æquatur solido ex quadrato semiordinatæ PM in complementum diametri circuli genitoris PB.

COROLLARIUM 1.

549. Quando punctum P cadit in B, tum fit $x = a$ & BC $= y$, consequenter $y^2 = \frac{a^3}{0}$. Quare $0 : 1 = a^3 : y^2$, hoc est, valor ipsius y fit infinitus, adeoque Cissois AMOL cum BC nunquam concurrit. Est ergo BC Cissoidis asymptotus.

COROLLARIUM 2.

550. Cissois est linea secundi generis (§. 382).

SCHOLION.

551. *Veteres tam Conchoide, quam Cissoide usi sunt ad inveniendas duas medias continue proportionales inter duas rectas datas, quemadmodum docet* Pappus.

DEFINITIO 51.

Tab. VI. Fig. 64. 552. Si recta AX dividatur in partes quotcunque æquales, ipsique in punctis divisionum A, P, p &c. jungantur rectæ AN, PM, pm &c. continue proportionales, puncta N, M, m &c. in curva existunt, quæ *Logistica*, itemque *Logarithmica* vocari solet.

COROLLARUM. 1.

553. Sunt ergo abscissæ AP, Ap &c, semiordinatarum PM, pm &c. logarithmi (§. 334. *Arithm*).

COROLLARIUM. 2.

554. Hinc si AP $= x$, A$p = v$, PM $= y$, $pm = z$, & logarithmi ipsorum y & $z = ly$ & lz; erit $x = ly$ & $v = lz$, consequenter $x : v = ly : lz$, hoc est, denominatores rationum AN : PM & AN : pm sunt inter se ut abscissæ AP & Ap.

COROLLARIUM 3.

555. Quamobrem infinitas alias logisticas excogitare licet, si fiat $x^m : v^m = ly : lz$, ut nempe abscissarum potestates aut radices quæcunque (*m* nempe numerum fractum denotante) sint semiordinatarum logarithmi.

COROLLIRRIUM 4.

556. Cum semiordinatæ pm continuo decrescant, ratione AN ad pm cum abscissis continuo crescente (§. 553. *Analys.* & §. 205. *Arithm.*) curva ad axem AX continuo propius accedit. Quodsi pm ponatur fieri nihilo æqualis, ratio ipsius AN in infinitum augetur, consequenter & abscissa AP (§ 554) Quare logistica nonnisi infinito intervallo cum axe concurrit, adeoque AX est ejus asymptotus.

DEFINITIO 52.

557. Si quadrans circuli in partes quotcunque æquales in punctis P, p. p. &c. dividatur & ex radiis CP, Cp, Cp, &c. resecentur CM, Cm, Cm &c. continue proportionales; puncta M, m, m, &c. erunt in *Logistica spirali*. Tab. VI. Fig. 65.

COROL-

COROLLARIUM 1.

558. Sunt ergo arcus AP, *Ap* &c. logarithmi ordinatarum CM, *Cm* &c.

COROLLARIUM 2.

559. Unde liquet, infinitas logisticas spirales excogitari posse (§. 555.)

DEFINITIO 53.

Tab. VI. Fig. 66. 560. Si quadrans BCD bifariam dividatur in G & arcus BG, GD denuo subdividantur bifariam in E & F, atque ita porro; axis AC arbitrariæ longitudinis assumtus eodem modo dividatur in partes æquales *Ah*, *hi*, *ik*, *k*C, tandemque in punctis *h*, *i*, *k*, *c* applicentur normales *eh*, *ig*, *kf*, *cd* ipsis HE, IG, KF CD æquales; puncta *a*, *e*, *g*, *f*, *d* erunt in Linea, a *Leibnitio* inventore *Linea Sinuum* dicta,

COROLLARIUM.

561. Cum HE, IG, KF, CD sint sinus arcuum BE, BG, BF, BD (§. 2. *Trigon.*) erunt abscissæ *Ah*, *Ai*, *Ak*, AC ut arcus seu anguli; semiordinatæ *e h*, *ig*, *kf*, *Cd*, ut sinus eorundem arcuum seu angulorum.

DEFINITIO 54.

Tab. VI. Fig. 66. 562. Iisdem factis, quæ in definitione præcedente fieri præcepimus, fiant *eh*, *ig*, *kf* &c. tangentibus BL, BM, BN &c. vel secantibus CL, CM, CN &c. æquales; Curvæ adhuc aliæ gignentur, quas *Lineas Tangentium* & *Secantium* appellare libet.

COROLLARIUM.

563. In linea tangentium abscissæ sunt ut arcus seu anguli, semiordinatæ ut eorundem tangentes: in secantium vero linea abscissæ itidem sunt ut arcus seu anguli, semiordinatæ ut eorundem secantes.

DEFINITIO 55.

564. Quadrans arcus ANB dividatur in partes quotcunque æquales in N, *n* &c. per continuam bisectionem; in totidem dividatur radius AC per puncta P, *p* &c. Ducantur radii CN, *cn* &c. denique ex punctis P, *p* &c. erigantur perpendiculares PM, *pm* &c. istis in punctis M, *m* &c. occurrentes: erunt puncta M, *m* &c. in curva, quam *Dinostrates* inventor *Quadraticem* appellavit. Tab. VI. Fig. 67.

COROLLARIUM.

565. Est ergo AB : AN = AC : AP. Quare si fiat AB = a, AC = b, AN = x, AP = y; erit $ay = bx$.

DEFINITIO 56.

566. Si quadrans ANB & ejus radius in partes æquales dividantur ut in definitione præcedente, & ex punctis P, *p* &c. agantur rectæ Tab. VI. Fig. 68.

 PM,

PM, *pm* &c. ipsi CB; & ex punctis N, *n* &c. rectæ NM, *nm* &c. ipsi AC parallelæ: puncta M, *m* &c sunt in *Quadratrice Tschirnhusiana* a DN. *de Tschirnhausen* ad imitationem alterius excogitata (i).

COROLLARIUM. I.

567. Cum etiam hic AB : AN = AC : AP; quadratrix quoque Tschirnhusiana continetur sub æquatione $ax = by$.

COROLLARIUM 2.

568. Quoniam PM = QN, erit PM Sinus arcus AN (§. 2. *Trigon*). Quare cum sit AP : Ap = AN : An (§. 566); abscissæ Quadraticis hujus sunt ut arcus & semiordinatæ ut sinus eidem respondentes, quemadmodum in linea sinum (§. 561).

DEFINITIO 57.

Tab. VII. Fig. 69. 569. Peripheria circuli APpA dividatur in partes quotcunque æquales in puncto *p* per continuam bisectionem. In totidem partes dividatur radius CA, fiatque CM parti uni, Cm vero duabus &c. partibus radii æqualis. Erunt puncta M, *m*, *m*, &c. in linea curva, quam ab inventore *Archimede* dicunt *spiralem* vel *Helicem Archimedeam*. Dicitur autem *Spiralis prima*, quia continuari potest, circulo duplo radio descripto: immo *secunda* continuatur, descripto radio circulo triplo & ita porro in infinitum.

COROLLARIUM I.

570. Est ergo AP ad peripheriam ut Cm ad radium. Quare si peripheria dicatur p, radius AC $= r$, AP $= x$, PM $= y$, erit CM $= r-y$, consequenter ob $p : r = x : r-y$; habebimus $pr - py = rx$.

COROLLARIUM 2.

571. Si CM = y; erit $rx = py$: quam æquationem cum quadratice tam *Dinostratis*, quam *Tschirnhusii* communem habet spiralis.

COROLLARIUM 3.

572. Quare pro infinitis spiralibus & quadratricibus erit $r^n x^m = p^n y^m$.

DEFINITIO 58.

573. *Cyclois* vel *Trochois* est curva, quam describit punctum *a* in peripheria circuli, si circulus super recta AC rotatur. Tab. VII. Fig. 70.

COROLLARIUM I.

574. Recta igitur AC peripheriæ; AD semiperipheriæ circuli æqualis est, & in quocunque circuli genitoris situ A*d* arcui P*d*.

COROLLARIUM 2.

575. Si PL ducatur cum AD parallela; erit PM arcui circuli genitoris BM æqualis. Est enim P*d* = A*d* & hinc P*b* = *d*D (§. 574). Quare cum NL = D*d* (§. 226 *Geom.*) & ob P*b* = MB etiam PN = ML (§. 12. *Trigon.*); erit etiam PN + NM = PM =

(i) in Medicina Mentis part. 2. p. 114.

PM = ML + NM = NL = D*d*, consequenter ob D*d* = P*b* = MB *per demonstr.* PM = MB. Sumto igitur arcu MB pro abscissa, PM pro semiordinata, si BM = x, PM = y; erit $x = y$.

DEFINITIO 59.

576. *Epicyclois* describitur, si circulus non ut in præcedente definitione super recta, sed super peripheria alterius circuli incedat. Dicitur *Epicyclois superior*, si circulus genitor per peripheriæ convexitatem rotatur: *Epicyclois inferior*, si ejus concavitatem emetitur.

SCHOLION 1.

577. *Logarithmica, logistica spiralis, linea sinuum, linea tangentium. linea secantium, quadratrix Dinostratis, quadratrix Tschirnhusiana, Spiralis Archimedea, Cyclois Epicyclois sunt lineæ transcendentes: neque enim per æquationes algebraicas explicari possunt. Tradidimus equidem pro aliquibus earum æquationes; veruntamen cum in his assumserimus arcus circulares in numerum indeterminatarum, æquationes algebraicæ non sunt. Supposuimus enim superius, æquationes algebraicas relationem, quam habent puncta curvarum ad axem vel diametros, per solas lineas rectas explicare debere.*

SCHOLION 2.

578. *Innumeræ autem curvæ aliæ tam algebraicæ, quam transcendentes excogitari possunt & actu excogitatæ sunt a Geometris. Sed de his omnibus agere minime consultum est. Trademus autem in analysi infinitorum methodos generales, quibus non modo curvarum hactenus explicatarum, sed etiam aliarum quarumcunque symptomata, si quando iis opus habemus, erui possunt. Ut tamen appareat, quomodo plures excogitari possint; unum alterumque exemplum addere lubet.*

PROBLEMA 228.

§. 579. *Invenire naturas curvarum, quæ prodeunt, si semiordinatæ* PM *continuentur in* N, *donec fiant chordis* AM *æquales.* Tab. XII. Fig. 122.

Facile apparet, curvas infinitas, immo infinitas earum series construi posse. Æquatio igitur in dato casu speciali eruenda ex æquatione curvæ genetricis ABC. Sit ea circulus, cujus diameter a. Sit in omni casu AP $= x$, PN $= y$; erit PM$^2 = ax - x^2$ (§. 377). Quare cum AP$^2 = x^2$ & AM^2 = AP^2 + PM^2 (§. 417. *Geom.*); erit AM$^2 = ax$, consequenter æquatio ad curvam genitam AND $y^2 = ax$. Est itaque curva AND parabola (§. 388).

Sit curva genetrix AMC parabola: erit PM$^2 = ax$ (§. 388), consequenter AM^2 = PN$^2 = ax + x^2$. Quoniam itaque æquatio ad curvam AND $y^2 = ax + x^2$; erit ea hyperbo-

perbola æquilatera, cujus axis transversus $= a$ (§. 507).

Sit curva genetrix AMC hyperbola æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$, consequenter $AM^2 = PN^2 = ax + 2x^2$. Æquatio itaque ad curvam AND $y^2 = ax + 2x^2$, adeoque eadem hyperbola scalena, cujus parameter a, axis transversus vero $= \frac{1}{2} a$ (§. 459).

Sit AMC parabola secundi generis, erit $PM = \sqrt[3]{a^2 x}$ (§. 519), adeoque $PM^2 = \sqrt[3]{a^4 x^2}$ & $PN^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4 x^2}$. Cum itaque æquatio ad curvam sit $y^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4 x^2}$; erit $(y^2 - x^2)^3 = a^4 x^2$, seu $y^6 - 3x^2 y^4 + 3x^4 y^2 = x^6 + a^4 x^2$.

SCHOLION.

§. 580 Patet per problema præsens plurimarum curvarum descriptiones facillimo negotio detegi posse: quod idem per sequentia quoque problemata intelligitur. Nec minus liquet, eodem modo ad axem AB *applicari posse tangentes, subtangentes, normales, subnormales & quascunque alias lineas eodem modo determinatas. Hoc pacto subinde theoremata non inelegantia reperiuntur, qualia in ipsa resolutione problematis præsentis continentur,* v.gr. *Quod, si parabola circa diametrum circuli describatur, chordæ circuli* AM *sint semiordinatis parabolæ* PN *æquales.*

Tab. XII.

PROBLEMA 229.

§. 581. *Investigare naturas curvarum, quæ gignuntur, si ad chordam* AM *curvæ genetricis* AMC *erigatur perpendicularis* AN *semiordinatam* PM *ultra axem* AB *continuatam secans in* N. Fig. 123.

Sit curva genetrix AMC: Quoniam MAN angulus rectus *per hypothesin*; erit PM : AP = AP : PN (§. 327. *Geom.*), consequenter $PM^m : AP^m = AP^m : PN^m$ (§. 124), adeoque $PN^m = AP^{2m} : PM^m$, consequenter si $AP = x$, $PN = y$; $y^m = x^{2m} : PM^m$. Valor igitur ipsius PM & exponens m ex æquatione curvæ genetricis AMC determinantur.

Sit AMC circulus; erit $PM^2 = ax - x^2$, adeoque æquatio ad curvam ANR $y^2 = x^4 : (ax - x^2) = x^3 : (a - x)$. Est igitur curva ANR Cissois *Dioclis*.

Sit curva genetrix parabola *Apolloniana*: erit $PM^2 = ax$, adeoque $y^2 = x^4 : ax = x^3 : a$, hoc est, $ay^2 = x^3$. Est igitur ANR Parabola secundi generis (§. 519).

Sit in genere curva genetrix quædam ex parabolis infinitis, quæ definiuntur per æquationem $PM^m = ax^{m-1}$, adeoque $y^m = x^{2m} : ax^{m-1} = x^{m+1} : a$, hoc est, $ay^m = x^{m+1}$. Est igitur ANR parabola proxime superior genetrice. Unde patet modus describendi omnes parabolas

bolas in infinitum, quæ continentur ſub æquatione $y^m = ax^{m-1}$.

Sit curva genetrix hyperbola æquilatera: erit $PM^2 ax + x^2$, adeoque $y^2 = x^4 : (ax + x^2) = x^3 : (a + x)$. Eſt igitur ANR curva ſecundi generis affinitatem quandam habens cum Ciſſoide; ſed quæ peculiari nomine deſtituitur.

Sit curva genetrix ellipſis: erit $PM^2 = (abx - bx^2) : a$, adeoque $y^2 = ax^4 : (abx - bx^2)$ hoc eſt $by^2 = ax^3 : (a - x)$.

SCHOLION I.

582. *Si circuli ſuperiorum generum ſumuntur pro genetrice, Ciſſoides ſuperiorum generum erunt genitæ.*

PROBLEMA 230.

Tab. XII. Fig. 124. 583. *Sit curva genetrix* AMK, *recta* AT *ad axem* AX *normalis*, AS *magnitudinis conſtantis*, *inveſtigare naturam curvæ, in qua eſt punctum* N, *quod determinatur, demiſſa ex* S *perpendiculari* SR *ad ſemiordinatam genetricis* PM *& ducta recta* QN *per punctum curvæ genetricis* M *axi* AX *parallela, rectæ* AN *ex vertice* A *per punctum* R *ductæ occurrente in* N.

Sit AS $= a$, AQ $= x$, QN $= y$, erit ob parallelas SR & QN (§. 268. *Geom.*).

$$AS : (SR)\ QM = AQ : QN$$
$$a : QM = x : y$$
$$\text{adeoque } \frac{QM \cdot x}{a} = y$$

Sit AMK parabola Apolloniana, erit QM $= x^2 : a$. Eſt igitur

$$y = x^3 : a^2$$
$$a^2 y = x^3$$

quæ eſt æquatio ad parabolam ſecundi generis (§. 519).

Sit AMK quædam ex infinitis parabolis, erit QM $= x^m : a^{m-1}$ (§. *cit.*), adeoque $y = x^{m+1} : a^m$ conſequenter $a^m y = x^{m+1}$. Eſt igitur curva genita parabola proxime ſuperior genetrice, patetque ſimul modus deſcribendi parabolas omnes in infinitum, quæ continentur ſub æquatione $a^{m-1} x = y^m$.

CAP. VI.
DE LOCIS GEOMETRICIS.

DEFINITIO 60.

584. Locus Geometricus est linea, per quam construitur problema indeterminatum. In specie *Locus ad rectam* dicitur, si linea recta æquationi construendæ sufficit; *Locus ad circulum*, si circulo utendum & ita porro.

DEFINITIO 61.

585. Loca ad lineam rectam & circulum veteres dixere *Loca plana*: quæ vero sunt ad parabolam, ellipsin aut hyperbolam, *Loca solida*. Commodius Loca in ordines distinguuntur secundum numerum dimensionum, ad quem assurgunt quantitates indeterminatæ. Sic *Locus primi ordinis* est, si æquatio $x = ay : c$. *Locus secundi seu quadratici ordinis*, si e. gr. $y^3 = ax$ vel $y^2 = a^2 - x^2$ &c. *Locus tertii seu cubici ordinis*, si e. gr $y^3 = a^2 x$, vel $y^3 = ax^2 - x^3$ &c.

PROBLEMA 231.

Tab. VII. Fig. 71. 586. *Construere loca ad rectam.*

Si $y = ax : b$, $y = ax : b + c$, $y = ax : b - c$, $y = c - ax : b$; Locus semper est ad rectam. Sit enim angulus datus CAB, in quo fiat $AI = b$, $IE = a$: ductis ipsi EI parallelis quibuscunque PM, *pm* &c. erit $AP = x$, $PM = y$. Est enim (§. 268. *Geom.*)

$$AI : IE = AP : PM$$
$$b : a = x : y$$

Ergo $ax : b = y$

Quodsi EI continuetur in G, ita ut sit $IG = c$, per G agatur DF ipsi AB & ex A AD ipsi EI parallela, erit $AP = DQ = x$, QM, *qm* &c. $= y$. Est enim $PM = ax : b$, *per demonstr.* PQ, *pq* &c. $= c$ (§. 257. *Geom.*). Ergo QM seu $qm = ax : b + c = y$.

Si $LG = b$, $GE = a$ & LQ vel $Lq = x$: erit QM vel $qm = ax : b$, *per demonstr.* Fiat $IG = c$ & per I ducatur ipsi DF parallela AB, erit $PQ = pq = c$ (§. 257. *Geom.*), consequenter PM vel $pm = ax : b - c$.

Denique sit $AC = c$ & $AD = b$; ducatur per D recta EF ipsi AC parallela fiatque $DE = a$. Ducatur recta AL & per C ipsi AL parallela CB. Quodsi alia parallela MN Tab. VII. Fig. 72.

MN ad EF agatur: erit $AP = x$, $PM = y$. Est enim (§. 268. *Geom.*).

$$AD : DE = AP : PN$$
$$b : a = x : \frac{ax}{b}$$

Sed $MN = AC = c$ (§. 257. *Geom.*). Ergo $PM = c - ax : b$.

PROBLEMA 232.

587. *Invenire theoremata generalia construendi omnes æquationes locales ad parabolam.*

Duo theoremata nobis investiganda: in quorum altero y refertur ad concavitatem, in altero autem ad convexitatem parabolæ.

Tab VII. Fig. 75. Sint KP & DL, itemque KD & QM inter se parallelæ, & LDH angulus quicunque. Sit porro $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DK = PN$ (§. 257. *Geom.*) $= n$, $DL = s$, & parametro t describatur parabola AM, cujus axis vel diameter AP. Sit porro $DQ = x$, $QM = y$: erit (§. 268. *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN\ (= PK)$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$
$$DH : LH = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

Ergo $AP = PK - KA = sx : q - p$
& $PM = QM - KD - QN = y - \frac{rx}{q} - n$

Quare cum sit $PM^2 = t.AP$ (§. 388.), erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tsx - tp}{q}$$

hoc est,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 \frac{- tsx + tp}{q} = 0$$

Sit denuo in casu altero, ubi IM parallela ipsi DQ & DI ipsi QM, $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DK = PN$ Tab. VII. Fig. 76. (§. 257. *Geom.*) $= n$, $DL = s$, $IM = DQ = y$, $QM = x$. Parabola AM denuo parametro t describatur. Erit (§. 268. *Geom.*).

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = y : \frac{sy}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Ergo $AP = DN - AK = sy : q - p$ & $PM = QM - QN - PN = x - ry : q - n$.

Quare cum sit $PM^2 = t . AP$; erit (§. 288. 419.)

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = \frac{tsy}{q} - tp$$

hoc est,

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 - \frac{tsy}{q} + tp = 0$$

Tab. VII. Fig. 75. Sit e. gr. $y^2 - ax = 0$, erit $-\frac{2r}{q} = 0$ adeoque $\frac{r^2}{q^2} = 0$, & $s = q$, porro $n = 0$ & $ts : q = a$, hoc est, $a = t$. Cadit ergo

Fig. 74. punctum D in A & Q in P, nec alia re opus est, quam ut parametro a parabola AHM describatur: erit enim $AP = x$, $PM = y$.

Sit $y^2 + ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0$; erit $2r : q = 0$, consequenter H cadit in L, adeo-

Fig. 75. que $s = q$. Porro $a = -2n$: ergo $-\frac{1}{2}a = n$. Item: $-t = -b$, adeoque $t = b$. Denique $n^2 + tp = \frac{1}{4}aa$, hoc est, $\frac{1}{4}a^2 + bp = \frac{1}{4}a^2$, adeoque $p = 0$. Cadit adeo

Fig. 74. punctum K in A. Parametro itaque b describenda parabola AHM & in A erigenda perpendicularis $AB = \frac{1}{2}a$. Ducta enim BS axi AB parallela, erit ob $n = \frac{1}{2}a^2$ $MS = y$ & $BS = x$.

Sit $yy - ay - bx + cc = 0$, erit $\frac{2r}{q} = 0$, adeoque $q = s$

$$-2n = -a \qquad -t = -b \qquad n^2 + tp = -cc$$

$$n = \tfrac{1}{2}a \qquad t = b \qquad tp = -c^2 - \tfrac{1}{4}aa$$

$$p = \frac{-c^2 - \frac{1}{4}aa}{b}$$

Parametro ergo b describenda parabola AHM & quia KA sive p est quantitas negativa, auferenda est ex AP, ita ut origo indeterminatae x statuatur in R vel N. Denique ob $n = \frac{1}{2}a$; fiat $AD = \frac{1}{2}a$ & ducatur DQ parallela axi AP, erit $NQ = RP = x$ & $QM = y$. Fig. 74.

Sit $x^2 - ay + bb = 0$: erit vi theorematis secundi $r : q = 0$, adeoque $q = s$. Poro $n = 0$ &

$$-t = -a \qquad tp = bb$$

$$t = a \qquad ap = bb$$

$$p = \frac{bb}{a}$$

Construitur adeo parabola AHM parametro a, factaque $AK = bb : a$; erit $KP = x$, $PM = y$.

Sit $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, erit

$$-\frac{2r}{q} = -\frac{a}{b} \qquad 2n = 0 \qquad -\frac{ts}{q} = -c$$

$$n = 0$$

$r =$

$$\frac{r}{q} = \frac{a}{2b} \qquad t = \frac{qc}{s}$$
$$n^2 + tp = 0 \qquad = \frac{2bc}{s}$$
$$p = 0$$

Fig. 74. Conſtruatur itaque parametro $2bc : s$ parabola AHM & factis AN $= 2b$ atque RO ad AP normalis $= a$, ducatur recta AT; erit TM ipſi OR parallela $= y$, AT $= x$.

Ceterum loca eſſe rite conſtructa patet, ſi aſſumtis valoribus, prout per regulam determinantur, quæratur æquatio ad curvam eademque cum propoſita reperiatur. Etenim ſi in exemplo ultimo AR $= 2b$, RO $= a$, parameter $= 2bc : s$, AT $= x$, TM $= y$, cum ſit

$$AO : AR = AT : AP$$
$$2b : s = x : \frac{sx}{2b}$$

erit t. AP $= 2bcsx : 2bs = cx$.

Et Quia $AO : OR = AT : FP$
$$2b : a = x : \frac{ax}{2b},$$

erit $PM = TM - TP = y - \frac{ax}{2b}$

adeoque $PM^2 = y^2 - \frac{axy}{b^2} + \frac{a^2x^2}{4b^2}$.

Quare $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} = cx$, conſequenter $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, quæ eſt æquatio ad conſtruendum propoſita.

PROBLEMA 233.

588. *Invenire theorema generale conſtruendi omnia loca ſolida ad ellipſin.*

Circa diametrum AB deſcripta ſit ellipſis AMB, ſintque KD & LH ſemiordinatæ PM, DL diametro AB parallelæ. Sit KD $=$ PN $= n$, KC $= p$, DH $= q$, LH $= r$, DL $= s$, ſemidiameter AC vel CB $= m$, parameter $= t$, DQ $= x$, QM $= y$. Erit (§. 257. *Geom.*) KP $=$ DN & (§. 268. *Geom.*) Tab. VII. Fig. 78.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Quare CP $=$ DN $-$ KC $= sx : q - p$ & PM $=$ QM $-$ QN $-$ PN $= y - rx : q - n$, Jam ex natura ellipſis (§. 420).

$$t : 2m = PM^2 : AP.PB.$$

Eſt vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} -$

 $2ny$

$\frac{2ny}{q} + 2nrx + n^2$, $AP = m + \frac{sx}{q} - p$ & $PB = m - \frac{sx}{q} + p$, adeoque $AP.PB = m^2 - p^2 + \frac{2psx}{q} - \frac{s^2x^2}{q^2}$. Ergo (ſ. cit.) $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - \frac{2ny}{q} + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tm^2 - tp^2}{2m} + \frac{2tpsx}{2mq} - \frac{ts^2x^2}{2mq^2}$.

Unde tandem habetur

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+ \frac{ts^2x^2}{2mq^2} \quad - \frac{2tpsx}{2mq} - \frac{tm^2}{2m}$$
$$+ \frac{tp^2}{2m}$$

Sit e. gr. $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy, y & x; erunt $r:q = 0$, $q = s$, $n = 0$, $p = 0$ hinc $t : 2m = c : b$, hoc est, $c : b$ exprimit rationem parametri ad diametrum. Erit porro $-\frac{tm^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc est, ſubſtituto pro $t : 2m$ valore ipſius ante invento $c : b$, $\frac{m^2c}{b} = \frac{aac}{b}$. Quare $m^2 = aa$, & hinc ſemidiameter $m = a$. Jam quoniam $2m : t = b : c$, erit $t = \frac{2ac}{b}$. Parametro igitur $\frac{2ac}{b}$ & axe $2a$ conſtruatur ellipſis AMB: erit $CP = x$, $PM = y$.

Sit $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy & y, erit $r : q = 0$, $n = 0$, conſequenter $s = q$. Quare $\frac{t}{2m} = \frac{c}{b}$, adeoque ratio diametri AB ad parametrum eſt $= b : c$. Porro $\frac{2tp}{2m} = \frac{cd}{b}$, hoc eſt, ob $t : 2m = c : b$, $2p = d$, ſeu $p = \frac{1}{2}d$. Denique $-\frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc eſt, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 - p^2 = aa$, ſeu $m^2 = aa + \frac{1}{4}dd$. Eſt itaque ſemidiameter $\sqrt{(aa + \frac{1}{4}dd)}$. Quodſi ergo ſemidiametro $\sqrt{(aa + \frac{1}{4}dd)}$ & parametro $2c\sqrt{(aa + \frac{1}{4}dd)} : b$ deſcribatur ellipſis, fiatque $KC = \frac{1}{2}d$; erit $KP = x$, $PM = y$.

Sit $y^2 - dxy : f + bx^2 : c - aa = 0$. Erit $2r : q = d : f$, adeoque $r : q = d : 2f$. Porro $r^2 : q^2 + ts^2 : 2mq^2 = b : c$, hoc eſt

Tab. VII. Fig. 77. est, $d^2 : 4f^2 + ts^2 : 2m \cdot 4f^2 = b : c$, consequenter $t : 2m = (4bf^2 - cd^2) : cs^2$. Est denique $n = 0$, $p = 0$ & $-tm^2 : 2m = -aa$, consequenter $m^2 = a^2cs^2 : (4bf^2 - cd^2)$, adeoque $m = \sqrt{a^2cs^2} : \sqrt{(4bf^2 - cd^2)}$. Hinc vero porro ob datam rationem $2m : t$ reperitur parameter t. Quare si parametro t & diametro $2m$ ellipsis construatur fiatque CF $= 2f$, DF $= d$, ducta recta CQ ex C per F semiordinatae PM continuatae in Q occurrente, erit QM $= y$, CQ $= x$.

Locum rite esse constructum eodem modo, quo in Parabola ostenditur. Etenim

$$CF : DF = CQ : QP$$
$$2f : d = x : \frac{dx}{2f}$$

Quare PM $= y - \frac{dx}{2f}$, consequenter

$$PM^2 = y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2}.$$

Porro $CF : CD = CQ : CP$
$$2f : s = x : \frac{sx}{2f}$$

Quare $AP = \frac{\sqrt{aacs^2}}{\sqrt{(4bf^2 - cd^2)}} + \frac{sx}{2f}$ & $PB = \frac{\sqrt{aacs^2}}{\sqrt{(4bf^2-cd^2)}} - \frac{sx}{2f}$, consequenter $AP.PB = \frac{aacs^2}{4bf^2 - cd^2} - \frac{s^2x^2}{4f^2}$. Est itaque $\frac{t.\,AP.\,PB}{2m} = (4bf^2 - cd^2)\, a^2cs^2 : cs^2\, (4bf^2 - cd^2) - (4bf^2s^2x^2 + cd^2s^2x^2)\, 4cf^2s^2 = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$, consequenter cum sit in ellipsi $\frac{t.\,AP.\,PB}{2m} = PM^2$ (§.420), $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2} = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$. Ergo $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{bx^2}{c} - a^2 = 0$.

COROLLARIUM.

589. Cum in ellipsi sit $b : a = y^2 : ax - x^2$ (§.420.); si $b = a$, hoc est, si parameter diametro aequalis, erit $y^2 = ax - x^2$, seu $y^2 - ax + x^2 = 0$, quae est aequatio ad circulum (§. 377). Aequatio itaque localis ad ellipsin degenerat in aequationem localem ad circulum, si ponatur $t = 2m$ & angulus ad P rectus: quo facto erit

$$y^2 - 2rxy + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0.$$
$$\qquad\qquad + \frac{s^2x^2}{q^2} \qquad - \frac{2psx}{q} - m^2 + p^2$$

Ceterum cum ex comparatione formulae propositae cum generali demum intelligatur, num $t = 2m$; eadem formula pro construendis locis ad ellipsin atque ad circulum sufficit.

Ponamus e. gr. $y^2 + x^2 - by - cx = 0$. Quoniam xy deest, erit $r : q = 0$, consequenter $s = q$. Quare $t : 2m = 1$, hoc est, $t = 2m$. Locus adeo planus est ad circulum. Porro

$-2n$

$$-2n = -b \qquad -2tp : 2m = -c$$

$$n = \tfrac{1}{2}b \qquad 2p = c, \text{ ob } t = 2m.$$

$$p = \tfrac{1}{2}c$$

Denique $n^2 - m^2 + p^2 = 0$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

h. e. $\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 = m^2$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)}$$

Tab. VII. Fig. 73. Quare ducta linea recta AB & in ea assumta $CN = GD = \tfrac{1}{2}b$, si porro fiat $GN = CD$ & ad AB perpendicularis $= \tfrac{1}{2}c$ atque ex centro C radio CG describatur circulus; erit $GR = NP = x$ & $RM = y$.

Cum enim sit $CG^2 = CD^2 + GD^2$ (§. 417 *Geom.*), erit $CG = \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)}$. Porro ob $PR = GN$ (§. 257. *Geom.*) $= \tfrac{1}{2}c$ est $PM = y - \tfrac{1}{2}c$, adeoque $PM^2 = y^2 - cy + \tfrac{1}{4}cc$. Similiter $CP = PN - NC = x - \tfrac{1}{2}b$, adeoque $CP^2 = x^2 - bx + \tfrac{1}{4}b^2$. Quare cum sit $CP^2 + PM^2 = CM^2$ (§. 417. *Geom.*); erit $y^2 - cy + \tfrac{1}{4}c^2 + x^2 - bx + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2$, adeoque $y^2 + x^2 - cy - bx = 0$: quæ est æquatio localis ad construendum proposita.

PROBLEMA 234.

Tab. VIII. Fig. 80. 590. *Invenire theorema generale construendi omnia loca ad hyperbolam circa diametrum descriptam.*

Diametro transversa $AB = 2m$ & parametro t descripta sit hyperbola AM, cujus centrum in C, ductisque KD & LH cum QM, DL vero cum BP parallelis, fiat $KD = PN = n$, $KC = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, $DQ = x$, $QM = y$, erit (§. 257. *Geom.*) $KP = DN$ & (§. 268. *Geom.*)

$$DH ; HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Quare $CP = DN - KC = \frac{sx}{q} - p$ & $PM = QM - QN - PN = y - rx : q - n$. Jam (§. 459.)

$$t : 2m = PM^2 : AP.\,PB$$

Est vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2xy + \frac{2nrx}{q} + n^2$ & $AP.PB\,(CP - CA)\,(CP + CA) = CP^2 - CA^2$ (§. 499.) $= \frac{s^2x^2}{q^2} - \frac{2psx}{q} + p^2 - m^2$. Unde habetur

$$\frac{ts^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpsx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2.$$

Quare

Quare æquatio generalis pro quovis loco hyperbolico.

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = o$$
$$- \frac{ts^2x^2}{2mq^2} \qquad + \frac{2tps}{2mq} + \frac{tm^2}{2m}$$
$$- \frac{tp^2}{2m}$$

Quando contingit, reperiri $t = 2m$, hyperbola est æquilatera (§. 505).

Eadem formula reperitur, si hyperbola ad diametrum conjugatam refertur, nisi quod $tm^2 : 2m$ signo $-$ afficiatur.

Sit e. gr. $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{aac}{b} = o$. Cum in æquatione non habeantur xy, y & x; erit $r : q = o$, $n = o$, $p = o$, $s = q$, consequenter $-t : 2m = -c : b$, adeoque ratio parametri t ad diametrum $2m = c : b$ Porro $tm^2 : 2m = aac : b$, hoc est, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 = aa$. Diameter adeo hyperbolæ $2a$: unde ob rationem diametri ad parametrum datam reperiri diameter potest. Quare si datis diametro & parametro hyperbola AML construatur; erit $CP = x$, $PM = y$. Est enim $AC = CB = a$, adeoque $BP\ a + x$ & $AP = x - a$, consequenter $AP \cdot PB = x^2 - a^2$. Quare $c : b = y^2 : x^2 - a^2$ (§. 459.) Est itaque $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{a^2c}{b} = o$.

Tab. VII. Fig. 79.

Sit $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{acx}{b} = o$. Quoniam in æquatione desiderantur xy, y & quantitas pure cognita; erit $r : q = o$, $n = o$ & quia ob $r = o$ DL coincidit cum DH, $s = q$. Quamobrem $-t : 2m = -c : b$, hoc est, ratio parametri t ad diametrum $2m$ denuo $= c : b$. Porro $2tp : 2m = ac : b$, hoc est, ob $t : 2m = c : b$, $2p = a$ seu $p = \frac{1}{2}a$: Denique quia ultimus terminus deficit, erit $n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = o$ seu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}aa$, adeoque $m = \frac{1}{2}a$. Fig. 80.

Quare cum ob rationem diametri ad parametrum datam detur etiam parameter $= \frac{ac}{b}$; constructa hyperbola AML, erit $BP = x$, $PM = y$: quod ostenditur ut ante. Fig. 79.

Sit $y^2 - x^2 + by - ax = o$. Quia xy desideratur; erit $r : q = o$, consequenter $s = q$. Quare $-t : 2m = 1$, hoc est, $t = 2m$. Est itaque locus ad hyperbolam æquilateram (§. 505.). Porro

$$-2n = +b \qquad 2tp : 2m = -a$$
$$n = -\tfrac{1}{2}b \qquad 2p = -a, \text{ob } t = 2m$$
$$p = -\tfrac{1}{2}a.$$
$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} = \frac{tp^2}{2m}$$

$$n^2 + m^2 = p^2$$

$$m^2 = p^2 - n^2$$

hoc est, $m^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$

Diametro itaque $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ con-
Tab. struatur hyperbola æquilatera AML, fiat-
IIX. que $CR = \frac{1}{2}a$, $KR = GP = \frac{1}{2}b$; erit
Fig. $KG = RP = x$, $GM = y$. Est enim PB
79. $= CB + CR + RP = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + \frac{1}{2}a + x$ & $AP = AR + RP = CR - CA + RP = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + x$, adeoque $AP.PB = ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$. Porro $PM = GM + GP = y + \frac{1}{2}b$; adeoque $PM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit $PM^2 = AP.PB$ (§. 507); erit $y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 = ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 + by = ax + x^2$, consequenter $y^2 - x^2 + by - ax = 0$.

Sit $y^2 - x^2 - by + ax = 0$. Quia xy desideratur, erit $r : q = 0$, adeoque $r = 0$ & $q = s$. Quare $t : 2m = 1$, seu $t = 2m$. Est itaque locus ad hyperbolam æquilateram. Porro

$$-2n = -b \qquad 2p = a \qquad n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

$$n = \frac{1}{2}b \qquad p = \frac{1}{2}a \qquad m^2 = p^2 - n^2$$

$$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2$$

$$m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$$

Diametro $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ construatur
Fig. hyperbola æquilatera AML, factaque
79. CF ex cento $C = \frac{1}{2}a$ & FH ad FP perpendiculari $= \frac{1}{2}b$, ductisque HN ipsi FP & NM ipsi FH parallelis; erit $HN = x$, $NM = y$. Est enim $BP = FP - BF = x - \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, $AP = FP - FA = x - \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, adeoque $AP.PB = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$. Porro $PM = MN - PN = y - \frac{1}{2}b$, adeoque $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit $PM^2 = AP.PB$ (§. 507.), erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 - x^2 - by + ax = 0$.

PROBLEMA 235.

591. *Invenire theorema generale construendi omnia loca solida ad hyperbolam intra asymptotos.* Tab. VIII. Fig. 81.

Sint SA & AR asymptoti hyperbolæ MI. Ducatur DL uni earum AR parallela & huic jungatur utcunque recta DH. Sint denique KD, QM, IR, LH alteri asymptotorum SA parallelæ. Ponamus denuo $KD = PN = n$, $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, $DQ = x$, $QM = y$, $RI = m$, $AR = DL = s$: erit (§. 268. *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Ergo $AP = DN - AK = \frac{sx}{q} - p$ &

$PM = QM - PN - NQ = y - n - rx : q$.

Quare ob $AR.RI = AP.PM$ (§. 502.).

$$ms = \frac{syx}{q} - \frac{srx^2}{q^2} - py - \frac{snx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$msq = syx - \frac{srx^2}{q} - pqy - snx + prx + pnq$$

$$mq = xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{s} - nx + \frac{prx}{s} + \frac{pnq}{s}$$

$$xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{s} + \frac{prx}{s} + \frac{pnq}{s} = 0.$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - nx \quad - mq$$

Tab. IIX. Fig. 82. Invenitur adhuc regula alia pro locis ad hyperbolam intra asymptotos, si valor ipsius x ponatur esse QM.

Sit nimirum IM hyperbola, cujus asymptoti RA & AS. Ducantur DT, HL & QN cum asymptoto AS, DL vero cum altera KR & DH ipsi TM parallela. Sit ut ante $AK = p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $DL = AR = s$, $HL = r$, $RI = m$, $QM = x$, $DQ = TM = y$. Erit (§. 268. *Geom.*).

DH : DL = DQ : DN

$$q : s = y : \frac{sy}{q}$$

DH : HL = DQ : QN

$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Ergo $AP = DN - AK = sy : q - p$ & $PM = QM - QN - NP = x - ry : q - n$. Quare ob AR.RI = AP.PM (§.502).

$$ms = \frac{sxy}{q} - \frac{rsy^2}{q^2} - \frac{sny}{q} - px + \frac{pry}{q} + pn.$$

Unde tandem eodem modo, quo ante usi sumus, reperitur

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{s} + \frac{pry}{s} + \frac{pnq}{s} = 0.$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - ny \quad - mq$$

Sit e. gr. $xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0$: erit $r : q = 0$, adeoque $r = 0$ & hinc $q = s$, quia L cadit in H, $-pq : s = + fd : c$, hoc est, ob $q = s$, $p = - fd : c$. Porro $+ pr : s - n = 0$, quia x in æquatione præsente deficit, & hinc, ob $r = 0$, $n = 0$. Denique $pnq : s - mq = - abd : c$. Sed $pnq : s = 0$; ergo $mq = ms = abd : c$. Quare si $s = ab : c$; erit $m = d$. Fiat igitur $AR = ab : c$ & $IR = d$, atque constructa hyperbola intra asymptotos porro $OA = fd : c$; erit $OP = x$, $PM = y$. Nam $AP = x + fd : c$ adeoque $AP . PM = xy + fdy : c$. Quare cum sit $AR . RI = abd : c$ erit

$$xy + fdy : c = abd : c$$

adeoque $xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0.$

Sit $xy - \frac{bxx}{a} - cy = 0$. Erit $-r : q = -b : a$, hoc est, $r = b$, $q = a$. Porro $-pq : s = -c$. Ergo $p = sc : a$. Cum x in æquatione desit; $pr : s - n = 0$, seu $pr : s = n$, hoc est, $bc : a = n$. Denique quoniam terminus ultimus itidem deficit, $pnq : s - mq = 0$, seu $pnq : s = mq$, vel $pn : s = m$, hoc est, $bc^2 : a^2 = m$. Cognitis valoribus rectarum AK, KD, DH, HL, AR, RI; constructio loci manifesta est. Est enim $AK = sc : a$, $KD = bc : a$, $DH = a$, $HL = b$, $DL = AR = s$, $RI = bc^2 : a^2$, $DQ = KP = x$, $QM = y$. His enim positis, erit $AR.RI = sbc^2 : a^2$. Porro (§. 268. *Geom.*),

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$a : s = x : \frac{sx}{a}$$

Quare cum sit $KA = sc : a$, erit $AP = (sx - sc) : a$. Est vero etiam

$$DH : LH = DQ : QN$$
$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Quare cum sit $KD = PN = bc : a$ & $QM = y$, erit $PM = y - bx : a - bc : a$. Habemus adeo $AP.PM = \frac{sxy}{a} - \frac{scy}{a} - \frac{bsx^2}{a^2} + \frac{bsc^2}{a^2}$.

Quoniam itaque $AR.RI = AP.PM$, erit $\frac{sxy}{a} - \frac{scy}{a} - \frac{bsx^2}{a^2} + \frac{bsc^2}{a^2} = \frac{bsc^2}{a^2}$: unde reperitur $xy - cy - \frac{bx^2}{a} = 0$.

SCHOLION.

592. *Ut usus hujus doctrinæ appareat, exempla aliquot problematum indeterminatorum in medium afferenda. Antequam tamen id fiat, tradenda sunt criteria, unde judicium fieri possit, cum quanam formularum antecedentium comparanda sit æquatio ad construendum proposita. Nimirum duo occurrere possunt casus: aut enim in æquatione proposita habetur* xy, *aut minus. Si in priori casu quadratorum indeterminatorum neutrum occurrat, vel saltem alterutrum, locus est hyperbola intra asymptotos; si quadrata indeterminatarum* x^2 & y^2 *diversis signis afficiuntur, locus est hyperbola circa diametrum descripta; si eadem quadrata eodem signo afficiuntur, sitque coefficiens dimidius facti* xy *æqualis radici coefficientis quadrati* x^2, *locus est parabola; si minor, hyperbola; si major, ellipsis. In casu posteriori si unum tantum quadratorum indeterminatorum adsit, locus est parabola; si utrumque eodem signo afficiatur, ellipsis vel circulus; si signis diversis gaudeant, hyperbola. Nempe in casu ultimo hyperbola est æquilatera, in penultimo circulus, si terminus* x^2 *a fractione liber. Quæ omnia manifesta sunt ex accurata formularum generalium inter se collatarum contemplatione. Quod si quantitatis alicujus valor per regulam generalem eruitur negativus, quantitas ista ex parte opposita sumenda est, quemadmodum in exemplis propositis a nobis factum.*

PROBLEMA 236.

593. *Construere rhomboidem ea con-*

conditione, ut rectangulum ex lateribus sit æquale quadrato dato.

Tab. IV. Fig. 51. Sit quadratum datum a^2, sint latera rhombi x & y: erit per conditionem problematis $xy = a^2$. Construenda itaque est hyperbola intra asymptotos CG & CR, cujus potentia AI $= a$. Erit CQ latus unum rhomboidis, QM alterum (§. 488).

PROBLEMA 237.

594. *Quadratum construere, quod sit æquale rectangulo, cujus latera differunt recta data.*

Sit recta data $= b$, latus unum rectanguli $= x$, erit alterum $= b + x$. Unde per conditionem problematis $y^2 = bx + x^2$: qui est locus ad hyperbolam æquilateram, cujus parameter $= b$ (§. 505).

Id etiam ex formula generali elicitur. Quoniam enim $y^2 - x^2 - bx = 0$, erit (§.590) $2r : q = 0$, adeoque $r = 0$, $q = f$, $r^2 : q^2 = 0$; porro $2n = 0$ & hinc $2nr : q = 0$, $n^2 = 0$. Est vero $-tf^2 : 2mq^2 = -1$, hoc est, ob $q^2 = f^2$, $t : 2m = 1$ seu $t = 2m$. Unde apparet, locum esse ad hyperbolam æquilateram. Est præterea $2tpf : 2mq = -b$, hoc est, ob $t = 2m$ & $f = q$, $2p = -b$, unde $p = -\frac{1}{2}b$. Denique $tm^2 : 2m - tp^2 : 2m = 0$, quia quantitas mere cognita in formula data non habetur, hoc est $m^2 - p^2 = 0$, seu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}bb$. Unde $m = \frac{1}{2}b$. Tab. IIX. Fig. 80. Constructio ex constructione generali haud difficulter elicitur. Nimirum pro diametro transversa AB $= m$ pone b. Quia KC $= -\frac{1}{2}b$. punctum K cadet in partem contrariam & quidem in A, quia semidiametro in hoc casu æqualis. Unde origo indeterminatæ x erit in A, nam ob DK $=$ PN $= 0$, punctum D in K, consequenter in nostro casu in A cadit. Porro ob HL $= 0$ puncta H & L, adeoque & puncta Q & N, & ob PN $= 0$, puncta N & P, consequenter Q & P coincidunt: unde origo alterius indeterminatæ y est in P.

Est enim BP $= b + x$, adeoque AP. PB $= bx + x^2$, Quare cum PM$^2 = y^2$; erit $y^2 = bx + x^2$.

RPOBLEMA 238.

595. *Super data recta* AB *triangulum construere, ita ut quadrata laterum* AC *&* CB *sint in ratione data.* Tab. IIX. Fig. 83.

Sit ratio data $= b : c$ DB $= x$

AB $= a$ DC $=$ y

erit AD $= a - x$

Quoniam (§. 417. *Geom.*) AC$^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$ & CB$^2 = x^2 + y^2$; erit per conditionem problematis

$b : c = y^2 + a^2 - 2ax + x : x^2 + y^2$

$bx^2 + by^2 = cy^2 + a^2c - 2acx + cx^2$

$by^2 - cy^2 + bx^2 - cx^2 + 2acx - a^2c = 0$

$y^2 + x^2 + \frac{2ac}{b-c} x - \frac{a^2c}{b-c} = 0$

Hæc æquatio comparanda est cum æquatione generali locorum ad ellipsin, quia deest xy & y^2 atque x^2 eodem signo afficiuntur (§. 592). Reperitur adeo (§. 588.)

$\frac{2r}{q} = 0 \quad -2n = 0 \quad \frac{r^2 : q^2 + ts^2 : 2mq^2 = 1}{t : 2m = 1}$

hinc:

$r = 0$ & $q = s \quad 2nr : q = 0$ h. e. $t = 2m$

Cum diameter $2m$ parametro æqualis sit; locus ad construendum propositus est circulus.

Porro

$\frac{2nr}{q} \quad \frac{-2tps}{2mq} = \frac{2ac}{b-c} \quad \frac{n^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} + tp^2 = -\frac{a^2c}{b-c}$

h. e. $2p = -\frac{2ac}{b-c} \quad p^2 - m^2 = -\frac{a^2c}{b-c}$

$p = -\frac{ac}{b-c} \quad p^2 + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$

$\frac{a^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$

h. e. $\frac{a^2c^2 + a^2bc - a^2c^2}{(b-c)^2} = m^2$

$\frac{a^2bc}{(b-c)^2} = m^2$

$\frac{a\sqrt{bc}}{b-c} = m$

Est ergo radius circuli $= a\sqrt{bc} : (b-c)$. Quodsi igitur $AL = ac : (b-c)$ & radio $CL = a\sqrt{bc} : (b-c)$ describatur circulus ECF: erit $AD = x$, $DC = y$. Nam ponatur brevitatis gratia $AL = p$, $LF = m$; erit $DL = p - x$, $ED = m - p + x$ & $DF = m + p - x$, consequenter, ob ED. DF $= DC^2$, $m^2 - p^2 + 2px - x^2 = y^2$

$y^2 + x^2 - px + p^2 - m^2 = 0$

hoc est, substitutis valoribus p & $p^2 - m^2$, erit $y^2 + x^2 + \frac{2ac}{b-c} x - \frac{a^2c}{b-c} = 0$.

PROBLEMA 239.

596. *Duas rectas* AB & CD *ita secare in* E & F, *ut* AE. EB = CF. FD. Tab. VIII. Fig. 84.

Sit

Sit $AB = a$, $AE = x$
$CD = b$, $CF = y$
erit $EB = a - x$
$FD = b - y$
Quare $ax - xx = by - yy$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0$$

Hæc æquatio comparanda cum æquatione locali pro hyperbola. Est nempe

$\frac{2r}{q} = 0$ & hinc $q = s$, $q^2 = s^2$; $\frac{r^2}{q^2} = 0$; $\frac{2nr}{q} = 0$

$\frac{ts^2}{2mq^2} = -1$; $-2n = -b$; $\frac{2tps}{2mq} = a$

$n = \frac{1}{2}b$

$t : 2m = 1$; $2p = a$

$t = 2m$; $p = \frac{1}{2}a$

$$\frac{n^2 + tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

$$m^2 = p^2 - n^2$$

hoc est, $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}bb)}$$

Quoniam $t = 2m$, hoc est, parameter diametro æqualis; hyperbola est æquilatera (§. 505), diametro $= 2\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb)}$ construenda. Cum diametro determinata AB agatur parallela HN & cum MN altera FH, ita ut sit $FH = PN = \frac{1}{2}b$ & $CF = \frac{1}{2}a$, erit $HN = x$ & $MN = y$. Est enim $CP = x - \frac{1}{2}a$; $PM = y - \frac{1}{2}b$, & $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb)}$. Quare, ob $AP \cdot PB = PB^2 - AC^2 = PM^2$,

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}bb = y^2 - by + \tfrac{1}{4}bb$$

$$x^2 - ax = y^2 - by$$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0.$$

PROBLEMA 240.

597. *Super recta* AB *descriptus sit semicirculus* ANB, *& alius minor* ERD. *Ex puncto quocunque* N *demittatur ad* AB *perpendicularis* PN, *ductoque radio* CN, *ex puncto* R *perpendicularis alia* RM. *Determinare locum, in quo sunt omnia puncta* M *eodem modo determinata.* Tab. IIX. Fig. 85.

Sit $AB = a$, $ED = d$, $AP = x$, $PM = y$: erit $PB = a - x$, $PN = \sqrt{(ax - x^2)} = v$ (§. 377.), $PC = \frac{1}{2}a - x$, $NR = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d$ & (§. 268. *Geom.*)

$NC : NP = NR : NM$

$\frac{1}{2}a : v = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d : \frac{(a-d)v}{a}$

Quare $PM = v - \frac{av + dv}{a} = \frac{av - av + dv}{a} = \frac{dv}{a}$, consequen-

quenter $PM^2 = y^2 = d^2 v^2 : a^2$. Unde habetur $a^2 y^2 = d^2 (ax - x^2)$, substituto nimirum valore ipsius v^2, quæ æquatio in sequentem resolvitur analogiam:

$$y^2 : ax - x^2 = d^2 : a^2$$

h. e. $PM^2 : PA.PB = CF^2 : AC^2$

Unde intelligitur locum punctorum M esse ellipsin, cujus axes conjugati AB & ED (§.430).

SCHOLION.

598. *Aparet adeo curvam, quam fornicibus construendis aptam prædicat* Serlius (k) *esse ellipsin.*

COROLLARIUM.

599. Quoniam $PN = v$, $PM = \frac{1}{2}dv : \frac{1}{2}a$; erit $PN : PM = v : \frac{1}{2}dv / \frac{1}{2}a$

hoc est (§. 124.) $\frac{1}{2}av : \frac{1}{2}dv$

$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d$

CG : CF

PROBLEMA 241.

Tab. IIX. Fig. 86. 600. *Super recta* HI *describatur semicirculus* HGI. *Sit recta quæcunque* AB *bifariam divisa in* C *&* *ex* C *erecta perpendicularis* CD = GF. *Erecta perpendiculari* LN *fiat* DC : AC = HL : AP *& in* P *erigatur perpendicularis* PM = NL. *Determinare locum, in quo sunt omnia puncta* M *eodem modo inventa.*

Sit HF = GF = DC = d, AC = a, AP = x, PM = y: erit ex hypothesi

AC : DC = AP : HL

$$a : d = x : \frac{dx}{a}$$

Quare $LI = 2d - dx : a = (2ad - dx) : a$, & hinc $LN^2 = (2addx - ddxx) : aa$ (§. 367). Habemus itaque ex hypothesi:

$$y^2 = (2addx - ddxx) : aa$$

adeoque, $aa : 2ax - xx = dd : y^2$.

Est igitur locus quæsitus ellipsis, cujus semiaxes conjugati AC & CD (§. 430).

SCHOLION.

601. *Evidens adeo est, curvam, quam* Albertus Duretus *& cum ipso* Daniel Hartmannus (l) *fornicibus construendis aptam prædicant, esse ellipsin Apollonianam.*

PROBLEMA 242.

602. *Rectam* DB *ita secare in* P *simulque invenire aliam rectam* y, *ita ut rectangulum ex* y *in datam* CA *sit æquale rectangulo ex segmentis partium* DP *&* PB. Tab. IIX. Fig. 87.

Sit DB = a, AC = b, DP = x, erit PB

(k) Architect. lib. 1. c. 1. f. m. p. b. (l) In der bürgerlichen Bau-Kunst f. 7. & seqq.

PB$=a-x$, consequenter per conditionem problematis

$$ax - xx = by$$

$$x^2 - ax + by = 0.$$

Est itaque locus ad parabolam (§. 592).

Quodsi cum æquatione locali ad parabolam generali modo inventam compares; erit (§. 587.)

$$\frac{-2r}{q} = 0 \quad -2n = -a \quad -ts:q = b$$

hinc $q = s$ $\quad n = \frac{1}{2}a \quad t = -b$

$$rm + tp = 0$$

$$\frac{1}{4}aa - bp = 0$$

$$\frac{1}{4}aa = bp$$

$$\frac{1}{4}aa:b = p$$

Est adeo parameter$=-b$. Quare parametro b describenda est parabola deorsum tendens AMB, cujus pars altera AD, seu quod perinde est, describitur parabola circa axem AK (§. 393) & in eo fit AK$=\frac{1}{4}aa:b$, erit KB$=\frac{1}{2}a$ (§. 388.) $=\frac{1}{2}$ DB, adeoque DB linea ad secandum proposita. Ducta igitur PM ipsi AK parallela, erit PB$=x$, PM$=$ y. Nam KP $=$ RM$=\frac{1}{2}a-x$ & AR$=\frac{1}{4}aa:b-y$. Quare (§. 388) $\frac{1}{4}aa-ax+xx=\frac{1}{4}aa-by$, consequenter $x^2-ax+by=0$.

PROBLEMA 243.

603. *Datam rectam* MN *in tres partes continue proportionales secare.* Tab. IIX. Fig. 87.

Sit MN $= a$, pars prima $= x$, secunda $= y$, erit tertia $= yy:x$ & per conditionem problematis

$$x + y + yy : x = a$$

$$xx + xy + yy = ax$$

$$yy + xy + xx - ax = 0$$

Cum locus sit ad circulum (§. 592.); æquatio comparanda est, cum formula generali ad circulum. Erit ergo $\frac{-2r}{q} = 1$, hoc est, $\frac{r}{q} = -\frac{1}{2}$, nempe $r = -1$ & $q = 2$.

Porro

$$\frac{r^2}{q^2} + \frac{s^2}{q^2} = 1 \qquad \frac{2n}{q} = 0.$$

hinc $\frac{2nr}{q} = 0$

$$\frac{1}{4} + \frac{s^2}{4} = 1 \qquad n^2 = 0$$

$$1 + s^2 = 4 \qquad \frac{-2ps}{q} = -a$$

$$s^2 = 3 \qquad \frac{2p\sqrt{3}}{2} = a$$

$s = \sqrt{3}$ $p = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$m^2 = n^2 + p^2$
$= p^2$

$m = p$
$= a : \sqrt{3}$

Tab. IIX. Fig. 88. Describatur ergo radio $AC = a : \sqrt{3}$ semicirculus, fiat ob valorem negativum ipsius r $HL : AL = 1 : \sqrt{3}$, ob valorem scilicet ipsius r negativum triangulum ALH contraria ratione construendum, ita ut angulus rectus sit in L, qui in formula generali supponitur in H: ita enim prodit $s = \sqrt{3}$, quemadmodum ex regula eruitur per theorema Pythagoricum. Ducatur porro recta AHR. Quodsi inter C & B erigatur perpendicularis PM: erit $AQ = x$, $QM = y$. Nam (§. 268. *Geom.*)

$AH : HL = AQ : QP$
$2 : 1 = x : \frac{1}{2}x$

Unde $PM = y + \frac{1}{2}x$ & $PM^2 = y^2 + xy + \frac{1}{4}x^2$

Porro $AH : AL = AQ : AP$
$2 : \sqrt{3} = x : \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Unde $PB = AB - AP = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{x\sqrt{3}}{2}$

& $AP . PB = ax - \frac{3}{4}x^2$ Habemus adeo (§. 377).

$$y^2 + xy + \frac{1}{4}xx = ax - \frac{3}{4}x^2$$

$$y^2 + xy + x^2 - ax = 0.$$

SCHOLION.

604. *Eodem modo æquationes locales inveniri possunt pro Curvis superiorum generum ad construenda loca hypersolida. Primus formulas generales computavit* Johannes Craigius (m) *earumque usum deinde uberius exposuit* Hospitalius (n).

CAP. VII.

DE CONSTRUCTIONE ÆQUATIONUM SUPERIORUM.

PROBLEMA 244.

605. *Æquationem quamcunque geometrice construere.*

1. Introducatur in æquationem datam nova indeterminata, &
2. Hujus ope æquatio in alias locales

(m) In Tractatu de figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis geometricis p. 62. & seqq. (n) Traité analytique des Sect. con. lib. 3. p. 206. & seqq.

cales ad diversas curvas transformetur, in quibus nempe sint duæ indeterminatæ.

3. Construantur duæ æquationes locales. Communis enim intersectio radices determinabit.

SCHOLION.

606. *Genuinum hoc æquationes construendi artificium primus aperuit* Renatus Franciscus Slusius, *Canonicus Leodiensis* (o): *quem postea secuti sunt alii de hac materia commentati. Ut autem methodi vim intelligamus; eam exemplis cubicarum inprimis & quadrato-quadraticarum æquationum illustrabimus, quoniam ad has construendas sufficiunt, quæ de locis planis & solidis in capite præcedente tradidimus.*

PROBLEMA 245.

607. *Construere æquationem cubicam* $y^3 + aby = aac$.

Æquatio proposita $y(y^2+ab) = aac$ in hanc resolvitur analogiam

$$a : y = y^2 + ab : ac$$

ut nova indeterminata in æquationem introducatur & ejus ope æquatione locales ad diversas curvas eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = yy + ab : ac$ (§.167. Arithm.)

hoc est, $ax + ab : ac$

seu (§.124.) $x + b : c$

II. $x^2 + bx = cy$

$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = cy$$

III. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$

$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = cy$$

IV. $x^2 + ax + bx = y^2 + cy$

$$x^2 + bx = cy$$
$$x^2 + \frac{by^2}{a} = cy$$

V. $y^3 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$

$$y^3 + aby = aac \quad (a)$$
$$\frac{y^3}{a} + by = ac$$

VI. $xy + by = ac$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 + bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy - ax - bx = 0$

V: $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy + by - ac = 0$

Locus primus & secundus sunt ad parabolam; tertius ad circulum;

(o) Mesolabo Part. 2, integra.

lum; quartus ad hyperbolam æquilateram; quintus ad ellipsin; sextus ad hyperbolam intra asymptotos.

Equidem constructio æquationis absolvi potest, duobus quibuscunque locis combinatis; præstat tamen nonnisi circulum cum una ex sectionibus conicis combinari, non tam quod circulus sit locus planus (ut vulgo cum *Cartesio* sentiunt); sed quia facilius describitur sectionibus coni.

Agedum itaque, construamus æquationem propositam primum ope æquationis ad parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$

Tab IX. Fig. 89.

Locus prior construitur, si parametro a parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe $AP = x$, $PM = y$ (§. 587).

Pro circulo erit vi theorematis generalis (§. 589).

$2r = 0$ & hinc $q = s$ $\qquad 2n = c \qquad -2p = b - a$

$\overline{q} \qquad \overline{n = \frac{1}{2}c} \qquad \overline{-p = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a}$

$(r^2 + s^2) : q^2 . = 1$

seu $s = q$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb = m^2$$

$$\surd\left(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb\right) = m$$

Quodsi ergo radio $AL = m$ semicirculus AMB describatur, fiatque $LK = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, quia valor ipsius p negativus, & $KD = \frac{1}{2}c$, atque DQ ipsi AB, QM vero inter K & A ob valorem ipsius p negativum, si $b > a$, ipsi KD parallela ducatur: erit (§. 588. 589.) origo indeterminatæ x in D, nempe $DQ = x$ & $QM = y$. Tab. IX. Fig. 90.

Si jam circulus cum parabola combinandus, quo eadem sit indeterminatarum origo, punctum D in A & DQ super AP cadere debet. Quare si fiat perpendicularis $AK = \frac{1}{2}c$ & altera $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit centrum circuli L & radius LA. Quodsi is describatur, secabit parabolam in unico puncto M. Dico, semiordinatam parabolæ PM esse radicem veram æquationis, radices duas reliquas non nisi imaginarias. Fig. 90. & 89.

Est nimirum $AK = PR = \frac{1}{2}c$, $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, adeoque $LA = \surd\left(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc\right)$, qui est radius circuli per superius demonstrata, &, si $PM = y$, $MR = y - \frac{1}{2}c$. Porro $AP = KR = yy : a$ (§. 391), consequenter $LR = y^2 : a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ & hinc ob LM^2 seu $LA^2 = LR^2 + MR^2$ (§. 417. *Geom.*) $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa}$

$+ by$

$+\frac{by^2}{a} + \frac{1}{4}bb - y^2 - \frac{1}{2}ab + aa + y^2 - cy$

$+\frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad aa}$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = 0$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad y}$$

$$y^3 + aby - aac = 0$$

Quodsi fuerit $a > b$, erit $p = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, consequenter cum valor ipsius p sit positivus, punctum K cadet ultra centrum L versus B, & KL $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, KD $= \frac{1}{2}c$ ut ante. Cetera fiunt ut ante. Cadit vero tum centrum L infra AK.

Construamus porro eandem aquationem combinato circulo cum ellipsi. Quoniam locus ad ellipsin est $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$; erit (§.588)

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad n^2 = \frac{tm^2}{2m}$$

hinc $q = s$ $\qquad \frac{a^2c^2}{4b^2} = \frac{am^2}{b}$

$$\frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \qquad \frac{ac^2}{4b} = m^2$$

$$2n = \frac{ac}{b} \qquad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ac^2}{b}} = m$$

$$n = \frac{ac}{2b}$$

$$\frac{2nr}{q} - \frac{2tps}{2mq} = 0$$

$$-\frac{2tp}{2m} = 0$$

$$p = 0$$

Est itaque ratio parametri t ad diametrum $2m$ ut a ad b: ellipsis diametro AB $= \sqrt{\frac{ac^2}{b}}$ & parametro t describenda & in centro C erecta Tab.
perpendiculari CF $= ac:2b$, ductis- IX.
que FQ ipsi AC & QM ipsi CF pa- Fig.
rallelis, erit FQ $= x$ & QM $= y$, 9:.
origo nempe indeterminatæ x in F. Circulus itaque ita combinandus cum ellipsi, ut punctum D in F & DK super FC cadat, hoc est, FC 90.
$= \frac{ac}{2b}$ continuetur in K, donec fiat FK $= \frac{1}{2}c$ (est enim $b > a$, hinc $bc > ac$, consequenter $c > ac:b$) & in K erigatur perpendicularis KL $= \frac{1}{2}$

$b - \frac{1}{2}a$: erit enim per præcedentia L centrum, LF radius circuli, qui descriptus ellipsin in M secabit. Dico QM esse radicem æquationis.

Ponamus enim QM $= y$. Quoniam CF $=$ PQ $= ac:2b$ & FQ $=$ CP $= x$, AC $= \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2:b)}$; erit PM $=$ QM $-$ PQ $= y - ac:2b$, AP $= \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2:b)} - x$, PB $= \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2:b)} + x$, PM$^2 = y^2 - acy:b + a^2c^2:4b^2$ & AP. PB $= ac^2:4b - x^2$, & ex natura ellipsis (§. 420).

$$b:a = \frac{ac^2}{4b} - x^2 : y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{ax^2}{b} = y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$$

$$\frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b} - y^2$$

$$x^2 = cy - by^2 : a$$

Porro KR $=$ QF $= x$, KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, KF $=$ QR $= \frac{1}{2}c$, adeoque MR $=$ MQ $-$ QR $= y - \frac{1}{2}c$, RL $= x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, consequenter (§. 417. *Geom.*) LF$^2 =$ ML$^2 =$ KL$^2 +$ KF$^2 = \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc =$ MR$^2 +$ RL$^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}cc + x^2 + bx + \frac{1}{4}bb - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa$. Unde habemus

$$y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$$

hoc est, ob $x^2 = cy - by^2 : a$

$$y^2 + \frac{cy - by^2}{a} - cy + bx - ax = 0$$

$$\frac{ay^2 - by^2}{a} + bx - ax = 0$$

seu $\frac{ay^2 - by^2}{a} = ax - bx$

$$y^2 = \frac{x}{a - b}$$

$$\frac{y^2}{a} = x$$

$$\frac{y^4}{aa} = x^2$$

$$\frac{y^4}{aa} = cy - \frac{by^2}{a}$$

$$y^4 = aacy - aby^2$$

$$y^3 = aac - aby$$

$$y^3 + aby - aac = 0.$$

Construamus denique eandem æquationem combinatis loco' ad hyper-

hyperbolam intra asymptotos $xy+by-ac=0$ & loco ad circulum $y^2+x^2-cy+bx-ax=0$. Posterioris constructionem jam tradidimus: alterius constructio elicitur comparatione æquationis propositæ cum formula generali pro locis ad hyperbolam intra asymptotos instituta. Est nempe (§. 591).

$$\frac{r}{q}=0 \quad p=0 \quad -n=b \quad -mq=-ac$$

$$q=s \quad \frac{pr}{s}=0 \quad n=-b \quad \text{hinc}$$

$$m=c \quad q=a$$

Tab. IX. Fig. 92. Jungantur ipsi $AR=a$ recta $RI=c$ & indefinita AS ad angulos rectos, quæ erunt asymptoti hyperbolæ æquilateræ per punctum I describendæ (§. 489). Fiat $AD=b$, quia valor ipsius b negativus: erit $NM=DT=x$, $TM=y$ (§. *cit.*).

Tab. IX. Fig. 90. & 92. Quodsi jam circulus cum hyperbola combinari debet; punctum D in D & recta DQ super DT cadere debet. Scilicet ex D in K transferatur $DK=\frac{1}{2}c$ & ex K in L $\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$. Radio DL describatur circulus & ex puncto intersectionis circuli atque hyperbolæ M demittatur perpendicularis TM: dico hanc esse radicem æquationis.

Quoniam enim $AR=a$, $RI=c$, $AD=PN=b$, $NM=DT=x$, $TM=AP=y$; erit $AT=PM=b+x$ & ob $AR.RI=AP.PM$ (§. 501.) $by+xy=ac$, consequenter $x=\frac{ac}{y}-b$. Porro $KR=NM=x$, $LK=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$, $DK=TR=\frac{1}{2}c$. Ergo $LR=x+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a$, $RM=y-\frac{1}{2}c$, & ob $LM^2=LR^2+RM^2$ (§. 417. *Geom.*) $x^2+bx+\frac{1}{4}bb-ax-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}a^2+y^2-cy+\frac{1}{4}c^2=\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$y^2-cy=ax-x^2-bx$$

seu

$$(a-x-b)\,x$$

$$y^2-cy=\left(a-\frac{ac}{y}+b-b\right)\left(\frac{ac}{y}-b\right)$$

$$=\left(a-\frac{ac}{y}\right)\left(\frac{ac}{y}-b\right)$$

hoc est,

$$y^2-cy=\frac{aac}{y}-\frac{a^2c^2}{y^2}-ab+\frac{abc}{y}$$

$$y^4-cy^3=a^2cy-a^2c^2-aby^2+abcy$$

$$y-c \qquad y^3=a^2c-aby$$

$$y^3+aby-a^2c=0$$

SCHOLION.

608. *Mirabuntur forte, qui tyrones sunt in altioribus, quod tam operose construxerimus æquationem, quæ per regulam*

lam Cartesii *ope circuli & parabolæ admodum facile construitur. Sed notent velim, geometricas æquationum constructiones nullius fere in praxi esse usus, cum eidem satisfaciat methodus extrahendi radicem per approximationem. Faciunt vero ad exercendam ingenii vim & recludendos inventionum fontes. Quamobrem methodus inveniendi constructiones istiusmodi quam maxime explicari debet.*

RPOBLEMA 246.

609. *Construere æquationem cubicam* $y^3-aby=aac$.

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam:

$$a:y=yy-ab:ac$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & æquationes locales diversæ inde eliciantur, fiat

$$a:y=y:x$$

erit

I. $ax=y^2$ & hinc $y^2:a=x$

Porro: $y:x=yy-ab:ac$

hoc est, $ax-ab:ac$

seu (§. 124.) $x-b:c$

II. $x^2-bx=cy$

$ax=y^2$ $\quad$ $ax=y^2$

$x^2-bx=cy$ $\quad$ $cy=x^2-bx$

III. $ax-x^2+bx=y^2$ $(-cy$ $\quad$ IV. $ax-cy=y^2-$ $(x^2+bx$

$x^2-bx=cy$ $\quad$ $y^3-aby=aac$ $\quad$ a

$x^2-by^2=cy$ $\quad$ $y^3-by=ac$

a $\quad$ a

b

V. $ax^2-y^2=acy$ $\quad$ VI. $xy-by=ac$(I)

b $\quad$ b

Habemus adeo æquationes locales

I, $y^2-ax=0$

II. $x^2-bx-cy=0$

III. $y^2+x^2-cy-bx=0$
$\quad -ax$

IV. $y^2-x^2+cy+bx=0$
$\quad -ax$

V. $y^2-ax^2+acy=0$.
$\quad b \quad b$

VI. $xy-by-ac=0$.

Locus primus & secundus sunt ad parabolam; tertius ad circulum; quartus ad hyperbolam æquilateram; quintus ad hyperbolam scalenam; sextus ad hyperbolam intra asymptotos.

Cum æquationes locales nonnisi signis differant ab iis, in quas æquationem problematis præcedentis resolvimus; æquatio præsentis eodem fere modo construitur, quo præcedentem construximus: id quod in unico casu, quo circulus cum parabola combinatur, ostendisse suffecerit.

Locus

Tab. IX. Fig. 93. Locus ad parabolam $y^2 - ax = 0$ construitur ut in problemate præcedente, si parametro a parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe $AP = x$, $PM = y$.

Pro loco ad circum $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$, erit vi theorematis generalis (§. 589) $2r = 0$ & hinc $q = f$

$$2n = c \qquad 2p = b + a$$

$$n = \tfrac{1}{2}c \qquad p = \frac{b + a}{2}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}aa = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Quia ergo in circulo origo indeterminatæ x distat a centro quantitate $\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}a$ & alterius y quantitate $\tfrac{1}{2}c$, fiat $AD = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$ & perpendicularis $DH = \tfrac{1}{2}c$ atque radio AH describatur per verticem parabolæ A circulus, erit PM radix vera æquationis. QN & qn erunt falsæ.

Nam $AH^2 = MH^2 = HD^2 + DA^2 = \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}cc$ (§. 417. *Geom.*), $AP = yy : a$ (§. 391.), $PD = HR = \frac{yy}{a} - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$, $MR = y - \tfrac{1}{2}c$, consequenter ob $HM^2 = HR^2 + MR^2$ (§. 417. *Geom.*) $\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \tfrac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + y^2 - cy + \tfrac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} - cy = 0$$

$$\overline{}\,aa$$

$$y^4 - abyy - aacy = 0$$

$$\overline{}\,yy$$

$$y^3 - aby - aac = 0.$$

PROBLEMA 241.

610. *Construere æquationem cubicam* $y^3 - aby = -aac$.

Æquatio proposita $y^3 - aby = -aac$, hoc est, $aac = aby - y^3$ in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = ab - yy : ac$$

ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = ab - yy : ac$

hoc est, $\quad ab - ax : ac$

seu (§. 124) $\quad b - x : c$

II. $bx - xx = cy$

$$ax = y^2 \qquad ax = y^2$$

$$bx - x^2 = cy \qquad cy = bx - x^2$$

III. $ax - bx + x^2 = y^2$ (−cy) IV. $ax - cy = y^2$ (−bx + x²)

$bx - x^2 = cy$ $\qquad aac = aby - y^3$

$\frac{by^2}{a} - x^2 = cy$ $\qquad ac = by - \frac{y^3}{a}$

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$ $\qquad$ VI. $ac = by - xy$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$
II. $x^2 - bx + cy = 0$
III. $y^2 - x^2 - cy + bx - ax = 0$
IV. $y^2 + x^2 + cy - bx - ax = 0$
V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$
VI. $xy - by + ac = 0$

Locus primus & ſecundus ſunt ad parabolam, tertius ad hyperbolam æquilateram, quartus ad circulum, quintus ad hyperbolam ſcalenam, ſextus ad hyperbolam intra aſymptotos.

Æquationes locales denuo nonniſi ſignis differunt ab iis, quas in problemate 245. (§. 607) reperimus. Quare denuo nobis ſuffecerit, conſtructionem ope parabolæ & circuli oſtendiſſe.

Quoniam locus ad parabolam $y^2 = ax$; parabola denuo conſtruitur parametro a, & origo indeterminatæ x eſt in vertice axis A. Tab. IX. Fig. 94.

Pro circulo, cujus æquatio $y^2 + x^2 + cy - bx - ax = 0$, vi theorematis generalis (§. 589)

$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = c \qquad -2p = -b - a$

hinc

$q = ſ \qquad n = -\frac{1}{2}c \qquad p = \frac{b + a}{2}$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb)} = m$$

Deſcribatur ergo radio $AC = m$ ſemicirculus, ductaque FLS intervallo $CL = \frac{1}{2}c$ diametro AB parallela; erit $SQ = x$, $QM = y$. Tab. IX. Fig. 95.

Quamobrem ſi circulus cum parabola combinatur, punctum S ſuper A & SL ſuper AD cadet. Quare ſi fiat $AD = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & erigatur perpendicularis $DH = \frac{1}{2}c$; erit $AH = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)}$ radius circuli per verticem deſcribendi & PM radix vera æquationis. Tab. IX. Fig. 94.

Nam $AP = yy : a$ (§. 391), hinc $DP = HR = yy : a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Porro $MR = y + \frac{1}{2}c$. Quare ob $HM^2 = MR^2$

$MR^2 + HR^2$ (§.417 *Geom.*), $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} + cy = 0$$

——————— aa

$$y^4 - abyy + aacy = 0$$

——————— y

$$y^3 - aby + aac = 0$$

COROLLARIUM.

612. Si circulus parabolam tangit; duæ intersectiones coincidunt, adeoque æquatio duas habet radices æquales. Si eam nec tangit, nec secat; radices omnes sunt impossibiles.

SCHOLION.

613. *Constructiones per circulum & parabolam, quas dedimus, coincidunt cum iis, quas habet* Cartesius (o), *etsi alio modo eruta.*

PROBLEMA 248.

614. *Construere æquationem cubicam* $y^3 + ay^2 - aby = aac$.

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Substituatur ax pro y^2 in æquatione data erit

$$axy + aax - aby = aac$$

a ———————

$$\text{II. } xy + ax - by = ac$$

——————— $y - a$

$$xy^2 + axy - by^2 - a^2x + aby = acy - a^2c$$
$$- axy$$

———————

$$xy^2 - by^2 - a^2x = acy - aby - a^2c$$
$$ax^2 - abx^2 - a^2x = acy - aby - a^2c$$

———————

$$\text{III. } x^2 - bx - ax = cy - by - ac$$
$$ax = y^2$$

$$\text{IV. } 2ax - x^2 + bx = y^2 - cy + by + ac$$
$$x^2 - bx - ax = cy - by - ac$$
$$ax = y^2$$

———————

$$\text{V. } x^2 - bx = y^2 + cy - by - ac$$
$$x^2 - \frac{by^2}{a} = ax + cy - by - ac$$

———————

$$\text{VI. } \frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{a^2x}{b} + \frac{acy}{b} - ay - \frac{a^2c}{b}$$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $xy + ax - by - ac = 0$

III. $x^2 - bx - cy + ac = 0$
$\quad - ax + by$

IV. $y^2 + x^2 - cy - 2ax + ac = 0$
$\quad + by - bx$

 V.

(o) Geometr. lib. 3. p. 85. & seqq.

V. $y^2 - x^2 + cy + bx - ac = 0$
$\quad\quad - by$

VI. $y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$
$\quad\quad - ay$

Locus primus & tertius ſunt ad parabolam; ſecundus ad hyperbolam intra aſymptotos; quartus ad circulum; quintus ad hyperbolam æquilateram; ſextus ad hyperbolam ſcalenam.

Conſtruamus æquationem combinando circulum cum parabola. Tab. X. Fig. 96. Locus ad parabolam $y^2 - ax = 0$ conſtruitur, ſi parametro a parabola deſcribitur; cujus vertex A origo ipſius x.

Pro circulo $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$ erit vi theorematis generalis (§. 589).

$\frac{2r}{q} = 0 \quad -2n = -c + b \quad -2p = -2a - b$

hinc

$q = ſ \quad n = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b \quad p = a + \frac{1}{2}b$

$$n^2 + p^2 - m^2 = ac$$

$$n^2 + p^2 - ac = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{4}bb + a^2 + ab + \tfrac{1}{4}bb - ac = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + (a + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c)^2)} = m$$

Jungatur ipſi $IL = a$ ad angulos rectos LR ipſi æqualis & reſecetur $LH = PN = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit $HR = a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Tab. X. Fig. 97. Fiat $DL = HC = \frac{1}{2}b$; erit $CR = m$, adeoque radius circuli, quo deſcripto habebitur $IP = x$ & $PM = y$.

Eſt enim $NM = PM - PN = y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, adeoque $NM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 - cy - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$. Porro $DP = IP - ID = x - a - \frac{1}{2}b$, adeoque $DP^2 = x^2 - 2ax - bx + a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum ſit $CR^2 = CM^2 = NM^2 + CN^2$ (§. 417 *Geom.*), & $CM^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}b^2 + a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 - ac$, erit $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, quæ eſt æquatio ad conſtruendum propoſita. Circulus itaque rite conſtructus.

Si jam circulus cum parabola combinatur, punctum I in verticem parabolæ A & IP ſuper AP cadit. Tab. X. Fig. 96. Quare fiat $AL = a$; erit $LR^2 = aa$ (§. 388.), hoc eſt, $LR = a$. Fiat porro $LH = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit $HR = a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat denique $DL = HC = \frac{1}{2}b$; erit CR radius circuli per punctum parabolæ R ex centro C deſcribendi & ſemiordinata PM radix æquationis.

Nam $PN = LH = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$: hinc $NM = y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Ex natura parabolæ $\frac{y^2}{a} = AP$: unde $DP = CN = \frac{y^2}{a} - a - \frac{1}{2}b$. Quare cum ſit (§. 417 *Geom.*)

Geom.) $CM^2 (= CR^2) = CN^2 + CM^2$; $\frac{1}{4}b^2 + a^2 + ab + \frac{1}{4}bb - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - 2y^2 + aa - \frac{by^2}{a} + ab + \frac{1}{4}bb + y^2 + by + \frac{1}{4}bb - cy - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} - y^2 - \frac{by^2}{a} + by - cy + ac = 0$$

———————————— aa

$$y^4 - a^2y^2 - aby^2 + a^2by - a^2cy + a^3c = 0$$

———————————— $y - a$

$$y^3 + ay^2 - aby - a^2c = 0.$$

SCHOLION.

615. *Satis liquet, quomodo æquationum cubicarum casus reliqui construi debeant, ut adeo plura addere supervacaneum judicemus.*

PROBLEMA 249.

616. *Æquationem biquadraticam* $y^4 + aby^2 + a^2cy = a^3d$ *construere.*

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Hoc valore in æquatione data substituto prodibit

$$a^2x^2 + aby^2 + a^2cy = a^3d$$

———————————— ab

$$\text{II. } y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} = \frac{a^2d}{b}$$

Item $a^2x^2 + a^2bx + a^2cy = a^3d$

———————————— a^2

$$x^2 + bx + cy = ad$$

$$\text{III. } x^2 + bx = ad - cy$$
$$ax = y^2$$

$$\text{IV. } x^2 + bx + ax = y^2 + ad - cy$$
$$ax = y^2$$
$$x^2 + bx = ad - cy$$

$$\text{V. } ax - x^2 - bx = y^2 - ad + cy$$

Habemus adeo æquationes locales;

I. $y^2 - ax = 0$

II. $y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} - \frac{a^2d}{b} = 0$

III. $x^2 + bx + cy - ad = 0$

IV. $y^2 - x^2 - cy - bx + ad = 0$
$\quad - ax$

V. $y^2 + x^2 + cy + bx - ad = 0$
$\quad - ax$

Locus primus & tertius est parabola, secundus ellipsis, quartus hyperbola æquilatera, quintus denique circulus.

Construamus primum æquationem, circulo cum parabola $ax = y^2$ combinato. Construatur parabola MDN parametro a, erit $DQ = x$, $QM = y$.

Pro circulo $y^2 + x^2 + cy + bx - ax - ad = 0$ erit vi theorematis generalis (§. 589).

$\frac{r}{q}=0 \quad \frac{s^2}{q^2}=1 \quad -2n=c \quad -2p=b-a$

$s=q \quad n=-\frac{1}{2}c \quad p=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$

$n^2+p^2-m^2=-ad$

$n^2+p^2+ad=m^2$

$\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+ad)=m^2$

$\surd(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+ad=m$

Tab. X. Fig. 98. Erecta in D perpendiculari DK $=QP=\frac{1}{2}c$ ob valorem ipsius c negativum, ducatur per K recta indefinita AB fiatque KC $=\frac{1}{2}a-b$ erit (§. 417. *Geom.*) DC $=\surd(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb)$. Fiat porro DI $=a$ & continuata DC in H, donec HD $=d$, quaeratur media proportionalis DL (§. 327. *Geom.*), quae erit $\surd ad$: consequenter LC $=\surd(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+ad)$ (§. 417. *Geom.*) est radius circuli ex centro C per L describendi, qui cum parabolam secet in M & N; erit QM radix aequationis vera, RN falsa.

Est enim PM $=y+\frac{1}{2}c$; DQ=KP $=y^2:a$ (§. 388), CP $=$ KP $-$ KC $=\frac{y^2}{a}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$. Quare (§. 417. *Geom.*) ob MC² seu CL² = PM² + PC², $\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb+ad=y^2+cy+\frac{1}{4}cc+\frac{y^4}{aa}-y^2+\frac{1}{4}aa+\frac{by^2}{a}-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb$, hoc est,

$\frac{y^4}{aa}+\frac{by^2}{a}+cy=ad$

(multiplied by aa)

$y^4+aby^2+aacy=a^3d$

Combinemus eundem circulum cum ellipsi, quam definit aequatio superius reperta $y^2+\frac{ax^2}{b}+\frac{ac}{b}y-\frac{a^2d}{b}=0$. Erit vi theorematis generalis (§. 588)

$\frac{r}{q}=0 \quad \frac{t}{2m}=\frac{a}{b} \quad -2n=\frac{ac}{b} \quad p=0$

hinc

$q=s \quad n=-\frac{ac}{2b}$

$n^2-\frac{tm^2}{2m}=-\frac{a^2d}{b}$

$\frac{a^2c^2}{4b^2}-\frac{am}{b}=-\frac{a^2d}{b}$

(multiplied by $\frac{a}{b}$)

$\frac{ac^2}{4b}+ad=m$

$\surd(\frac{ac^2}{4b}+ad)=m$

Con-

Tab. X. Fig. 99. Construatur locus ad circulum, ut ante, nempe ut sit $DK = \frac{1}{2}c$, $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $DI = a$, $DH = d$ adeoque $DL = \sqrt{ad}$ (§. 327. *Geom.*), consequenter $LC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad)}$ (§. 417 *Geom.*).

Jam cum origo indeterminatæ x sit in D, & valor ipsius n in ellipsi etiam negativus & $p = 0$; ex DK resecetur $DG = ac : 2b$ & per G ducatur AB ipsis DQ & KP parallela fiatque $AG = BG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Tandem circa AB tanquam axem describatur ellipsis AMB, in qua axis AB ad parametrum $= b : a$. Dico QM esse radicem æquationis veram. Est enim $GR = DQ = x$, $MR = MQ + QR = MQ + DG = y + ac : 2b$; ratio diametri ad parametrum $= b : a$; $AG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Quare ex natura ellipsis (§. 431)

$$a : b = RM^2 : AG^2 - GR^2 = (BR.RA)$$

$$y^2 + \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2} : ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$\frac{by^2 + cy}{a} + \frac{ac^2}{4b} = ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$x^2 = ad - \frac{by^2 - cy}{a}$$

Porro $PM = MQ + QP = MQ + DK = y + \frac{1}{2}c$; $CP = KP - KC = DQ - CK = x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Quamobrem ob $MC^2 = LC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc + x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$y^2 + x^2 + cy - ax + bx = ad$$

$$x^2 = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

Habemus ergo

$$ad - \frac{by^2 - cy}{a} = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

$$bx - ax = \frac{by^2}{a} - y^2 \qquad b - a$$

$$x = y : a$$

$$x^2 = y^4 : aa$$

hoc est, $\frac{y^4}{a^2} = ad - \frac{by^2}{a} - cy$, vi superiorum.

$$a^2$$

$$y^4 = a^3d - aby^2 - a^2cy$$

$$y^4 + aby^2 + a^2cy = a^3d$$

PROBLEMA 250.

617. *Construere æquationem biquadraticam*

$$y^4 + aby^2 - a^2cy = -a^3d$$

Ut

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a:y = y:x$$

erit I. $yy = ax$. Hinc $x = y^2 : a$

Si valor ipsius y^2 in æquatione proposita substituatur: prodibit

$$\frac{a^2x^2 + aby^2 - a^2cy = -a^3d}{ab}$$

II. $\frac{ax^2}{b} + y^2 = \frac{acy}{b} - \frac{a^2d}{b}$

Item $a^2x^2 + a^2bx = a^2cy - a^3d$

III. $x^2 + bx = cy - ad$

$$ax = y^2$$

IV. $x^2 + bx + ax = y^2 + cy - ad$

$$ax = y^2$$

$$x^2 + bx = cy - ad$$

V. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy + ad$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} + \frac{a^2d}{b} = 0$

III. $x^2 + bx - cy + ad = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy - bx - ad = 0$
$\quad -ax$

V. $y^2 + x^2 - cy + bx + ad = 0$
$\quad -ax$

Locus primus & tertius sunt parabolæ; secundus est ellipsis; quartus hyperbola æquilatera; quintus denique circulus.

Dabimus constructionem per circulum & parabolam, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$. Est ergo parameter $= a$, $AP = x$, $PM = y$.

Pro circulo vi theorematis generalis (§. 589)

$\frac{r}{q} = 0 \quad -2n = -c \quad -2p = -a + b$

hinc

$q = s \quad n = \frac{1}{2}c \quad p = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$

$$n^2 + p - m^2 = ad$$

$$n^2 + p^2 - ad = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb - ad)} = m$$

Ducatur recta CR & sumatur C pro centro circuli. Erigatur CK $= \frac{1}{2}c$ ad CR perpendicularis & per K ducatur AP eidem parallela. Fiat AK $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$; erit in A origo indeterminatæ x & AC $= \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb)}$. Fiat AI $= d$, AH $= a$; quæraturque media proportionalis AL $= \sqrt{ad}$ (§. 327 *Geom*). Porro super AC describatur semicirculus & in eo applicetur GA $=$ AL $= \sqrt{ad}$; erit GC $= \sqrt{\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - ad}$ (§. 417 *Geom.*) adeoque radius circuli. Tab. XI. Fig. 100.

Quoniam in parabola, cujus æquatio $y^2 - ax = 0$ origo indeterminatæ x in verticem axis cadit;

circa

circa axem AP parametro a describatur parabola: dico PM esse radicem æquationis veram.

Est enim MR=PM − PR = PM − CK = $y - \frac{1}{2}c$; AP = $y^2 : a$ & CR = KP = AP − AK = $\frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, consequenter ob $CM^2 = CG^2 = CR^2 + MR^2$ (§. 417. *Geom.*) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - ad = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = -ad$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = -a^3d$$

Cum loco ad circulum descripto eodem modo, quo in problemate præcedente, combinatur locus ad ellipsin. Lubet vero adhuc constructionem dare per circulum & hyperbolam æquilateram $y^2 - x^2 + cy - bx - ax - ad = 0$.

Est autem vi theorematis generalis (§. 590)

$$\frac{r}{q} = 0 \quad \frac{-t}{2m} = -1 \quad -2n = c \quad 2p = -a - b$$

$$t = 2m \quad n = -\frac{1}{2}c \quad p = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = -ad$$

$$m^2 = p^2 - n^2 - ad$$

$$m^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad$$

$$m = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad)}$$

Constructo nempe circulo ut ante, ita ut sit AK = $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, CK = $\frac{1}{2}c$, adeoque CA = $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)}$, AH = a, AI = d, adeoque AL = AG = $\sqrt{ad}$, consequenter GC = MC = $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + ad)}$; quia origo indeterminatæ y in hyperbola ob valorem ipsius n negativum ab axe versus sinistram distat intervallo $\frac{1}{2}c$, fiat KT = $\frac{1}{2}c$, ducaturque per T recta OS ipsi AP parallela & ad hanc AF perpendicularis. Tab. X. Fig. 101.

Quoniam porro ob valorem ipsius p negativum indeterminatæ x origo a centro distat intervallo $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, fiat FO = $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & OQ = $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad)}$; erit O centrum & Q vertex hyperbolæ æquilateræ; quæ si circa axem QS describatur, circulum in M secabit. Dico PM esse radicem æquationis veram.

Est enim CK = RP = AP − AK = $x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & MR = MP − RP = MP − CK = $y - \frac{1}{2}c$, consequenter ob $MC^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc - ad = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$x^2 - ax + bx + y^2 - cy = -ad$$

$$x^2 = ax - bx + cy - y^2 - ad$$

Porro MS = MP + PS = MP + KT $= y + \frac{1}{2}c$, SO = FS + FO = AP FO $= x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, consequenter ob $SO^2 - QO^2 = MS^2$ (§. 509) $x^2 + ax + \frac{1}{4}aa + bx + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est.

$$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

seu substituto valore ipsius x^2

$$ax - bx + cy - y^2 - ad + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

$$2ax = 2y^2 \text{ seu } ax = y^2$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^2 : aa$$

His valoribus ipsorum x^2 & x in æquatione

$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$ substitutis, prodit

$$y^2 + cy = \frac{y^4}{aa} + y^2 + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$cy = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$aacy = y^4 + aby^2 + a^3d$$

seu $y^4 + aby^2 - a^2cy = -a^3d$.

PROBLEMA 251.

618. *Construere æquationem biquadraticam* $y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$.

Quoniam $y^4 + 2by^3 = a^3d - a^2cy$; æquatio data in hanc resolvitur analogiam:

$$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = b + y : x$$

erit I. $ax = by + y^2$

$ax - by = y^2$, consequenter

$$a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$$

II. $a^3d - a^2cy = a^2x^2 - b^2y^2$

Substituatur in hac æquatione ulterius valor ipsius y^2; prodibit

$$a^3d - a^2cy = a^2x^2 - ab^2x + b^3y$$

h. e. $a^3d - a^2cy - b^3y = a^2x^2 - ab^2x$

III. $ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2x}{a}$

$$yy + by = ax$$

IV. $ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} + y^2 + by = x^2 - \frac{b^2x}{a} + ax$

$$ad - cy - \frac{b^3y}{a^2} = x^2 - \frac{bx^2}{a}$$

$y^2 +$

$y^2 + by = ax$

$\text{V. } y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3y}{a} = ax - x^2 + \frac{b^2x}{a}$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 + by - ax = 0$

II. $y^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{a^2cy}{b^2} + \frac{a^3d}{b^2} = 0$

III. $x^2 - \frac{b^2x}{a} + \text{[illegible]}y - ad = 0$
$\quad + \frac{b^3y}{aa}$

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3y}{a^2} + \frac{b^2x}{a} + ad = 0$
$\quad + by - ax$
$\quad - cy$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3y}{a^2} - \frac{b^2x}{a} - ad = 0$
$\quad + by - ax$
$\quad + cy$

Conſtruamus æquationem per circulum & parabolam. Pro circulo cum ſit $y^2 + x^2 + \frac{b^3y}{a^2} + by + cy - \frac{b^2x}{a} - ax - ad = 0$; erit vi theorematis generalis (§. 589)

$r = 0 \quad \frac{s^2}{q^2} = 1 \quad -2n = \frac{b^3}{a^2} + b + c$

$s = q \quad n = -\frac{b^3}{2a^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$

$-2p = -\frac{b^2}{a} - a$

$p = \frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2}a$

$n^2 + p^2 - m^2 = -ad$

$n^2 + p^2 + ad = m^2$

$\sqrt{(n^2 + p^2 + ad)} = m$

Circulus ergo eodem prorſus modo conſtruitur, quo in problemate 249. (§. 616). Fit nempe $DC = p = b^2 : 2a + \frac{1}{2}a$, $DO = n = b^3 : 2a^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, $HO = a$, $OI = d$; erit $OC = \sqrt{(n^2 + p^2)}$, $OL = \sqrt{ad}$ & hinc $LC = \sqrt{(n^2 + p^2 + ad)}$. Ducatur OQ ipſi DC parallela, erit ob valorem OD negativum origo indeterminatæ x in O. Tab. X. Fig. 101.

Porro pro parabola, ad quam $y^2 + by - ax = 0$, erit vi theorematis generalis (§. 587).

$\frac{r}{q} = 0 \quad -2n = b \quad -\frac{ts}{q} = -a$

$n = -\frac{1}{2}b$

hinc $t = a$
$r = 0$
$q = s$

$$n^2 + tp = 0$$

$$\tfrac{1}{4}bb + ap = 0$$

$$ap = -\tfrac{1}{4}bb$$

$$p = -\frac{bb}{4a}$$

Ob valorem itaque ipsius n negativum fiat OK $= \frac{1}{2}b$ ducaturque per K recta AR ipsi OQ parallela, ob valorem ipsius p negativum fiat KA$=bb:4a$; erit in A parabolæ vertex parametro a circa axem AR describendæ, quæ circulum secabit in M. Dico QM esse radicem æquationis veram.

Sit enim QM$=y$: erit MR $= y + \frac{1}{2}b$, adeoque RA$=\frac{yy+by+\frac{1}{4}bb}{a}$ (§.391), consequenter KR $=$ AR $-$ AK $= \frac{yy+by}{a}$. Hinc PC $=$ OQ sive KR $-$ CD$=\frac{yy+by}{a}-p$ & PM $=$ QM $+$ QP $=$ QM $+$ DO $= y+n$. Quare cum sit LC$^2 =$ MC$^2 =$ PM^2 $+$ PC^2 (§. 417. *Geom.*); habebitur tandem $n^2 + p^2 + ad = \frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + p^2 + y^2 + 2ny + n^2$, hoc est, $\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + y^2 + 2ny = ad$. Substituantur valores p & n ex æquatione ad circulum. Quoniam $p = \frac{1}{2}a + b^2 : 2a$ & $n = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + b^3 : 2a^2$; prodibit $\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - y^2 - \frac{b^2y^2}{aa} - by - \frac{b^3y}{aa} + y^2 + by + cy + \frac{b^3y}{aa} = ad$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + cy = ad$$

$$\overline{}\,aa$$

$$y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$$

SCHOLION.

619. *Æquationes locales, in quas æquationes construendas resolvimus, sunt ad curvam aliquam determinatam; sed plurimum amplificatur methodus, si exemplo* Slusii *ad curvam indeterminatam revocentur: tum enim non amplius ellipsis vel hyperbola unica, sed infinitæ constructioni inserviunt. Potest etiam æquatio localis ad curvam datam revocari, sicque problema per sectionem conicam datam construi. Agedum itaque! videamus, quomodo utrumque præstetur.*

PRO-

PROBLEMA 252.

620. *Æquationem datam resolvere in æquationes locales, quæ sint ad curvas indeterminatas.*

a) Substituatur pro *y* radice æquationis $az : v$, ubi pro v recta quælibet assumi potest, & nova, quæ prodit, æquatio in locales ut supra resolvatur: id quod exemplo unico ostendisse sufficit.

Sit $y^3 + aby = aac$. Quoniam $y = az : v$; erit $y^3 = a^3z^3 : v^3$ consequenter

$$\frac{a^3z^3}{v^3} + \frac{a^2bz}{v} = aac$$

$$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$$

Hæc æquatio in sequentem resolvitur analogiam:

$$v : z = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat;

$$v : z = z : x$$

erit I. $z^2 = vx$. Hinc $z^2 : v = x$

Porro $z : x = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

hoc est, $vx + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

seu (§.124) $x + \frac{vb}{a} : \frac{vc}{a}$

II. $x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

$$vx = z^2$$

III. $x^2 + \frac{vbx}{a} + vx = \frac{vcz}{a} + z^2$

$$vx = z^2$$

$$x^2 + \frac{vb\,x}{a} = \frac{vc\,z}{a}$$

IV. $vx - x^2 - \frac{vb\,x}{a} = z^2 - \frac{vc\,z}{a}$

$$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$$

hoc est, ob $x = z^2 : v$

V. $x^2 + \frac{bz^2}{a} = \frac{vcz}{a}$

$$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a} \quad v$$

$$\frac{z^3}{v} + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$$

VI. $zx + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$

Habemus adeo æquationes locales ad infinitas sectiones Conicas nempe

I. $z^2 - vx = 0$ } ad infinitas parabolas.

II. $x^2 + \frac{vbx}{a} - \frac{vcz}{a} = 0$

III. $z^2 - x^2 + \frac{vcz}{a} - \frac{vbx}{a} - vx = 0$ ad infinitas hyperbolas æquilateras.

IV. $z^2 + x^2 - \frac{vcz}{a} + \frac{vbx}{a} - vx = 0$ ad infinitos circulos.

V. $z^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{vcz}{b} = 0$ ad infinitas ellipses.

VI. $zx + \frac{vbz}{a} - \frac{v^2c}{a} = 0$ ad infinitas hyperbolas intra asymptotos.

β) Si fieret $\frac{aa}{v} : y = y : x$; locus primus $y^2 = \frac{a^2 x}{v}$ foret ad infinitas parabolas, nec radix æquationis y (id quod maxime commodum videri poterat) mutaretur in aliam: sed cum locus ad circulum degeneret in locum ad ellipsin, simplicitati constructionis minime consuleretur. Loca tamen ad hyperbolam & ellipsin determinatam ita reduci possunt ad hyperbolas & ellipses infinitas, ut utraque indeterminata y & x eadem maneat.

E. gr. Pro æquatione proposita construenda elicuimus supra (§. 607.)

I. $y^2 - ax = 0$ } loca ad parabolam.

II. $x^2 + bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$ locum ad circulum.

Quoniam $y^2 = ax$

erit $\frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$

& ob $cy = x^2 + bx$

$$\frac{ay^2}{v} - cy = \frac{a^2x}{v} - x^2 - bx$$

$$y^2 - \frac{vcy}{a} = ax - \frac{vx^2}{a} - \frac{vbx}{a}$$

Item $\frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$

$cy = x^2 + bx$

$$\frac{ay^2}{v} + cy = x^2 + \frac{a^2x}{v} + bx$$

$$y^2 + \frac{vcy}{a} = \frac{vx^2}{a} + ax + \frac{vbx}{a}$$

En locum ad infinitas ellipses $y^2 + \frac{vx^2}{a} - \frac{vcy}{a} + ax + \frac{vbx}{a} - ax = 0$ & locum ad infini-

infinitas hyperbolas $y^2 - \frac{vx^2}{a} + \frac{vcy}{a} - \frac{ax - vbx}{a} = 0$: quorum uterque cum loco ad circulum $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$ construi potest.

PROBLEMA 253.

621. *Æquationem localem reducere ad aliam ejusdem speciei, quæ sit ad curvam datam.*

1. Ex æquatione locali eliciendus est valor linearum, per quas datur, aut, quod perinde est, ratio earundem.
2. Hi valores cum sint æquales lineis, per quas datur curva, ad quam æquatio reducenda; æquationes prodeunt, quarum reductione legitime facta prodibunt valores coëfficientium in æquatione data substituendi, ut in quæsitam degeneret.

E. gr. Æquatio ad parabolam $y^2 - ax = 0$ mutanda est in aliam, quæ sit ad parabolam, cujus parameter r. Quoniam a parameter parabolæ, ad quam æquatio data existit; erit $r = a$. consequenter æquatio quæsita $y^2 - rx = 0$.

Similiter reducenda sit æquatio $y^2 + x^2 + by - ay - cx = 0$ ad circulum, cujus radius r. Quoniam radius æquationis circuli, ad quam est æquatio data, $\sqrt{[(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}cc]}$;

erit $[\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b]^2 + \frac{1}{4}cc = r^2$

$$[\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b]^2 + = r^2 - \tfrac{1}{4}cc$$
$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)}$$

$$\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)} = f$$
$$\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)} = g$$
$$\tfrac{1}{2}c = \sqrt{(r^2 - [\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b]^2)} = h$$

His valoribus in æquatione proposita substitutis; prodit æquatio ad circulum desideratum

$$y^2 + x^2 + 2gy - 2fy - 2hx = 0.$$

PROBLEMA 254.

622. *Invenire regulam generalem construendi omnes æquationes tam cubicas, quam biquadraticas.*

Sit descripta ptrabola & ex centro H radio AH circulus secans eam in N, N & M. Sit AD $= b$, DH $= d$, AQ $= c$; erit AH$^2 = dd + bb$. Sit porro PM $= x$, parameter parabolæ $= a$, erit OM $= x + c$, RM $= x + d$. Quoniam (§. 404)

$$a : \text{OM} + \text{AQ} = \text{PM} : \text{AP}$$
$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

erit DP $=$ HR $= \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$, adeoque HR$^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} -$

$2bx^2$

$\frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb$ & $RM^2 = x^2 + 2dx + dd$. Habemus adeo:

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb$$
$$+ x^2 + 2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{4bcx}{a} = 0$$
$$- \frac{2bx^2}{a} + 2dx$$
$$+ x^2$$

$$x^3 + 4cx^2 + 4c^2x - 4abc = 0$$
$$- 2abx + 2a^2d$$
$$+ a^2x$$

Apparet adeo, si habetur terminus secundus positivus, radices veras cadere versus dextram. Sit adeo æquatio cum ea comparanda $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; erit

$$4c = p \qquad 4c^2 - 2ab + a^2 = q$$
$$c = \tfrac{1}{4}p \qquad 4c^2 + a^2 - q = 2ab$$
$$\tfrac{4}{16}p^2 + a^2 - q = 2ab \quad :2a$$
$$\frac{p^2}{8a} + \tfrac{1}{2}a - \frac{q}{2a} = b$$

vel

$$a^2 + 4c^2 - 2ab = -q$$
$$a^2 + \tfrac{4}{16}p^2 + q = 2ab \quad :2a$$
$$\tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$$

Porro

$$2a^2d - 4abc = r$$
$$2a^2d = r + 4abc \quad :2a^2$$
$$d = \frac{r}{2a^2} + \frac{2bc}{a}$$

h. e. $d = \frac{r}{2a^2} + \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2}$

vel

$$2aad - 4abc = -r$$
$$2aad = 4abc - r$$
$$d = \frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2}$$

h. e. $d = \frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} + \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2}$

Sit jam $PN = x$; reliqua sint ut ante: erit $NR = PN - RP = PN - DH = x - d$, $NO = x - c$, $PM = x - 2c$. Quoniam (§. 404) Tab. X. Fig. 103.

$$a : ON + AQ = PM : AP$$
$$a : x = x - 2c : \frac{xx - 2cx}{a}$$

erit $DP = HR = \frac{x^2 - 2cx}{a} - b$. Habemus adeo $NH^2 = HR^2 + NR^2$ (§. 417 *Geom.*)

$x^4 -$

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} + \frac{4bcx}{a} + b^2$$
$$+ x^2 - 2dx + dd = bb + dd$$

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} + \frac{4bcx}{a} = 0$$
$$- \frac{2bx^2}{a} \quad - 2dx$$
$$+ x^2$$

$$x^3 - 4cx^2 + 4c^2x + 4abc = 0$$
$$- 2abx - 2a^2d$$
$$+ a^2x$$

Apparet adeo, si terminus secundus sit negativus, radicem æquationis veram esse versus sinistram. Sit adeo æquatio cum ea comparanda $x^3 - px^2 \overline{+} qx \overline{+} r = 0$; erit

$$-p = -4c$$

$$\tfrac{1}{4}p = c$$
$$4c^2 - 2ab + a^2 = q$$

$$a^2 + 4c^2 - q = 2ab$$

$$\tfrac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} - \frac{q}{2a} = b$$

h. e. $\tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} - \frac{q}{2a} = b$

Vel

$$4c^2 - 2ab + a^2 = -q$$

$$a^2 + 4c^2 + q = 2ab$$

$$\tfrac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} + \frac{q}{2a} = b$$

h. e. $\tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$

Porro

$$4abc - 2a^2d = r$$

$$4abc - r = 2a^2d$$

$$\frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2} = d$$

h. e. $\tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \overline{+} \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d$

Vel

$$4abc - 2a^2d = -r$$

$$4abc + r = 2a^2d$$

$$\frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2} = d$$

h. e. $\tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \overline{+} \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d.$

Est ergo in omnibus æquationibus cubicis completis

$AQ = \tfrac{1}{4}p$

$DA = \tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} \pm \frac{q}{2a}$

$DH = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \overline{+} \frac{pq}{4a^2} \overline{+} \frac{r}{2a^2}$

Nimirum in regula q seu coëfficiens termini tertii semper afficitur signo contrario ejus, quod in æquatione habet. Habetur autem in regula $-r$, si p & r diversis signis afficiuntur: alias semper est $+r$.

Quoniam coëfficientes illorum terminorum evanescunt, qui nihilo æquales ponuntur; evidens est ejusdem regulæ ad æquationes incompletas applicatio.

Denique si quadratum radii MH vel HN ponatur $bb + dd \mp af$; æquatio manebit biquadratica. Quare si biquadratica æquatio fuerit $x^4 \mp px^3 \mp qx^2 \mp rx \mp f = 0$; reliqua omnia manebunt ut ante, sed

$$f = a^3 f$$

$$f : a^3 = f$$

Unde radius circuli invenitur ut in problemate 250. (§. 617), si fuerit $+f$, vel ut in problemate 251. (§. 618), si fuerit $-f$. His observatis, regula eadem constructioni æquationum biquadraticarum satisfacit.

SCHOLION.

623. *Atque hæc est regula, quam* Thomas Bakerus (p) *centralem vocat & ad omnes casus æquationum cubicarum & biquadraticarum applicat. Sed verum ejus fundamentum latet in iis, quæ superius tradidimus. Restat, ut usum hujus doctrinæ aliquot exemplis illustremus.*

PROBLEMA 255.

624. *Inter duas lineas datas invenire duas medias continue proportionales.*

Si datarum major $= b$, quæsitarum minor $= a$ minor $= y$, major $= x$

erit per conditionem problematis:

$a : y = y : x \qquad y : x = x : b$

I. $ax = y^2$ II. $x^2 = by$

$a : y = x : b \qquad ax = y^2$

III. $xy = ab$ IV. $x^2 - ax = by - y^2$

$ax = y^2 \qquad x^2 = by$

$x^2 = by$

$ax^2 = aby$

V. $x^2 + ax = y^2 + by \quad \dfrac{}{v} \quad \dfrac{}{v}$

$ax = y^2$

VI. $ax^2 + ax = aby + y^2$

$\dfrac{}{v} \qquad \dfrac{}{v}$

$ax = y^2$

$ax^2 = aby$

$\dfrac{}{v} \qquad \dfrac{}{v}$

VII. $ax - ax^2 = y^2 - aby$

$\dfrac{}{v} \qquad \dfrac{}{v}$

Habemus adeo æquationes locales

I. y^2

(p) in Clave Geometrica catholica p. 6.

I. $y^2-ax=0$
II. $x^2-by=0$ } ad parabolam.
III. $xy-ab=0$ ad hyperbolam intra asymptotos.

IV. $y^2+x^2-by-ax=0$ ad circulum.

V. $y^2-x^2+by-ax=0$ ad hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2-\frac{ax^2}{v}+\frac{aby}{v}-ax=0$ ad infinitas hyperbolas scalenas.

VII. $y^2+\frac{ax^2}{v}-\frac{aby}{v}-ax=0$ ad infinitas ellipses.

Quodsi in æquatione ad hyperbolam intra asypmtotos $xy=ab$ substituatur valor ex æquatione ad parabolam $ax=y^2$; prodibit $y^3-a^2b=0$.

Constructio itaque multis modis fieri potest, nimirum per circulum & hyperbolam intra asymptotos, per circulum & hyperbolam æquilateram, per circulum & infinitas hyperbolas, per circulum & infinitas ellipses, vel per duas hyperbolas &c. vel denique per regulam centralem *Bakeri*.

Pro circulo, ad quem est $y^2+x^2-by-ax=0$, habetur vi theorematis generalis (§. 589)

$$\frac{r}{q}=0 \qquad 2n=b \qquad 2p=a$$

$$\frac{s^2}{q^2}=1 \qquad n=\tfrac{1}{2}b \qquad p=\tfrac{1}{2}a$$

$$s=q \qquad n^2+p^2=m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}bb+\tfrac{1}{4}aa)}=m$$

Quoniam in parabola parametro a descripta, ad quam $ax=y^2$ origo ipsius x in vertice A existit; circulus per ejus verticem describendus radio $=\sqrt{(\tfrac{1}{4}bb+\tfrac{1}{4}aa)}$. Fiat itaque AD $=\tfrac{1}{2}a$, DH $=\tfrac{1}{2}b$; erit centrum circuli in H & PM $=y$, PA $=x$: id quod facile ostenditur eodem, quo superius, modo. Tab. IX. Fig. 91.

Pro ellipsi, ad quam est $y^2+\frac{ax^2}{v}-\frac{aby}{v}-ax=0$, habetur vi theorematis generalis (§. 588)

$$\frac{2r}{q}=0 \qquad \frac{t}{2m}=\frac{a}{v} \qquad 2n=\frac{ab}{v}$$

hinc

$$s=q \qquad n=\frac{ab}{2v}$$

$$\frac{2tp}{2m}=a \qquad n^2+\frac{tp^2}{2m}=\frac{tm^2}{2m}$$

$$\frac{2ap}{v}=a \qquad n^2+\frac{ap^2}{v}=\frac{am^2}{v}$$

$$2ap = av \qquad \frac{vn^2}{a} + p^2 = m^2$$

$$p = \tfrac{1}{2}v \qquad \frac{ab^2}{4v} + \tfrac{1}{4}v^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{ab^2}{v} + v^2\right)} = m$$

Tab. X. Fig. 104. Constructio itaque problematis per circulum & ellipsin hæc est: Jungantur DF $= b$ & DE $= a$ ad angulos rectos. Fiat DK $= \frac{1}{2}b$ & erecta perpendiculari KC $= \frac{1}{2}a$; erit DC $= \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)}$. Ex centro itaque C radio DC describatur circulus: ita locus prior erit constructus atque origo indeterminatæ x in D. Quare pro ellipsi fiat DH $= ab : 2v$ & per H ducatur ipsi DE parallela IN. Fiat HL $= \frac{1}{2}v$ & LI $=$ LN $= \frac{1}{2}\sqrt{(ab^2 : v + v^2)}$; erit L centrum, IN axis ellipsis: quæ si describatur, secabit circulum in M. Dico esse DQ $= x$, QM $= y$, consequenter DE, QM, DQ, DF quatuor continue proportionales,

Est enim CP $= x - \frac{1}{2}a$ & PM $= y - \frac{1}{2}b$, adeoque ob $CM^2 = DC^2 = CP^2 + PM^2$ (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = xx - ax + \frac{1}{4}aa + yy - by + \frac{1}{4}bb$, hoc est, $yy + xx - by - ax = 0$: qui est locus ad circulum. Porro OM $= y - ab : 2v$, LO $= x - \frac{1}{2}v$ adeoque ob

$$v : a = IL^2 - LO^2 : OM^2 \text{ (§. 431)}$$

$$1 : a = \frac{ab^2}{v} - x^2 + vx : y^2 - \frac{aby}{v} + \frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$\frac{a^2b^2}{4v^2} - \frac{ax^2}{v} + ax = y^2 - \frac{aby}{v} + \frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$$

sed $y^2 + x^2 - by - ax = 0$

Ergo $\frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} + by - x^2 = 0$

$$x^2 - by = 0$$

$$x^2 = by$$

Substituatur hic valor in æquatione $y^2 + x^2 - by - ax = 0$; prodibit

$$y^2 + by - by - ax = 0$$

$$y^2 = ax$$

Quare $a : y = y : x$ & (ob $x^2 = by$) $y : x = x : b$. Sunt adeo a, y, x, & b quatuor continue proportionales.

Eodem modo problema construitur per circulum & infinitas hyperbolas scalenas.

Constructionem per circulum & hyperbolam intra asymptotos adhuc apponimus. Junguntur nempe Tab. XI. Fig. 105.

nempe RI$=a$ & AR$=b$ ad angulos rectos, & per I describatur hyperbola intra asymptotos RAT. Fiat RD$=\frac{1}{2}b$ & in D erigatur perpendicularis DC $=\frac{1}{2}a$, tandemque ex centro C radio CK describatur circulus secans hyperbolam in M: erit TM$=y$ & AT$=x$.

Nam ex natura hyperbolæ ob AR. RI=AT. TM $ab=xy$ & CK$=x-\frac{1}{2}a$, KM$=y-\frac{1}{2}b$, adeoque ob $CM^2 = CK^2 + KM^2$, $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb=xx-ax+\frac{1}{4}aa+yy-by+\frac{1}{4}bb$, consequenter $yy+xx-ax-by=0$ seu $xx-ax=by-yy$. Est ergo vi æquationis prioris:

$$a:x=y:b$$

Quare $x-a:a=b-y:y$ (§. 124) Porro vi æquationis posterioris

$$x-a;b-y=y:x$$

Ergo (§.124) $a:y=y:x$

Est vero etiam $a:y=x:b$ (§. cit.)

Ergo $a:y=y:x=x:b$ (§. 167 *Arithm.*)

Quodsi AR & AS jungantur ad Tab. XII. Fig. 119. angulos rectos & circa axem AR parametro a describatur Parabola AMH, circa AS vero parametro b parabola altera AMI secans priorem in M; erit AP$=x$, PM$=y$: quem modum invenit *Menechmus* ex conditione problematis absque calculo analytico facile eruendum & nos ideo apponimus, quia inde enata est methodus construendi æquationes per duorum locorum combinationem. Est enim vi parabolæ primæ $y^2=ax$ & vi secundæ $x^2=by$, adeoque $a:y=y:x$ & $y:x=x:b$.

COROLLARIUM.

625. Sit latus cubi $=a$, latus cubi dupli $=y$; erit $2a^3=y^3$, seu ponendo $2a=b$, $aab=y^3$. Quærendæ igitur sunt inter latus cubi & ejus duplum duæ mediæ continue proportionales, eritque earum prima latus cubi dupli. Et in genere pro tantuplicatione cubi est $ma^3=y^3$, adeoque inter a & ma quærendæ sunt duæ mediæ.

SCHOLION.

626. *Coincidit adeo problema Deliacum de duplicando cubo, quod Deliis remedium contra pestem quærentibus oraculum proposuisse fertur, cum problemate de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus (quod primus observavit* Hipocrates Chius)*: unde & ipsum* problema Deliacum *appellari solet. Celebre hoc problema jam olim inter Geometras Græcos extitit, quos inter* Plato, Heron Alexandrinus, Apollonius Pergæus, Eratosthenes, Pappus Alexandrinus, Sporus, Menechmus, Architas Tarentinus, Philo Byzantius, Philoponus, Diocles & Nicomedes *modis diversis ab* Eutocio (q) *conservatis solverunt.*

(q) in Commentariis in lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro.

PROBLEMA 256.

627. *Rectam AB utcunque divisam in C ulterius dividere in D, ita ut sit* CD : DB = AC² : CD².

Tab. XI. Fig. 106.

Sit AC = a, CB = b, CD = y, erit DB = $b-y$, consequenter per conditionem problematis

$$y : b-y = a^2 : y^2$$

Ut nova indeterminata introducatur, cum ob $y^3 = a^2 b - a^2 y$ problema solidum esse facile intelligatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$ & hinc

$$y : b-y = a^2 : ax$$
$$a : x \quad (\S.\ 124)$$

II. $xy = ab - ay$

Porro ob $y : b-y = a : x$

$$y^2 : by-y^2 = a : x \ (\S.\ 124)$$
$$ax : by-y^2 = a : x$$
$$x : by-y^2 = 1 : x \ (\S.\ cit.)$$

III. $x^2 = by - y^2$
$ax = y^2$ add.

IV. $x^2 + ax = by$
$ax = y^2$ add.

V. $x^2 + 2ax = by + y^2$

Denique ob $ax = y^2$ (I.)
& $x^2 = by - y^2$ (III.) subtr.

VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad parabolam.

II. $xy + ay - ab = 0$ ad hyperbolam intra asymptotos.

III. $y^2 + x^2 - by = 0$ ad circulum.

IV. $x^2 + ax - by = 0$ ad parabolam.

V. $y^2 - x^2 + by - 2ax = 0$ ad hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$ ad ellipsin.

Nos duas dabimus constructiones, alteram per parabolam & circulum; alteram per circulum & ellipsin.

Quoniam æquatio ad parabolam $y^2 - ax = 0$; non alia re opus est, quam ut parametro a parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice (§. 388).

Pro circulo, ad quem est $y^2 + x^2 - by = 0$, vi theorematis generalis (§. 589)

$$r = 0 \qquad 2n = b \qquad n^2 = m^2$$

$$p = 0 \qquad n = \tfrac{1}{2}b \qquad n = m = \tfrac{1}{2}b$$

In vertice adeo parabolæ erigatur perpendicularis AD = $\frac{1}{2}b$ & ex centro D radio AD = $\frac{1}{2}b$ describatur circulus; erit PM = y. Tab. XI. Fig. 107.

Demissa enim perpendiculari DR, erit MR = PM − PR = PM − AD = $y - \frac{1}{2}b$

$-\frac{1}{2}b$ & (§. 391) $AP=DR=y^2:a$, consequenter ob $DM^2=DA^2=MR^2+DR^2$ (§. 417 *Geom.*), $y^4:aa+y^2-by+\frac{1}{4}bb=\frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$\frac{y^4+y^2-by=0}{aa}$$

$$\frac{\qquad\qquad}{y^3+a^2y-a^2b=0}\ y:aa$$

Pro ellipsi ad quam $y^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}by-\frac{1}{2}ax=0$, vi theorematis generalis (§. 588)

$2r:q=0 \quad 2n=\frac{1}{2}b \quad -2tp=-\frac{1}{2}a$

hinc $\frac{\quad}{} \quad \frac{\quad}{2m}$

$q=f \quad \frac{t=\frac{1}{2}}{2m} \quad n=\frac{1}{4}b \quad p=\frac{1}{2}a$

$$\frac{n^2+tp^2=tm^2}{2m \quad 2m}$$

$$n^2+\frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}m^2$$

$$\frac{1}{16}bb+\frac{1}{8}a^2=\frac{1}{2}m^2$$

$$\surd(\frac{1}{8}bb+\frac{1}{4}a^2)=m$$

Tab. XI. Fig. 108. Describatur ergo ellipsis, cujus axis $AP=2\surd(\frac{1}{8}bb+\frac{1}{4}a^2)$ & parameter $=\surd(\frac{1}{8}bb+\frac{1}{4}a^2)$ ob $2m:t=2:1$. Ex centro C demittatur perpendicularis $CH=n=\frac{1}{4}b$ & ducta DE per H axi AB parallela fiat $HD=p=\frac{1}{2}a$; erit in D origo indeterminatae x.

Quare circulum cum ea combinaturus erige perpendicularem $DL=\frac{1}{2}b$ & ex L radio DL describatur circulus; erit $QM=y$, $DQ=x$.

Est enim $QH=DQ-DH=x-\frac{1}{2}a$, $PM=y-\frac{1}{4}b$, adeoque $PC^2=x^2-ax+\frac{1}{4}a^2$, $PM^2=y^2-\frac{1}{2}by+\frac{1}{16}b^2$. Est porro $AC^2=\frac{1}{8}b^2+\frac{1}{4}a^2$, consequenter ob $t:2m=1:2$ (§. 431)

$$1:2=PM^2:AC^2-PC^2$$

$$1:2=y^2-\frac{1}{2}by+\frac{1}{16}bb:\frac{1}{8}bb-x^2+ax$$

$$2y^2-by+\frac{1}{8}bb=\frac{1}{8}bb+ax-xx$$

$$2y^2-by=ax-xx$$

Porro $RM=y-\frac{1}{2}b$, $LR=DQ=x$, $LM=\frac{1}{2}b$, consequenter ob $LM^2=LR^2+RM^2$ (§. 417 *Geom.*)

$$\frac{1}{4}bb=y^2-by+\frac{1}{4}bb+xx$$

$$y^2-by=-xx$$

Quo valore ipsius y^2-by in aequatione superiore substituto, prodit

$$y^2-xx=ax-xx$$

$$y^2=ax$$

$$y^2:a=x$$

$$y^4:aa=x^2$$

Hinc ob $y^2-by+x^2=0$

$$\frac{y^4+y^2-by=0}{aa}$$

$$\frac{\qquad\qquad}{y^3+a^2y-a^2b=0}\ y:aa$$

Quod

Quod ellipsis transeat per puncta D & L, ita ostenditur. Est $KL = DL = \frac{1}{4}b$, adeoque $KL^2 = \frac{1}{16}b^2$. $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)}$ & $KC = DH = \frac{1}{2}a$, adeoque $AK = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)} - \frac{1}{2}a$ & $KB = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)} + \frac{1}{2}a$, consequenter $AK.\,KB = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{8}b^2$. Sed $2KL^2 = \frac{2}{16}b^2 = \frac{1}{8}b^2$. Est itaque $2KL^2 = AK.KB$, consequenter punctum L, adeoque & punctum D in Ellipsi (§. 420).

PROBLEMA 257.

628. *Dato parallelepipedo cubum æqualem construere.*

Sint latera parallelepipedi a, b & c; latus cubi sit y; erit (§. 536 *Geom.*)

$$abc = y^3$$

hoc est, $a : y = y^2 : bc$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur; fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$

& ob $a : y = ax : bc$

II. $xy = bc$

Porro $a : y = y : x$

$a : y = ax : bc$

adeoque $y : x = ax : bc$ (§. 167 *Arithm.*

$$ax^2 = bcy$$

III. $x^2 = bcy : a$

$ax = y^2$ subt.

IV. $x^2 - ax = bcy : a - y^2$

V. $x^2 + ax = y^2 + \frac{bcy}{a}$

Denique ob $x^2 = bcy : a$

$2ax = 2y^2$

VI. $2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$

& VII. $2ax + x^2 = 2y^2 + bcy : a$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad parabolam.

II. $xy - bc = 0$ ad hyperbolam intra asymptotos.

III. $x^2 - \frac{bcy}{a} = 0$ ad parabolam.

IV. $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad circulum.

V. $y^2 - x^2 + \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad ellipsin.

VII. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad hyperbolam scalenam.

Pro loco ad circulum, ad quem $y^2 + x^2 - \frac{bc}{a}y - ax = 0$, vi theorematis generalis (§. 589)

$$2n = bc : a \qquad 2p = a$$

$$n = bc : 2a \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(b^2c^2 + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

$$4a^2$$

Tab. IX. Fig. 93. Cum in parabola, ad quam $y^2 - ax = 0$, parametro a descripta origo indeterminatæ x sit in vertice A, fiat $AD = \tfrac{1}{2}a$, $DH = n = bc : 2a$; erit H centrum circuli radio HA describendi: qui si describatur, secabit parabolam in M, eritque $MP = y$.

Est enim $AH^2 = AD^2 + DH^2 = \tfrac{1}{4} aa + b^2c^2 : 4a^2$, $PA = yy : a$ (§. 391) & hinc $DP = HR = yy : a - \tfrac{1}{2}a$, $MR = y - bc : 2a$. Quare ob $AH^2 = HM^2 = HR^2 + MR^2 = \tfrac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2 = \frac{y^4}{aa} - yy + \tfrac{1}{4}da + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$ hoc est, $\frac{y^4}{aa} - \frac{bc}{a}y = 0$

$$\overline{\qquad\qquad} \; y : aa$$

$$y^3 - abc = 0$$

Tab. XI. Fig. 105. Jungantur $RI = b$ & $RA = c$ ad angulos rectos, ducatur indefinita AS ipsi RI parallela & intra asymptotos RA & AS per I describatur hyperbola; erit origo indeterminatæ x in A. Porro ut circulus cum ea combinetur, fiat $AD = n = bc : 2a$ & DC ad AD perpendicularis $= p = \tfrac{1}{2}a$; ex centro C radio AC describatur circulus hyperbolam in M intersecans, erit TM ipsi AR parallela $= y$.

Est enim ob AR. RI = AT. TM (§. 502) $bc = xy$. Præterea $AC^2 = CM^2 = AL^2 + CL^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \tfrac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4aa$, $CK = LT = AT - AL = x - \tfrac{1}{2}a$ & $MK = TM - TK = TM - AD = y - bc : 2a$: unde ob $CM^2 = CK^2 + KM^2$ elicitur $\tfrac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4aa = x^2 - ax + \tfrac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bc}{a}y + \frac{bbcc}{4aa}$, hoc est, $y^2 - \frac{bc}{a}y + x^2 - ax = 0$.

seu $y^2 - \frac{bc}{a}y = ax - x^2$

Substituatur pro bc valor ipsius xy: prodibit

$$y^2 - \frac{xy^2}{a} = ax - x^2$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; a$$

$$ay^2 - xy^2 = aax - axx$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; a - x$$

$$y^2 = ax$$

$$y^4 = a^2x^2$$

$$y^4 : a^2 = x^2$$

Quare ob $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

$$ax - \frac{bc}{a}y + \frac{y^4}{a^2} - ax = 0$$

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{bcy}{a} = 0$$

$$y^3 - abc = 0$$

Pro ellipsi, ad quam est $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bc}{2a}y - ax = 0$, vi theorematis generalis (§. 588)

$\frac{r}{q} = 0$ hinc $q = s$ $\quad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2}$ $\quad -\frac{2tp}{2m} = -a$

$$\frac{2n}{2a} = \frac{bc}{2a} \qquad \frac{2p}{2} = a$$

$$n = \frac{bc}{4a} \qquad p = a$$

$$\frac{n^2 + tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$

$$n^2 + \tfrac{1}{2}p^2 = \tfrac{1}{2}m^2$$

$$2n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{8aa} + aa\right)} = m$$

Describatur ergo ellipsis, cujus axis $AB = 2\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8aa)}$, parameter $\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8aa)}$, quia est ad axem in ratione subdupla. Ex centro C demittatur perpendicularis $CH = \frac{bc}{4a}$ & per H agatur DE ipsi AB parallela. Fiat $DH = a$; erit D origo indeterminatae x. Ut circulus cum eadem combinetur, fiat $DI = bc : 2a$ & $IL = \frac{1}{2}a$ & radio LD ex centro L describatur circulus, qui ellipsin secabit in M. Dico QM esse $= y$ & $DQ = x$. Tab. XI. Fig. 109.

Est enim $CP = HQ = DQ - DH = x - a$ & $PM = QM - PQ = QM - DK = y - bc : 4a$. Ex natura ellipsis (§. 431)

$$2 : 1 = AC^2 - CP^2 : PM^2$$

$$\frac{b^2c^2}{8aa} + a^2 - x^2 + 2ax - aa : y^2 - \left(\frac{bcy}{2a} + \frac{b^2c^2}{16a^2}\right)$$

$$\frac{b^2c^2}{8aa} - x^2 + 2ax = 2y^2 - \frac{bc}{a}y + \frac{b^2c^2}{8a^2}$$

$$2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$$

Porro $MR = QM - RQ = QM - DI = y - bc : 2a$, $LR = DQ - IL = x - \frac{1}{2}a$. Quare ob $DL^2 = LM^2 = LR^2 + RM^2$
$\frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + y^2 - bcy : a + b^2c^2 : 4a^2$, hoc est,

$x^2 -$

$$x^2 - ax + y^2 - bcy : a = 0$$

seu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Substituto valore ipsius $ax - x^2$ in æquatione superiori, prodit

$$ax + y^2 - \frac{bcy}{a} = 2y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$ax = y^2$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : a^2$$

His valoribus ipsorum x & x^2 denuo in æquatione superiore substitutis prodit

$$2y^2 - y^4 : a^2 = 2y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$\frac{y^4}{aa} = \frac{bcy}{a} \quad \text{---} \; y : aa$$

$$y^3 = abc$$

Non absimili modo fit constructio per circulum & hyperbolam.

PROBLEMA 258.

Tab. XI. Fig. 110. 629. *Datum angulum* ACB *trisecare.*

Concipiamus angulum ACB esse trifariam sectum in ACE, ECD & DCB ducanturque arcuum æqualium subtensæ cognomines AE, ED, DB, quæ æquales sunt (§. 289. *Geom.*). Sit AC $= b$, AB $= a$, AE $=$ y, EG $= x$,

Jam anguli EAB mensura est arcus DP (§. 314. *Geom.*). Anguli vero ACE mensura cum sit arcus AE (§. 57 *Geom.*) ipsi DB æqualis *per hypoth.* anguli EAG & ACE æquales sunt (§. 142 *Geom.*). Quoniam itaque præterea angulus AEC utrique triangulo EAG & EAC communis; erit (§. 267 *Geom.*)

AC : AE = AE : EG AC : EC = AE : AG

b : y = y : x sed AC = EC

ergo AE = AG

I. $yy = bx$

Ducatur EF ipsi DC parallela: erit EFH = GHC (§. 233 *Geom.*) = EDC (§. 312 & 233 *Geom.*). Porro EGF = HGC (§. 156. *Geom.*) = CED (§. 312 & 233. *Geom.*). Est igitur (§. 267. *Geom.*).

$$EC : ED = EG : GF$$

$$b : y = x : \frac{xy}{b}$$

Quoniam DB = ED = AE, & DB = BH, EA = AG, *per demonstr.* ED = FH (§. 257 *Geom.*): erit AE + ED + DB = AG + BH + GH + FG hoc est, 3AE = AB + FG, consequenter.

$$3y = a + xy : b$$

II. $3by = ab + xy$ seu $3by - xy = ab$ quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam:

$$b : y = 3b - x : a$$

$$y : x = 3b - x : a$$ (§. 167 Arithm.)

III. $ay = 3bx - xx$
$yy = bx$ add.

IV, $ay + yy = 4bx - xx$
$ay = 3bx - xx$
$yy = bx$ subtr.

V. $ay - yy = 2bx - xx$
$ay = 3bx - xx$
$2yy = 2bx$ add.

VI. $2yy + ay = 5bx - xx$
$ay = 3bx - xx$
$2yy = 2bx$ subtr.

VII. $ay - 2yy = bx - xx$

Habemus adeo æquationes locales

I. $yy - bx = 0$ ad parabolam.

II. $xy - 3by + ab = 0$ ad hyperbolam intra asymptotos.

III. $xx - 3bx + ay = 0$ ad parabolam.

IV. $yy + xx + ay - 4bx = 0$ ad circulum.

V. $yy - xx - ay + 2bx = 0$ ad hyperbolam æquilateram.

VI. $yy + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}bx = 0$ ad ellipsin.

VII. $yy - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}bx = 0$ ad hyperbolam scalenam.

Pro circulo, ad quem est $yy + xx + ay - 4bx = 0$, vi theorematis generalis (§. 589)

$-2n = a$ $\qquad -2p = -4b$

$n = -\frac{1}{2}a$ $\qquad p = 2b$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + 4bb)} = m$$

Quare parabola, ad quam $yy - bx = 0$, parametro b descripta, fiat $AD = 2b$, $DH = \frac{1}{2}a$ & ex centro H radio DH describatur circulus; erit $QN = y$, $AQ = x$. Tab. IX. Fig. 93.

Est enim his positis $bx = y^2$ (§. 388), consequenter $x = y^2 : b$, atque hinc $DQ = KH = 2b - y^2 : b$. Porro $RN = QN + QR = QN + DH = y + \frac{1}{2}a$. Quare ob $HN^2 = KH^2 + KN^2 = \frac{1}{4}aa + 4bb = 4bb - 4y^2 + y^4 : bb + yy + ay + \frac{1}{4}aa$, hoc est.

$$\frac{y^4 - 3y^2 + ay = 0}{bb}$$

$$y : bb$$

$$y^3 - 3bby + abb = 0$$

Eadem vero æquatio prodit, si in superius inventa secunda æquatione $3y = a + xy : b$ substituitur valor ipsius $x = y^2 : b$ ex prima. Est nempe

nempe $3y = a + y^3 : bb$, hoc est, $y^3 - 3bby + abb = 0$.

Tab. XI. Fig. 111. Constructio per circulum & hyperbolam intra asymptotos ita absolvitur. Jungantur $KL = 2b$ & $CL = \frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $CK = \sqrt{(4bb + \frac{1}{4}aa)}$ radius circuli ex centro C per K describendi. Producatur CL in I, donec $LI = a$ & KL in T, donec $LT = b$, seu $KT = 3b$. Intra asymptotos KTS per I describatur hyperbola. Dico QM esse radicem veram quæsitam seu subtensam trientis arcus, qui metitur angulum trisecandum, radio b descripti: seu $QM = y$ & $KQ = x$.

Est enim $QT = KT - KQ = 3b - x$, adeoque ob $IL . LT = QT . QM$ (§. 502), $3by - xy = ab$. Porro $PC = QL = KL - KQ = 2b - x$ & $PM = y + \frac{1}{2}a$, adeoque ob $KC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417. *Geom.*), $\frac{1}{4}aa + 4bb = y^2 + ay + \frac{1}{4}aa + 4bb - 4bx + xx$, hoc est, $y^2 + ay = 4bx - x^2$.

Æquatio prior ad hyperbolam in hanc resolvitur analogiam;

$$3b - x : b = a : y$$

Ergo $4b - x : b = a + y : y$ (§. 124)

$$4b - x : a + y = b : y$$

Æquatio posterior ad circulum hanc suppeditat analogiam;

$$4b - x : y + a = y : x$$

Quare $b : y = y : x$ (§. 167. *Arithm.*)

Unde $bx = y^2$ & $y^2 : b = x$, $y^4 : b^2 = x^2$, substitutis his valoribus in æquatione ad circulum $y^2 + ay = 4bx - x^2$, prodit

$$y^2 + ay = 4y^2 - y^4 : b^2$$

$$ay = 3y^2 - y^4 : b^2 \quad \overline{} \, y : b^2$$

$$ab^2 = 3b^2y - y^3$$

seu $y^3 - 3b^2y + ab^2 = 0$ ut ante. Tab.

Notandum vero est, cum eadem XI. æquatio prodeat, si ponatur qm Fig. $= y$ esse qm trientis complementi ad 110. circulum subtensam AI. 111.

Constructiones reliquas facile proprio Marte addent, qui superiora rite perceperunt.

PROBLEMA 259.

630. *Numerum irrationalem datum per lineam exprimere.*

Sit potentia imperfecta quæcunque x & radix ex ea extracta irrationalis $x^{1:m}$.

Ponatur $x^{1:m} = y$

erit $x = y^m$

hoc est, a pro unitate assumta

$$a^{m-1}x = y^m$$

quæ est æquatio ad infinita parabolarum genera (§. 519). Quare si parametro a parabola primi generis sit descripta & abscissa sit ad

parametrum ut numerus sub signo radicali, e.gr. ut 3 ad 1, si $\sqrt{3}$ desideretur, vel ut 3 ad 2, si quæratur $\sqrt{\frac{2}{3}}$; ejus semiordinata exprimet numerum quæsitum.

Est enim in casu primo, si $a=1$, $x=3$, $y^2=3$, adeoque $y=\sqrt{3}$. Et si fuerit $a=1$, $a:x=3:2$, erit $3x=2a=2$, consequenter $x=\frac{2}{3}$. Hinc $y^2=\frac{2}{3}$, adeoque $y=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Eodem modo patet, describendam esse parabolam secundi generis seu cubici ordinis, si radices cubicæ dentur; parabolam vero tertii generis seu biquadratici ordinis, si radices dentur biquadraticæ & ita porro.

Sed possunt etiam parabolæ inferiores satisfacere radicibus superioribus. Sit enim e. gr. quærenda linea y, quæ eandem habeat rationem ad lineam datam a, quam habet 1 ad $\sqrt[3]{5}$. Per conditionem problematis erit

$$1:\sqrt[3]{5}=a:y$$

$$a\sqrt[3]{5}=y$$

$$5a^3=y^3$$

Construetur adeo problema per parabolam primi generis & circulum, quærendo nempe inter a & $5a$ duas medias continue proportionales.

Fiat enim $a:y=y:x$

erit I. $y^2=ax$

Æquatio proposita $5a^3=y^3$ resolvitur in hanc analogiam:

$$a:y=y^2:5a^2$$
$$=ax:5a^2$$
$$=x:5a$$

unde $y:x=x:5a$

$$x^2=5ay$$
$$y^2=ax \quad \text{vi num. I.}$$

II. $y^2+x^2=5ay+ax$

Æquatio prima est ad parabolam & secunda ad circulum. Unde æquatio $y^3=5a^3$ construitur ut supra.

PROBLEMA 260.

631. *Invenire puncta quotcunque, quæ sint in curva datæ æquationis*

1. Ducta linea recta, quæ pro axe curvæ describendæ assumatur, pro arbitrio determinentur abscissæ quotcunque.
2. Erigantur perpendiculares ince-

indeterminatæ ad singulas abscissas.

3. Quoniam abscissa determinata est, æquatio data pro determinata recte habetur. Construatur itaque per methodum supra expositam: ita enim invenietur semiordinata abscissæ respondens.

E. gr. Sit construenda parabola secundi generis seu cubici ordinis $aav = y^3$. Assumta igitur pro abscissa v recta determinata, nova quædam indeterminata introducatur. Fiat nempe

$$a : y = y : x$$

$$\text{I. } ax = y^2$$

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = y^2 : av$$

hoc est $ax : av$

seu $x : v$ (§. 124)

Quare $y : x = x : v$ (§. 167 Arithm.)

$$x^2 = vy$$

addatur $y^2 = ax$

erit $\text{II. } y^2 + x^2 - vy - ax = 0$

Ope igitur æquationis ad parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad infinitos circulos (quia v infinitis modis determinari potest & debet) $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$ puncta quotcunque in paraboloide cubicali inveniuntur. Est enim pro circulo vi theorematis generalis (§. 589)

$$2n = v \qquad 2p = a$$

$$n = \tfrac{1}{2}v \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$

$$v^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}vv + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Quare parabola parametro a descripta, fiat portio axis AK $= \tfrac{1}{2}a$ & erecta perpendiculari indefinita KG, ex ejus puncto quocunque C per verticem A describatur circulus, erit QM semiordinata respondens abscissæ in paraboloide cubicali, quæ est ipsius KC dupla. Ut igitur plures semiordinatæ determinentur, ex quotcunque aliis punctis rectæ KG per verticem parabolæ ducendi sunt circuli alii in punctis adhuc aliis parabolam intersecantes. Tab. XI. Fig. 112.

Nam si KC $= \tfrac{1}{2}v$ & QM $= y$; erit AQ $= yy : a$, KQ $=$ CP $=$ AQ $-$ AK $= yy : a - \tfrac{1}{2}a$, PM $= y - \tfrac{1}{2}v$. Quamobrem ob $AC^2 = AK^2 + KC^2 = CM^2 = CP^2 + PM^2$ (§. 417. Geom.) $\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}vv = y^4 : aa - y^2 + \tfrac{1}{4}aa + y^2 - vy + \tfrac{1}{4}vv$, hoc est,

$$y^4 : aa = vy$$

$$y^3 = aav \qquad \text{—} y : aa$$

Est ergo 2KC abscissa & QM ipsi respondens semiordinata in paraboloide cubicali.

Sit construendus circulus secundi generis, ad quem est $y^3 = av^2 - v^3$. Æquatio in hanc abit analogiam:

$$v : y = y^2 : av - v^2$$

Cum in constructione v determinetur,

tur, introducatur nova indeterminata x; ponendo

$$v : y = y : x$$

erit I. $vx = yy$

Porro $v : y = vx : av - v^2$

hoc est $y : x = x : a - v$ (§ 124)

Itaque $ay - yv = xx$

Addatur $vx = yy$

erit II. $yy + xx + vy - ay - vx = 0$.

Ope itaque æquationis prioris ad infinitas parabolas & posterioris ad infinitos circulos determinantur quotcunque semiordinatæ ad abscissas quotcunque in circulo secundi generis assumtas.

Parametro nimirum v describitur parabola, in qua abscissa x, semiordinata y. Pro circulo vero est vi theorematis generalis (§. 589)

$$\frac{-2r}{q} = 0 \qquad -2n = v - a$$

hinc $n = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}v$

$$r = 0 \quad q = s$$

$$\frac{-2ps}{q} = -v$$

$$-2p = -v$$

$$p = \frac{1}{2}v$$

$$m^2 = n^2 + p^2$$

$$= \frac{1}{4}a^2 - av + \frac{1}{2}v^2$$

$$m = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - av + \frac{1}{2}v^2)}$$

Fiat itaque $AD = \frac{1}{2}v$, $DH = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}v$ & Tab. radio $AH = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - av + \frac{1}{2}v^2}$ describatur X. circulus ex centro H transiens per verticem parabolæ A, erit $AP = x$ & $PM = y$. Fig. 93.

Ipsa tamen constructio molestior est antecedente, quia continuo nova parabola describenda, ob indeterminatam parametrum v.

Finis Analyseos finitorum.

ELE-

ELEMENTORUM ANALYSEOS MATHEMATICÆ PARS II.

ELEMENTA ANALYSEOS INFINITORUM TRADIT.

Sectio I.

DE CALCULO DIFFERENTIALI.

CAPUT I.

DE NATURA CALCULI DIFFERENTIALIS.

DEFINITIO 1.

1. CAlculus *differentialis* est methodus quantitates differentiandi, hoc est, inveniendi quantitatem infinite parvam, quæ infinities sumta datam adæquat.

DEFINITIO 2.

2. *Infinitesima* seu *quantitas infinite parva* est particula quantitatis adeo exigua, ut eidem incomparabilis existat, seu quæ omni assignabili minor.

COROLLARIUM 1.

3. Infinitesima itaque respectu ejus quantitatis, cui incomparabilis existit, pro nihilo habenda. Si enim negligitur, error committitur omni assignabili minor, hoc est, nullus.

COROLLARIUM 2.

4. Hinc duæ quantitates infinitesima differentes æquales sunt. Cum enim infinitesima neglecta nullum producat errorem in quantitatibus (§. 3.); una alteri substitui potest. Sunt igitur æquales (§. 15. *Arithm.*).

SCHOLION.

5. *Ut natura infinitesimarum rite intelligatur, ad sequentia animum advertisse juvat. Ponamus, te dimetiri montis altitudinem; dum vero per dioptras collineas, flatu venti pulvisculum abigi: montis ergo altitudo diametro unius pulvisculi censetur imminuta. Enimvero quoniam eadem altitudo montis invenitur, sive pulvisculum illud vertici adhæreat*

hæreat, sive abigatur; quantitas ejus diametri in præsente negotio pro nihilo habenda, hoc est, infinite parva existit. Similiter in Astronomia diameter Telluris respectu fixarum habetur pro puncto seu infinitesima: idem enim observaretur motus primus, si tellus esset punctum individuum. Eodem etiam modo in eclipsibus lunaribus computandis terra pro sphæra perfecta, consequenter montium, multoque magis ædium ac turrium altitudines pro infinitesimis habentur: neque enim aliter nobis appareret umbra telluris super disco Lunæ, si terra sphæra perfecta esset. Idem vero in abstractis quantitatibus locum habere, dudum agnovere veteres & inter eos demonstratores rigidissimi, Euclides (a) *atque* Archimedes (b). *E. gr. si a linea data auferatur ipsius dimidium, ut habet* Euclides, *seu, quod perinde est, pars alia quantacunque, & a residuo rursus ipsius dimidium aut pars alia similis primum ablata, atque ita porro: devenietur tandem ad aliquam quantitatem qualibet data minorem, hoc est, ad infinitesimam. Apparet adeo hinc, nomen infinitesimæ esse respectivum: involvit nempe relationem ad aliam quantitatem datam, cujus respectu infinitesima dicitur. E. gr. diameter telluris in eclipsibus lunaribus est infinite magna respectu altitudinis montium; sed eadem tamen est infinite parva respectu distantiæ fixarum in ordine ad motum primum. Cavendum vero, ne cum illis, qui imaginaria cum realibus confundunt, propterea quod distincta continui ac infiniti notione destituti nescio quæ phantasmata sibi fingunt, infinitesimas & infinitesimarum infinitesimas pro entibus realibus habeas: a quo ipse calculi infinitesimalis inventor, illustris* Leibnitius, *alienus.* (c)

DEFINITIO 3.

6. Infinitesimæ dicuntur *differentialia*, item *quantitates differentiales*, si spectantur ut differentiæ duarum quantitatum. Vir summus *Nevvtonus* (quem Angli sequuntur) infinitesimas *Fluxiones* vocat, quia eas considerat veluti momentanea quantitatum incrementa, e. gr. lineæ fluxu puncti, aut superficiei fluxu lineæ, aut solidi fluxu superficiei genita.

COROLLARIUM.

7. Cum itaque tantum quantitates variabiles continuo augeantur, vel minuantur, constantibus vero nihil accedat, (§. 375 *Analys. finit.*); differentiale quantitatis constantis nullum est, sed variabiles tantum aliquod admittunt.

HYPOTHESIS.

8. *Quantitatum differentialia exprimantur per eandem litteram, quibus variabiles denotantur, præfixa*

(a) Element lib. 10. pro p. 1.
(b) in præfatione ad quadraturam parabolæ & in scriptis ejus omnibus.
(c) Vide Acta Eruditorum A. 1712. p. 167.

fixa tamen littera d. E. gr. differentiale ipsius x dicatur dx; differentiale ipsius y; dicatur dy. *Est autem* dx *quantitas positiva, si* x *continuo crescit; negativa, si decrescit.*

SCHOLION.

9. *Angli cum* Newtono *pro* dx *scribunt* $\dot{x}$; *pro* dy *vero* $\dot{y}$; *sed commodior est* Leibnitiana *differentialium designatio, qua omnes reliqui utuntur, quia si differentialia denuo differentiantur facile oritur punctorum confusio: ut taceam typothetas facilius puncta negligere, quam litteram* d *omittere.*

COROLLARIUM. 1.

10. Quoniam quantitates constantes primis alphabeti litteris indigitamus (§. 376. *Analys. finit.*); erit $da = 0$, $db = 0$, $dc = 0$, (§. 7).

COROLLARIUM 2.

11. Quare $d(x+y-a) = dx + dy$ & $d(x-y+a) = dx - dy$. Facilis adeo est differentiatio quantitatum per additionem aut subtractionem compositarum.

PROBLEMA 1.

12. *Differentiare quantitates se mutuo multiplicantes.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 1. I. Si quantitates duæ se mutuo multiplicent, ut xy; differentiale unius factoris ducatur in factorem alterum; summa duorum factorum, quæ hac ratione prodeunt, $xdy + ydx$ erit differentiale quæsitum, hoc est, $d(xy) = xdy + ydx$.

DEMONSTRATIO.

xy repræsentat rectangulum ABDC, cujus latus unum $AC = x$, alterum $DC = y$. Si concipiamus latus utrumque augeri quantitate differentiali, nempe ut CA degeneret in $CL = x + dx$ & CD in $CE = y + dy$; rectangulum CABD abit in majus CLGE. Differentiale adeo ipsius xy est differentia inter rectangulum CABD & CLGE (§. 6). Quare $dxy = xy + ydx + xdy + dxdy - xy = ydx + xdy + dxdy$, nempe ALBH + DBFE + BHGF. Quodsi in rectangulo $ALHB = ydx$ $AL = dx$ sumatur pro constante; erit $HGFB = dxdy$ differentiale ejus (§. 6). Eodem modo patet, esse idem rectangulum BHGF differentiale ipsius DEFB. Quamobrem HBFG seu $dxdy$ respectu rectangulorum ALHB & DBEF, seu ydx & xdy, habetur pro nullo; consequenter differentia inter rectangula CABD & CLGE, seu differentiale ipsius xy est $ydx + xdy$. *Q. e. d.*

II. Si plures quantitates se mutuo multiplicent, e. gr. si

 fuerit

fuerit vxy; fiat $vx = t$, erit $vxy = ty$, consequenter $d(vxy) = tdy + ydt$, *per caf. 1.* Sed $dt = vdx + xdv$, *per caf 1.* Ergo his valoribus in differentiali antecedente $tdy + ydt$ substitutis prodit $d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$. Patet adeo factum ex binis ducendum esse in differentiale tertii.

III. Eodem modo reperitur, quid factu opus sit, si plures quantitates se mutuo multiplicent. Sit enim e. gr. quantitas differentianda $vxyz$. Fiat $vxy = t$, erit $vxyz = tz$, consequenter $d(tz) = zdt + tdz$, *per caf. 1.* Sed $dt = d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$, *per caf. 2.* Ergo $d(vxyz) = zdt + tdz = zvxdy + zvydx + txydv + vxydz$.

IV. Quod si crescente una variabili altera y decresceret, evidens est, fore $ydx - xdy$ differentiale ipsius xy.

COROLLARIUM 1.

13. Ergo $d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx$, $d(x^3) = x^2dx + x^2dx + x^2dx = 3xdx$ &c. & in genere $d(x^m) = mx^{m-1}dx$. Unde patet, quomodo potentiæ differentientur.

COROLLARIUM 2.

14. Cum exponentes dignitatum x^1, x^2, x^3, x^4 &c. 1, 2, 3, 4 &c. sint earundem logarithmi, posito logarithmo unitatis $= 0$ (§. 334 *Arithm.*); logarithmi vero dignitatum descrescentium $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$ &c. sint $-1, -2, -3, -4$ &c. (§. 358 *Arithm.*); erit $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ &c. & in genere $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, consequenter $d(1 : x^m) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13). Vel cum sit $1 = x^0$ (§. 55 *part. 1.*), erit $1 : x^m = x^0 : x^m = x^{-m}$ (§. 54 *part. 1*). adeoque $d\frac{1}{x^m} = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13).

COROLLARIUM 3.

15. Et quia $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 57 *Analyf. finit.*) & $1 : \sqrt[m]{x^n} = 1 : x^{n:m} = x^{-n:m}$ (§. *cit.* & *præc.*); erit $d\sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m} x^{n:m-1} dx = \frac{n}{m} x^{(n-m):n} dx = \frac{n\,dx}{m} \sqrt[m]{x^{n-m}}$ & $d(1 : \sqrt[m]{x^n}) = \frac{n}{m} x^{-n:m-1} dx = 0 - \frac{n}{m} x^{(-n-m):m} dx = -ndx : m\sqrt[m]{x^{n+m}}$

SCHO-

SCHOLION.

16. *Quodsi cuipiam non satis manifestum videatur, quomodo corollaria duo posteriora ex priore inveniantur; is differentialia potentiarum imperfectarum alio adhuc modo investigare potest: quem in sequente problemate exponimus, inprimis cum ejusdem methodi usus esse possit, quoties in formulis compositis differentiandis aqua haret.*

PROBLEMA 2.

17. *Differentiare* $1:x^m$, *item* $\sqrt[m]{x^n}$ & $1:\sqrt[m]{x^n}$.

RESOLUTIO.

I. Fiat $1:x^m = v$

erit $1 = x^m v$

(§.10.12.) $0 = mx^{m-1}vdx + x^m dv$

$-mx^{m-1}vdx = x^m dv$

$\frac{-mx^{m-1}vdx}{x^m} = dv$

$\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = dv$ (§. 42. 54. part. 1.)

h. e. $-mx^{-m-1}dx = dv$ (§.54 part. 1.)

II. Fiat $\sqrt[m]{x^n} = y$

$x^n = y^m$

$nx^{n-1}dx = my^{m-1}dy$ (§.13)

hoc est, $nx^{n-1}dx = \frac{my^m dy}{y}$ (§. 54. part. 1.)

$\frac{nyx^{n-1}dx}{my^m} = dy$

seu $\frac{nx^{n:m}x^{n-1}dx}{mx^n} = dy$

$\frac{n}{m}x^{n:m}x^{-1}dx = dy$ (§. 54. part. 1.)

h. e. $\frac{n}{m}x^{(n-m):m}dx = dy$

III. Fiat denique $1:\sqrt[m]{x^n} = z$

erit $1 = z\sqrt[m]{x^n} = zx^{n:m}$

$0 = \frac{n}{m}x^{(n-m):m}zdx + x^{n:m}dz$ (II.12.)

$-\frac{n}{m}x^{(n-m):m}zdx = x^{n:m}dz$

$\frac{-nx^{(n-m):m}dx}{mx^{n:m}} = x^{n:m}dz$

$\frac{-nx^{(n-m):n}dx}{mx^{2n:m}} = dz$ (§.42. 54. part. 1.)

$-\frac{n}{m} x^{(-n-m):m} dx = dz$ (§. 54. *part.* 1.)

h. e. $-\frac{n dx}{m \sqrt[m]{x^{n+m}}} = dz$ (§. 14).

En in omnibus casibus easdem formulas, quas superius elicuimus (§. 14. 15.)

SCHOLION.

18. *Me non monente clarum esse arbitror, formulas in problemate repertas subire vicem regularum, juxta quas in casibus similibus instituitur differentiatio.*

PROBLEMA 3.

19. *Differentiare quantitates se mutuo dividentes* x : y.

RESOLUTIO.

I. Sit $x : y = v$

erit $x = vy$

$dx = vdy + ydv$ (§. 12)

$dx - vdy = ydv$

h. e. $dx - \frac{xdy}{y} = ydv$

$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = dv$

seu $(ydx - xdy) : y^2 = dv$

Regula 1. Differentiale divisoris ducatur in dividendum & contra differentiale dividendi in divisorem. 2. Factum prius ex posteriore auferatur. 3. Residuum per quadratum divisoris dividatur. Quotus est differentiale quantitatum se mutuo dividentium:

II. Si fuerit $xy : vz$ differentianda: ponatur $xy = t$ & $vz = w$; erit $xy : vz = t : w$. Sed $d(t : w) = (wdt - tdw) : w^2$ *per cas. 1.* & $dt = xdy + ydx$, $dw = vdz + zdv$ (§. 12). Ergo $d(t : w) = d(xy : vz) = (vzxdy + vzydx - xyvdz - xyzdv) : v^2 z^2$. Patet adeo, regulam præcedentem huic quoque casui satisfacere.

CAPUT

CAPUT II.

DE USU CALCULI DIFFERENTIALIS IN TANGENTIBUS CURVARUM DETERMINANDIS.

PROBLEMA 4.

20. *Invenire subtangentem in curva Algebraica quacunque;*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 2. Sit semiordinata pm alteri PM infinite propinqua, erit Pp differentiale abscissæ, & demissa perpendiculari MR=Pp (§.226 *Geom.*) Rm differentiale semiordinatæ. Ducatur tangens TM: arculus infinite exiguus Mm non differet a linea recta, adeoque MmR triangulum rectilineum rectangulum: quod *Triangulum curvæ characteristicum* appellari solet, quia lineæ curvæ per illud a se invicem distinguuntur. Ob parallelismum rectarum PM & pm (§. 37 *part. 1*). angulus MmR=TMP (§.233 *Geom*). Quare △ MmR ∽ △ TMP (§. 267 *Geom.*). Sit itaque AP = x, PM = y: erit Pp=MR=dx & Rm=dy (§ 8), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$Rm : MR = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Quodsi ex æquatione curvæ cujuscunque data in expressione subtangentis PT generali $ydx : dy$ valor ipsius dx substituatur: quantitates differentiales evanescunt proditque valor subtangentis in quantitatibus communibus.

Idem valor eruitur, si convexitas curvæ refertur ad axem AT. Tab. I. Fig. 4.

COROLLARIUM 1.

21. Pro parabola Apolloniana est:

$$ax = y^2 \quad (\S.388\ part.\ 1)$$

Hinc $adx = 2ydy$ (§. 12)

$$dx = 2ydy : a$$

PT=$ydx : dy = 2y^2dy : ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$, prorsus ut supra (§.410 *part. 1.*)

COROLLARIUM 2.

22. Pro infinitis parabolis est (§. 519. *Part. 1.*)

$$a^{m-1}x = y^m$$

$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy \quad (\S.12)$$

$$dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}$$

PT=$ydx : dy = my^m dy : a^{m-1}dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-1}x : a^{m-1} = mx$.

E. gr.

E. gr. Cum in paraboloide cubicali $m=3$; erit subtangens $=3x$: cum in surdesolidali $m=5$; erit subtangens $=5x$.

COROLLARIUM 3.

23. Pro circulo est (§. 377. *part. 1.*)

$$ax-xx=yy$$

$$adx-2xdx=2ydy$$

$$dx=2ydy:(a-2x)$$

$PT=ydy:dx=2y^2dy:(a-2x)dy=2y^2:(a-2x)=(2ax-2xx):(a-2x)=(ax-xx):(\frac{1}{2}a-x)$, hoc est, $PC:PB=AP:PT$, consequenter $\square PC.PT=AP.PB$ (§. 378 *Geom.*) $=PM^2$ (§. 377 *part. 1.*)

Tab. I. Fig. 1. Ergo $AT=(ax-xx):(\frac{1}{2}a-x)-x=(ax-xx-\frac{1}{2}ax+xx):(\frac{1}{2}a-x)=\frac{1}{2}ax:(\frac{1}{2}a-x)$ hoc est, $PC:PA=CA:AT$.

COROLLARIUM 4.

24. Pro infinitis circulis est (§. 524. *part. 1.*)

$$ax^m-x^{m+1}=y^{m+1}$$

$$max^{m-1}dx-(m-1)x^m dx=(m+1)y^m dy$$

$$dx=\frac{(m+1)y^m dy}{max^{m-1}-(m-1)x^m}$$

$PT=ydx:dy=(m+1)y^{m+1}:(max^{m-1}-[m-1]x^m)=(m+1)(ax^m-x^{m+1}):(max^{m-1}-[m-1]x^m)=(m+1)(ax-x^2):(ma-mx-x)$ & $AT=(m+1)(ax-x^2):(ma-[m-1]x)-x=(max+ax-mx^2-x^2-max+mx^2+x^2):(ma-[m-1]x)=ax:(ma-[m-1]x)$. Cum itaque in circulo secundi generis $m=2$; erit $AT=ax:(2a-3x)$ & $PT=(3ax-3x^2):(2a-3x)$.

COROLLARIUM 5.

25. Pro ellipsi Apolloniana est (§. 420 *part. 1.*)

$$ay^2=abx-bx^2$$

Hinc $2aydy=abdx-2bxdx$

$$2aydy:(ab-2bx)=dx$$

$PT=ydx:dy=2ay^2:(ab-2bx)=(2abx-2bx^2):(ab-2bx)=(2ax-2x^2):(a-2x)$, prorsus ut supra (§. 440. *part. 1.*)

COROLLARIUM 5.

26. Pro infinitis ellipsibus est (§. 532. *part 1.*)

$$ay^{m+n}=bx^m(a-x)^n$$

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy=mbx^{m-1}(a-x)^n dx-nbx^m(a-x)^{n-1}dx$$

$$\frac{(m+n)ay^{m+n-1}dy}{mbx^{m-1}(a-x)^n-nbx^m(a-x)^{n-1}}=dx$$

$$PT=ydx:dy=\frac{(m+n)ay^{m+n}}{mbx^{m-1}(a-x)^n-nbx^m(a-x)^{n-1}}$$

$=(m+n)$

$=(m+n)bx^m(a-x)^n : (mbx^{m-1}[a-x]^n - nbx^m[a-x]^{n-1}) =$ divisione per $bx^{m-1}[a-x]^{n-1}$ facta $(m+n)(ax-x^2):(ma-mx-nx)$ & hinc

$AT=(max-mxx+nax-nxx):(ma-mx-nx)-x=(max-mx^2+nax-nx^2-max+mx^2+nx^2):(ma-mx-nx)=nax:(ma-[m-1]x)$.

Cum adeo in elliptoide cubicali sit $m=2$, $n=1$; erit $PT=(3ax-3x^2):(2a-3x)$ & $AT=ax:(2a-3x)$.

COROLLARIUM 7.

27. Pro hyperbola Apolloniana est (§. 459 part. 1.)

$$ay^2=abx+bxx$$

$$2aydy=abdx+2bxdx$$

$$2aydy:(ab+2bx)=dx$$

$PT=ydx:dy=2ay^2:(ab+2bx)=(2abx+2bxx):(ab+2bx)=(2ax+2xx):(a+2x)$ prorsus ut supra (§. 491 *part. 1*).

COROLLARIUM 8.

28. Pro infinitis hyperbolis cum sit $ay^{m+n}=bx^m(a+x)^n$ (§. 525 *part.* 1.): reperietur ut ante pro infinitis ellipsibus $PT=(m+n)(ax+x^2):(ma+[m+n]x)$ & $AT=nax:(ma+[m+n]x)$.

COROLLARIUM 9.

29. Pro hyperbola intra asymptotos est (§. 502. part. 1.)

$$xy=aa$$

$$xdy+ydx=0$$

$$ydx=-xdy$$

$PT=ydx:dy=-xdy:dy=-x$

Quoniam valor subtangentis est negativus, id indicio est, subtangentem PT esse sumendam in oppositum originis abscissae AP. Differentiale enim ipsius xy esse debebat $ydx-xdy$, quia y decrescit (§. 12.). Tab. I. Fig. 4.

COROLLARIUM 10.

30. Pro infinitis hyperbolis intra asymptotos est.

$$a^{m+n}=x^n y^m$$

$$0=nx^{n-1}y^m dx+mx^n y^{m-1}dy$$

$$-mx^n y^{m-1}dy=nx^{n-1}y^m dx$$

$$-mxdy:ny=dx$$

$$PT=ydx:dy=-mxydy:nydy=-\frac{n}{n}x.$$

COROLLARIUM 11.

31. Pro Cissoide *Dioclis* est (§. 548. part. 1.)

$$y^2=x^3:(a-x)$$

$$2ydy=(3ax^2dx-3x^3dx+x^3dx):(a-x)^2$$

$$2y(a-x)^2dy:(3ax^2-2x^3)=dx$$

$PT=ydx:dy=2y^2(a-x)^2:(3ax^2-$

$2x^3) = x^3(a-x) : (3ax^2 - 2x^3 = (ax - xx) : (3a-2x)$.

Tab. VI. Fig. 63. part. 1. Habemus itaque:

$$3a - 2x : a - x = 2x : PT$$
$$\text{five } \tfrac{3}{2}a - x : a - x = x : PT$$
$$\text{h. e. } QB + GB : QB = AQ : PT$$

COROLLARIUM. 12.

32. Denique pro omnibus curvis algebraicis est (§. 385. *part.* 1.)

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$$

$$may^{m-1}dy + nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx + rcy^{r-1}x^s dy = 0$$

$$nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx = -may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy$$

$$dx = \frac{-may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{-may^m - rcy^r x^s}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

Sit e. gr. $y^2 - ax = 0$, erit comparatione cum formula generali facta,

$$ay^m = y^2 \qquad bx^n = -ax$$
$$a = 1 \;\; m = 2 \qquad b = -a \;\; n = 1$$
$$cy^r x^s = 0 \qquad f = 0.$$
$$c = 0 \;\; r = 0 \;\; s = 0$$

His valoribus in formula subtangentis generalissima substitutis prodit subtangens parabolæ primi generis $(-2.1.y^2 - 0.0y^0x^0) : (1.-ax^{1-1} + 0.0y^0x^{0-1}) = -2y^2 : -a = 2y^2 : a$, ut supra (§. 21).

Similiter sit pro circulo $y^2 - ax + x^2 = 0$; erit

$$ay^m = y^2 \qquad bx^n = -ax$$
$$a = 1 \;\; m = 2 \qquad b = -a \;\; n = 1$$
$$bx^n = -x^2 \qquad cy^r x^s = 0$$
$$b = 1 \;\; n = 2 \qquad c = 0 \;\; r = 0 \;\; s = 0$$
$$PT = \frac{-2.1.y^2}{1.-ax^0 + 2.1x} = \frac{-2y^2}{-a+2x} = \frac{2y^2}{a-2x}$$

ut supra (§. 23).

Sit $y^3 - x^3 - axy = 0$, erit

$$ay^m = y^3 \qquad bx^n = -x^3$$
$$a = 1 \;\; m = 3 \qquad b = -1 \;\; n = 3$$
$$cy^r x^s = -axy \qquad f = 0$$
$$c = -a \;\; r = 1 \;\; f = 1$$

His valoribus in formula subtangentis generali substitutis, prodit subtangens curvæ, ad quam est æquatio data $PT = (-3.1y^3 - 1.-ayx) : (3.-1x^2 + 1.-ayx^0 = (-3y^3 + ayx) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay)$, consequenter $AT = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay)$, substituto nempe ex æquatione ad curvam ipsius $y^3 - x^3$ valore, hoc est, $axy : (3x^2 + ay)$.

SCHOLION.

33. *In applicatione formulæ generalis* bx^n *&* $cy^r x^s$ *totidem terminis sigillatim comparantur, quot in dato casu speciali eidem respondent, singulique valores simul*

mul in formula subtangentis substituuntur, propterea quod bx^n *repraesentat omnes terminos, in quibus sola indeterminata x occurrit, & $cy^r x^s$ omnes terminos, in quibus utraque indeterminata x & y locum habet* (§. 385 part. 1).

COROLLARIUM.

Tab. I. Fig. 2. 34. Quia $PT = ydx : dy$, $PM = y$; erit (§. 417. *Geom.*) $TM = \sqrt{(y^2dx^2 : dy^2 + y^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy$.

PROBLEMA 5.

35. *Determinare subnormalem PH in linea algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 2. Sit $PM = y$, $AP = x$, erit $TP = ydx : dy$ (§. 20) & $PT : PM = PM : PH$ (§. 409 *part*, 1.)
hoc est, $\frac{ydx}{dy} : y = y : \frac{ydy}{dx}$

Quodsi ut in problemate praecedente in expressione subnormalis PH generali valor ipsius dy substituatur; differentiales quantitates evanescunt & valor subnormalis in quantitatibus ordinariis prodit.

COROLLARIUM 1.

36. In parabola *Apolloniana* $dy = adx : 2y$, (§. 21). Ergo $PH = ydy : dx = aydx : 2ydx = \frac{1}{2}a$, ut supra reperimus (§. 410. part. 1.)

COROLLARIUM 2.

37. In infinitis parabolis $dy = a^{m-1} dx : my^{m-1}$ (§. 22). Itaque $PH = ydy : dx = a^{m-1}y : my^{m-1} = a^{m-1}y^2 : my^m$ (§. 54 *part. 1.*) $= a^{m-1}y^2 : ma^{m-1}x$ (§. 519. *part. 1.*) $= y^2 : mx$, ut adeo sit $mx : y = y : PH$.

COROLLARIUM 3.

38. In circulo $adx - 2xdx = 2ydy$ (§. 23), hoc est, $\frac{1}{2}a - x = ydy : dx = PC$. Tab. I. Fig. 3.
Apparet adeo, in circulo omnes ad peripheriam normales in centro concurrere, consequenter tangentem TM radio CM ad angulos rectos insistere.

COROLLARIUM 4.

39. In infinitis circulis $(max^{m-1}dx - (m-1)x^m dx) : (m+1)y^m = dy$. Unde subnormalis $PH\ ydy : dx = (max^{m-1}y - [m-1]x^m y) : (m+1)y^m = (max^{m-1}y^2 - [m-1]x^m y^2) : (m+1)y^{m+1} = (max^{m-1}y^2 - [m-1]x^m y^2) : (m+1)(ax^m - x^{m+1}) = (may^2 - [m-1]xy^2) : (m+1)(ax - x^2)$. Est itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+1}a - x : PH$.

COROLLARIUM 5.

40. In infinitis ellipsibus $dy = (mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx) : (m+1)ay^{m+n-1}$ (§. 26). Unde $PH = ydy : dx = (mbx^{m-1}(a-x)^n y - nbx^m(a-x)^{n-1}y) : (m+1)ay^{m+n-1} = (mbx^{m-1}(a-x)^n y^2 - nbx^n(a-x)^{n-1}y^2) : (m+n)ay^{m+n}$ sive : $(m+n)bx^m(a-x)^n = (my^2(a-x) - nxy^2) : (m+n)(ax - x^2)$. Est itaque Tab. I. Fig. 2.
$ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+n}a - x : PH$.

COROLLARIUM 6.

Tab. I. Fig. 4. 42. Pro hyperbola intra asymptotos (§. 29) $dy = -ydx : x$. Unde $PH = y\,dy : dx = -y^2 : x$. Valor negativus indicio est, subnormalem PH cadere versus sinistram. Quia $xy = a^2$, adeoque $y = a^2 : x$ & $y^2 = a^4 : x^2$, erit $PH = a^2 y : x^2$ vel $a^4 : x^3$, consequenter $x^2 : a^2 = y : PH$ & $x^3 : a^3 = a : PH$, hoc est, semiordinata habet ad subnormalem rationem duplicatam, & latus potentiæ hyperbolæ rationem triplicatam abscissæ ad latus potentiæ hyperbolæ.

COROLLARIUM 8.

43. In Cissoide *Dioclis* $2ydy = (3ax^2 dx - 2x^3 dx) : (a-x)^2$ (§. 31). Igitur subnormalis $ydy : dx = (3ax^2 - 2x^3) : 2(a-x)^2$. Est adeo $(a-x)^2 : x^2 = \frac{3}{2}a - x : PH$.

COROLLARIUM. 9.

Tab. I. Fig. 2. 44. Quia $PH = ydy : dx$ (§. 35) & $PM = y$: erit $MH = \surd (y^2 dy^2 : dx^2 + y^2) = y \surd (dy^2 + dx^2) : dx$.

SCHOLION.

45. *Equidem data per problema præcedens subtangente subnormalis reperitur facillime absque calculo differentiali* (§. 409): *quoniam tamen subinde subnormalis inveniri debet data tantummodo æquatione ad curvam, ideo in problemate præsente docendum erat, quomodo independenter a subtangente ex æquatione eruenda.*

PROBLEMA 6.

46. *Determinare curvarum algebraicarum asymptotos.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam asymptotus CD cum curva non concurrit, nisi intervallo infinito emenso; haberi potest pro tangente in puncto, cui abscissa infinita respondet. Quantitates ergo constantes respectu variabilium x & y sunt infinite parvæ (§. 2.). Quamobrem si ex valore ipsius AT abjiciantur, quæ in nullam variabilem ducuntur; prodibit valor ipsius AC, per quem punctum C determinatur, ex quo asymptotus CD ducitur, Tab. I. Fig. 2.

2. Quodsi idem fiat in æquatione pro curva, & facta differentiatione inveniatur ratio $dx : dy$; haud difficulter quoque eruitur valor ipsius AE: est enim in illo casu $\triangle MRm \backsim \triangle CEA$. Quod ut clarius intelligatur, ponamus abscissam AP esse infinitam, adeoque TM asymptotum; evidens est $\triangle MmR \backsim \triangle TPM$ (§. 20). Sed $\triangle TPM \backsim \triangle TAG$ (§. 268. *Geom.*). Ergo $\triangle TAG \backsim \triangle MmR$, consequenter $MR : mR = TA : AG$ (§. 267 *Geom.*). Surrogetur jam in locum

locum △TAG alterum CAE; erit MR : mR = CA : AE, hoc est, $dx:dy$ = CA : AE.

COROLLARIUM. 1.

47. In hyperbola Apolloniana AT = $ax:(a+2x)$ §. 491. *part.1.* Ergo AT = $ax:2x = \frac{1}{2}a$ = AC prorsus ut supra habetur (§. 474. *part.1.*). Porro ad hyperbolam Apollonianam

$$ay^2 = bx(a+x)$$

hoc est in nostro casu ob a infinitesimam

$$ay^2 = bxx$$

consequenter $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$$

$$dx:dy = \sqrt{a}:\sqrt{b}$$

adeoque ob $dx:dy$ = CA : AE (§. 46)

$$\sqrt{a}:\sqrt{b} = \tfrac{1}{2}a : AE$$

Unde habetur AE $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b} : \sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$ denuo ut supra (§. 474. *part.1.*).

Idem etiam adhuc aliter invenitur. In casu infiniti seu asymptotico TP = CP = $\frac{1}{2}a + x = x$, ob $\frac{1}{2}a = 0$, quia $x = \infty$. Porro ob similitudinem △△ TPM & CAE est

$$CP:PM = CA:AE$$

$$x : \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a :$$

$$1 : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a :$$

$$AE = \tfrac{1}{2}a\sqrt{b} : \sqrt{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

COROLLARIUM 2.

48. Pro infinitis hyperbolis est AT = $ax:(ma + mx + nx)$ §. 28. adeoque in casu asymptotico, in quo $x = \infty$, AC $= nax:(mx+nx) = na:(m+n)$ §. 46. Quoniam porro (§. 425 *part.1.*).

$$ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$$

erit $ay^{m+n} = bx^{m+n}$ (§. 46).

hoc est, si fiat brevitatis gratia $m+n=r$,

$$ay^r = bx^r$$

$$ya^{1:r} = xb^{1:r}$$

$$dy\,a^{1:r} = dx\,b^{1:r}$$

$$dx:dy = a^{1:r} : b^{1:r} = AC:AE$$

Unde ob AC $= na:r$, reperitur AE $= \dfrac{na\sqrt[r]{b}}{r\sqrt[r]{a}} = \dfrac{n}{r}\sqrt[r]{a^{r-1}b}.$

PROBLEMA 7.

49. *Determinare subtangentem & subnormalem in Conchoide.*

Quoniam Conchois est curva algebraica (§. 382. 535 *part.1*); subtangens ejus inveniri potest *per probl. 4.* & subnormalis *per probl. 5.* (§. 20. & 35). Enimvero quia ob æquationem ejus admodum prolixam expressio utraque non satis concinna prodit; ideo consultius judicamus alia methodo utramque investigari, qua & in casibus aliis similibus commode utendum.

Tab. I. Fig. 5. Sit nempe $AP = x$, $PM = y$. Intelligatur pm ipsi PM infinite propinqua: erit $Pp = MR = dx$ & $Rm = dy$, unde $PT = ydx : dy$, ut supra (§. 20). Sit porro $AB = QM$ (§. 535. *part.* 1) $= a$, $CM = z$, $BC = b$; erit $PB = a - x$, $PC = a + b - x$. Ut valor ipsius dx ex natura curvæ inveniatur; fiat:

$$a - x = v \qquad a + b - x = t$$

$$\text{erit } -dx = dv \qquad -dx = dt$$

Porro (§. 268 *Geom.*)

$$PB : MQ = PC : MC$$

$$v : a = t : z$$

$$at = zv$$

$$adt = zdv + vdz$$

Denique (§. 417 *Geom.*) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, hoc est,

$$z^2 = t^2 + y^2$$

$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$

$$zdz = tdt + ydy$$

Substituantur ex æquationibus duabus prioribus valores ipsorum differentialium dt & dv in duabus posterioribus: prodibit

$$-adx = -zdx + vdz \qquad zdz = -tdx + ydy$$

$$zdx - adx = vdz \qquad dz = \frac{-tdx + ydy}{z}$$

$$\frac{zdx - adx}{v} = dz$$

Quamobrem

$$\frac{zdx - adx}{v} = \frac{-tdx + ydy}{z}$$

$$z^2dx - azdx = -vtdx + vydy$$

$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$

$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt}$$

Hinc $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt) = v(z^2 - t^2) : (z^2 - az + tv)$ ob $y^2 = z^2 - t^2$, & subnormalis $ydy : dx$ habetur $= (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$.

Aliter.

Sit TC secans regulam in I perpendicularis ad MC & mc ipsi CM infinite propinqua. TM tangat Conchoidem in M. Radio CQ describatur arcus Qt & radio CM arcus Mr. Sit $QM = a$, $CQ = x$, $CM = y$; erit $tS = dx$, $mr = dy$. Quoniam in $\triangle QtS$ angulus t rectus est (§. 38.) & QCI itidem rectus (§. 78. *Geom.*) & ob angulum infinite parvum $QCS = 0$ (§. 3) angulus $IQC = QSt$ (§. 239 *Geom.*), erit $\triangle QtS \backsim \triangle QIC$, (§. 267. *Geom.*), adeoque Tab. IV. Fig. 43.

$$CQ : CI = tS : Qt$$

$$x : b = dx : \frac{bdx}{x}$$

Quo-

Quoniam Qt & Mr sunt arcus concentrici intra crura ejusdem anguli descripti, erit (§. 138. 412. *Geom.*)

$$CQ : Qt = CM : Mr$$
$$x : \frac{bdx}{x} = y : \frac{bydx}{x^2}$$

Denique cum eodem, quo supra, modo ostendatur, esse $\triangle Mrm \backsim \triangle MCT$, erit

$$mr : Mr = MC : CT$$
$$dy : \frac{bydx}{x^2} = y : \frac{by^2dx}{x^2dy}$$

Ex natura Conchoidis (§. 535. *part. 1.*)

$$y = x + a$$

adeoque $dy = dx$

Ergo $PT = \frac{by^2dx}{x^2dy} = \frac{by^2}{x^2}$

Ducatur itaque GM parallela regulæ IQ; erit (§. 268. *Geom.*).

$$CQ : QM = CI : CG$$
$$x : y = b : \frac{by}{x}$$

Quare si porro TM ducatur parallela ipsi GQ; erit (§. *cit.*)

$$CQ : CG = CM : CT$$
$$x : \frac{by}{x} = y : \frac{by^2}{x^2}$$

adeoque CT subtangens, consequenter TM tangens quæsita.

PROBLEMA 8.

50. *Determinare subtangentem in Spirali Archimedea & infinitis spiralibus aliis.* Tab. I. Fig. 6.

Sit semidiameter circuli $AB = a$, peripheria $= b$, arcus $BD = x$, $AG = y$. Intelligatur radius AC alteri AD infinite propinquus, & ducatur radio AG arculus EG; erit $CD = dx$ & $EF = dy$ & (§. 138. 412. *Geom.*)

$$AD : AG = DC : GE$$
$$a : y = dx : \frac{ydx}{a}$$

Quoniam EG ad AE perpendicularis (§. 38); ducatur HA ad AC normalis; quæ est subtangens spiralis: erit EG parallela ipsi AH (§. 256 *Geom.*) adeoque cum sit $FA = AE$ sive AG ob infinite parvam EF (§. 268 *Geom.*)

$$FE : EG = FA : AH$$
$$dy : \frac{ydx}{a} = y : \frac{y^2dx}{ady}$$

Jam pro spirali Archimedea (§. 571. *part. 1.*)

$$ax = by$$

$$adx = bdy$$

Hinc

Hinc ſubtangens $AH = y^2 dx = by^2 : \frac{}{ady}$

$a^2 = xy : a.$

Pendet adeo determinatio ſubtangentis a quadratura circuli, cum pro arcu x aſſumenda ſit recta.

Pro infinitis ſpiralibus eſt (§. 572 *part. 1.*)

$$a^m x^n = b^n y^m$$

$$na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy$$

$$dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}$$

$AH = y^2 dx : ady = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1} = ma^m x^n y : ma^{m+1} x^{n-1} = mxy : na$

COROLLARIUM.

51. Quodſi ponamus arcum BC eſſe ad FC ut eſt abſciſſa curvæ algebraicæ ad ſemiordinatam; erit $BC = x$, $CD = dx$, $FC = y$, & (ducto radio AG arculo FI) $GI = FE = dy$, atque (§. 138. 412. *Geom.*) ob $AG = AF$ (§. 4)

$$AC : CD = AG : EG$$

$$a : dx = a - y : \frac{adx - ydx}{a}$$

$$FE : EG = FA : AH$$

$$dy : \frac{adx - ydx}{a} = a - y : \frac{(a-y)^2 dx}{ady}$$

Quodſi ergo ex æquatione curvæ algebraicæ, quæ exprimit relationem BC ad FC, ſubſtituatur in expreſſione ſubtangentis AH valor ipſius dx, prodibit ſubtangens quæſita. Sit e. gr. relatio arcus BC ad rectam FC contenta æquatione

$$bx = y^2$$

erit $\quad bdx = 2ydy$

unde $AH = (a-y)^2 dx : ady = 2y(a-y)^2 : ab.$

PROBLEMA 9.

52. *Determinare ſubtangentem PT in Cycloide.* Tab. I. Fig. 7.

Sit APB circulus genitor cycloidis AMC, KP tangens circuli. Ducatur TM, quæ cycloidem in M tangat; erit TP ſubtangens. Rectæ QM per utrumque contactus punctum P & M tranſeunti intelligatur ipſa qm parallela & infinite propinqua; demittantur perpendiculares PO & MS: agatur denique MR ipſi PT parallela. Erit $MS = PO$ (§. 226. *Geom.*) & $MR = Pp$, quia arculus Pp infinite exiguus, habetur pro parte rectæ pT, (§. 257 *Geom*). Sit jam $AP = x$, $PM = y$; erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$. Ob parallelas MP & mR, *per conſtruct*: angulus $MmR = TMP$ & ob parallelas MR & TP, *itidem per conſtr.* $mRM = mpT = MPT$ (§. 233 *Geom.*), conſequenter (§. 267. *Geom.*)

mR:

$$mR : RM = MP : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Est vero in cycloide $y=x$ (§ 575. *part.* 1), consequenter $dy = dx$ & hinc $ydx : dy$ seu $PT = y$. Ducta igitur recta PT, quæ circulum tangit in P, facillime quoque ducitur TM, quæ cycloidem in puncto respondente M tangit.

COROLLARIUM.

53. Si APB fuerit linea algebraica alia, cujus arcus AP sint abscissæ transcendentis AMC; eodem modo determinatur subtangens, cum in omni casu reperiatur $PT = ydx : dy$. Ponamus e. gr.

$$bx = ay$$
erit $$bdx = ady$$
$$dx = ady : b$$
$$PT = ydx : dy = aydy : bdy = ay : b.$$

PROBLEMA 10.

54. *Determinare subtangentem PT in Logistica.*

Tab. I. Fig. 8. Sit $AP = x$, $PM=y$, pm ipsi PM perpendicularis; erit $MR=Pp=dx$ & $Rm= dy$ & vi eorum, quæ in problemate 4. (§. 20) demonstrata sunt.

$$mR : RM = PM : PT$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Sit abscissa alia ipsa AP major vel minor $= v$ & semiordinata eidem respondens $= z$; erit subtangens $= zdv : dz$. Quoniam ex natura Logisticæ abscissæ in progressione arithmetica progrediuntur (§. 555 *part.* 1.) erit $dx = dv$. Quoniam vero semiordinatæ progrediuntur in geometrica (§. *cit.*); erit

$$y : y + dy = z : z + dz$$
$$y : dy = z : dz \quad (\text{§.}193. \textit{Arithm.})$$
$$dx = dv$$
$$ydx : dy = zdv : dz$$

Theorema. In Logistica omnes subtangentes sunt inter se æquales, seu subtangens PT est constans.

PROBLEMA 11.

55. *Determinare subtangentem MH in quadratrice Dinostratis.* Tab. I. Fig. 9.

Per punctum datum M ducatur radius CN sitque TM tangens, MK ad CM & TK ad MK perpendicularis, Cn ipsi CN & pm ipsi PM infinite propinqua, $AP=y$, $AN = x$, $CM=p$, $ANB=a$, $AC = b$; erit $MI = b - y$, $Pp=MR=dy$, $Nn=dx$. Quoniam arcus infinite parvus radio CM descriptus coincidit cum recta MH, erit (§. 138. 412. *Geom.*)

$$CN : Nn = CM : MH$$
$$b : dx = p : \frac{pdx}{b}$$

Porro cum TK (*per hypoth.*) & CH (§.37) sint ad MK perpendiculares; erit mH ipsi KT parallela (§. 256. *Geom.*), adeoque (§.268. *Geom.*)

$$Mm : MT = MH : MK.$$

Similiter mR & TI, quia ad MI perpendiculares (*per hypoth.*), inter se parallelæ (§. 256. *Geom.*), adeoque (§.268. *Geom.*)

$$Mm : MT = MR : MI$$

consequenter (§. 167. *Arithm.*)

$$MR : MI = MH : MK$$

$$dy : b-y = \frac{pdx}{b} : \frac{pdx}{dy} - \frac{pydx}{bdy}$$

Est vero ex natura quadratricis (§ 518 *part. 1.*)

$$bx = ay$$

$$bx : a = y$$

Item, $dx = ady : b$

Substitutis ergo in valore ipsius MK pro dx & y valoribus modo inventis, prodit $MK = \frac{ap}{b} - \frac{abpx}{abb} = (ap-px) : b = (a-x)p : b = NB.MC$.
Est vero NB arcus radio MC descriptus adeoque consttuctio a rectificatione arcus illius, seu a quadratura circuli pendet.

PROBLEMA 12.

Tab. 1. 56. ***Intra angulum QTH describere curvam desideratam algebraicam, quæ rectam TQ in dato puncto M tangat.*** Fig. 2.

RESOLUTIO.

Demittatur ex M ad TH perpendicularis PM, erit TP subtangens, PM semiordinata curvæ quæsitæ. Sit $TP = v$, $PM = y$, erit (§. 20)

$$TP : PM = MR : mR$$

$$v : y = dx : dy$$

$$vdy = ydx$$

Quare si ex æquatione curvæ determinatur valor ipsius dx vel dy & in æquatione modo inventa substituatur; per communes Algebræ regulas determinantur tum abscissa x semiordinatæ PM datæ respondens, ut habeatur vertex curvæ A; tum lineæ rectæ, quibus datis curva datur. Quodsi vero contingat, aliquas ex his determinari non posse; id quidem indicio est, eam variis modis assumi posse adeoque plures curvas ejusdem speciei satisfacere proposito.

COROLLARIUM 1.

57. Si curva AMO parabola primi generis esse debet; erit (§. 388. *part. 1*)

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a$$

Quodsi hic valor in æquatione $vdy = ydx$ pro dx substituatur; habebimus

vdy

$$vdy = 2y^2dy : a$$

$$av = 2y^2 \text{ seu } a = 2y^2 : v$$

Porro ex æquatione ad parabolam $a = y^2 : x$. Quare

$$2y^2 : v = y^2 : x$$

$$\overline{\qquad\qquad} y^2$$

$$2 : v = 1 : x$$

$$2v = x$$

$$x = \tfrac{1}{2}v$$

Divisa nempe TP bifariam in A, habetur vertex parabolæ A, ut jam ex superioribus (§.21) constat. Parametro itaque $2y^2 : v$ circa axem AH parabola describenda (§.401 *part. 1.*).

COROLLARIUM 2.

58. Si curva AMO hyperbola æquilatera: erit (§. 505. *part. 1.*).

$$ax + xx = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a + 2x)$$

Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ pro dx substituatur valor modo inventus, prodibit

$$vdy = 2y^2dy : (a + 2x)$$

$$av + 2vx = 2y^2$$

$$av = 2y^2 - 2vx$$

$$a = 2y^2 : v - 2x$$

hoc est, si fiat $y^2 : v = m$

$$a = 2m - 2x$$

Porro ex æquatione ad hyperbolam æquilateram

$$ax + xx = y^2$$

$$a = y^2 : x - x$$

Unde $y^2 : x - x = 2m - 2x$

$$\overline{\qquad\qquad} x$$

$$yy - xx = 2mx - 2xx$$

$$yy = 2mx - xx$$

seu $\quad xx - 2mx = -yy$

$$\quad m^2 \qquad m^2$$

$$x^2 - 2mx + m^2 = m^2 - yy,$$

$$x - m = \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

$$m - x$$

$$x = m \pm \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

Dato itaque valore ipsius x, datur vertex hyperbolæ æquilateræ, datur etiam parameter $a = 2m - 2x$, consequenter hyperbola describi potest (§. 472 *part. 1.*)

COROLLARIUM 3.

59. Quoniam pro circulo $ax - x^2 = y^2$, eodem, quo ante, modo reperitur $a = 2y^2 : v + 2x$ seu, si fiat $y^2 : v = m$, $a = 2m + 2x$, & $x = \sqrt{(mm + yy)} - m$.

COROLLARIUM 4.

60. Si curva AMO ellipsis primi generis; erit (§. 421 *part. 1.*)

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

$$2ydy = bdx - 2bxdx : a$$

$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2ay$$

Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ substituatur valor modo inventus, prodibit

$$abv - 2bvx = 2ay^2$$

$$b = 2ay^2 : (av - 2vx)$$

Ex natura curvæ est

$$b = ay^2 : (ax - xx)$$

Unde $\frac{2ay^2}{av - 2vx} = \frac{ay^2}{ax - xx}$

$$2ax - 2xx = av - 2vx$$

$$-\tfrac{1}{2}av = xx - ax - vx$$

Si fiat $a - v = 2m$

erit $m^2 - \tfrac{1}{2}av = xx - 2mx + mm$

$$\sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = x - m$$

$$m - x$$

$$m \pm \sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = x$$

Quoniam ipsius a seu axis transversi nullus valor erui potest; pro arbitrio assumi debet. Quodsi minor fuerit quam v; erit $x = m + \sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)}$.

CAPUT III.

DE USU CALCULI DIFFERENTIALIS IN METHODO DE MAXIMIS ET MINIMIS.

DEFINITIO 4.

61. Si semiordinatæ alicujus curvæ usque ad certum terminum continuo crescunt vel decrescunt, quem prætergressæ denuo decrescunt vel crescunt; methodus, per quam determinatur earum maxima vel minima, dicitur *Methodus de maximis & minimis.*

SCHOLION.

62. Potest vero hæc methodus etiam ad determinandas quantitates alias, quæ ad certum aliquem terminum crescunt vel decrescunt, adhiberi. Sed repræsentandæ sunt per curvarum semiordinatas, ut exempla inferius adducenda loquuntur.

PROBLEMA 13.

63. *Determinare maximam vel minimam applicatam in curva algebraica.* Tab. I. Fig. 10. 11.

RESOLUTIO.

Quoniam in curvis maximum vel minimum habentibus tangens TM degenerat tandem in DE & axi parallelus evadit, adeoque normalis MH coincidit cum maxima vel minima applicata CG; erit in casu maximi vel minimi subtangens TP infinita atque subnormalis PH nihilo æqualis. Est vero PH $= ydy : dx$. Quodsi ergo ponatur $ydy : dx = 0$; reperietur $dy = 0$ & ob PT=

$PT = ydx : dy = \infty$ (quæ est nota infinitatis) $dx = \infty$.

Tab. I. Fig. 12. Fieri potest, ut tangens HG in directum jaceat semiordinatæ GC: quo in casu subtangens PT nihilo æquatur & subnormalis PH fit infinita. Est vero $PT = ydx : dy = 0$ (§. 20.) quare si ponatur $ydx : dy = 0$ habebimus $dx = 0$. Vel ob $PH = ydy : dx = \infty$ reperitur $dy = \infty$. Sunt nimirum tam dx, quam y intuitu dy infinitesimæ.

Ex æquatione itaque curvæ quærendus est valor ipsius dy, & vel nihilo, vel infinito æquandus, ut habeatur valor abscissæ, cui maxima applicata coordinatur.

COROLLARIUM. 1.

64. Quoniam in circulo (§. 377. part. 1)

$$ax - xx = y^2$$

erit $adx - 2xdx = 2ydy$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$a = 2x$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Nempe maxima semiordinata in circulo erigitur ex centro, uti ex elementis constat (§. 299. *Geom.*).

Quodsi porro valor ipsius x in æquatione $ax - xx = y^2$ substituatur; prodibit $\tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{4}aa = yy$, hoc est, $\tfrac{1}{4}aa = yy$. Unde $\tfrac{1}{2}a = y$: id quod denuo ex Elementis manifestum est.

Quodsi ponamus $2ydy : (a - 2x) = dx = \infty$: erit $a - 2x$ respectu numeratoris $2ydy$ infinite parva, adeoque (§. 3) $a - 2x = 0$, ut ante.

COROLLARIUM 2.

65. Pro infinitis circulis (§. 24.)

$$max^{m-1}dx - (m-1)x^m dx = (m+1)(y^m dy = 0$$

$$max^{m-1} = (m-1)x^m \quad (m-1)x^{m-1}$$

$$ma : (m-1) = x$$

E. gr. sit $m = 3$ seu æquatio ad circulum tertii generis $y^4 = ax^3 - x^4$; erit $x = \tfrac{3}{4}a$, consequenter $y^4 = \tfrac{27}{64}a^4 - \tfrac{81}{256}a^4 = \tfrac{108}{256}a^4 - \tfrac{81}{256}a^4 = \tfrac{27}{256}a^4$. Unde $y = \tfrac{1}{4}a\sqrt[4]{27}$.

COROLLARIUM 3.

66. Pro ellipsibus infinitis (§. 26.)

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{n-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$$

$$mbx^{n-1}(a-x)^n = nbx^m(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m+n) = x.$$

Sit e. gr. ellipsis primi generis; erit $m = 1$ & $n = 1$, adeoque $x = \tfrac{1}{2}a$, & ob $y^2 = bx - bxx : a$ (§. 421. part. 1), $y^2 = \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}ab$. Unde $y = \sqrt{\tfrac{1}{4}ab}$.

COROLLARIUM 4.

67. Si $x^3+y^3=axy$

erit $3x^2dx+3y^2dy=axdy+aydx$

$$3x^2dx-aydx=axdy-3y^2dy=0$$

$$3x^2=ay$$

$$3x^2:a=y$$

$$27x^6:a^3=y^3$$

$$x^3+27x^6:a^3=3x^3$$

$$27x^6=2a^3x^3$$

$$27x^3=2a^3$$

$$3x=a\sqrt[3]{2}$$

$$x=\tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Porro

$$y=3x^2:a$$

$$=\tfrac{3}{9}a\sqrt[3]{4}$$

$$=\tfrac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$$

COROLLARIUM 5.

68. Sit $y-a=a^{1:3}(a-x)^{2:3}$

erit $dy=-2a^{1:3}dx:3(a-x)^{1:3}$

Quodsi hic valor ipsius dy ponatur nihilo æqualis; erit $-2a^{1:3}=0$. Quamobrem cum nullus valor ipsius x inde eruatur; ponatur

$$-2a^{1:3}:3(a-x)^{1:3}=\infty$$

erit ob denominatorem respectu numeratoris infinite parvum (§. 3)

$$3(a-x)^{1:3}=0$$

$$a-x=0$$

$$a=x$$

Unde $y-a=a^{1:3}(a-x)^{2:3}=a^{1:3}.0=0$, adeoque $y-a=0$

$$y=a.$$

COROLLARIUM 6.

69. Sit $y^5=a^2x^3-x^5+b^2c^2x$

erit $5y^4dy=3a^2x^2dx-5x^4dx+b^2c^2dx=0$

$$3a^2x^2-5x^4+b^2c^2=0$$

$$5x^4-3a^2x^2=-b^2c^2$$

$$x^4-\tfrac{3}{5}a^2x^2=-\tfrac{1}{5}b^2c^2$$

$$\tfrac{9}{25}a^4 \qquad \tfrac{9}{25}a^4$$

$$x^4-\tfrac{3}{5}a^2x^2+\tfrac{9}{25}a^4=\tfrac{9}{25}a^4-\tfrac{1}{5}b^2c^2$$

$$x^2-\tfrac{3}{5}a^2=\sqrt{(\tfrac{9}{25}a^4-\tfrac{1}{5}b^2c^2)}$$

$$\tfrac{3}{5}a^2-x^2$$

$$x^2=\tfrac{3}{5}a^2\pm\sqrt{(\tfrac{9}{25}a^4-\tfrac{1}{5}b^2c^2)}$$

$$x=\sqrt{(\tfrac{3}{5}a^2+\sqrt{(\tfrac{9}{25}a^4-\tfrac{1}{5}b^2c^2)})}$$

Fiat

Fiat $x = m$

erit $y^5 = a^2 m^3 - m^5 + b^2 c^2 m$

$$y = \sqrt[5]{(a^2 m^3 - m^5 + b^2 c^2 m)}$$

COROLLARIUM 7.

70. Sit $b^2 x^2 + a^4 = cxy^2 + x^3 y$

erit $2b^2 x dx = 2cxydy + cy^2 dx + 3x^2 y dx + x^3 dy$

$$2b^2 x dx - cy^2 dx - 3x^2 y dx = 2cxydy + x^3 dy = 0$$

$$2b^2 x - cy^2 - 3x^2 y = 0$$

$$2b^2 x = cy^2 + 3x^2 y \qquad x$$

$$2b^2 x^2 = cxy^2 + 3x^3 y$$

$$b^2 x^2 = cxy^2 + x^3 y - a^4$$

$$b^2 x^2 = 2x^3 y + a^4$$

$$b^2 x^2 - a^4 = 2x^3 y$$

$$\frac{b^2 x^2 - a^4}{2x^3} = y$$

$$\frac{b^4 x^4 - 2a^4 b^2 x^2 + a^8}{4x^6} = y^2$$

$$\frac{b^4 c x^4 - 2a^4 b^2 c x^2 + a^8 c}{4x^6} = cy^2$$

$$\frac{3b^2 x^2 - 3a^4}{2x} = 3x^2 y$$

adeoque ob

$$2b^2 x - cy^2 - 3x^2 y = 0$$

$$2b^2 x - \frac{b^4 c x^4 + 2a^4 b^2 c x^2 - a^8 c}{4x^6} - \frac{3}{2}b^2 x + \frac{3a^4}{2x} = 0$$

h.e. $\frac{1}{2}b^2 x - \frac{b^4 c x^4 + 2a^4 b^2 c x^2 - a^8 c}{4x^6} + \frac{3a^4}{2x} = 0$

$$2b^2 x^7 + 6a^4 x^5 - b^4 c x^4 + 2a^4 b^2 c x^2 - a^8 c = 0$$

$$x^7 + \frac{3a^4}{b^2} x^5 - \frac{1}{2}b^2 c x^4 + a^4 c x^2 - \frac{a^8 c}{2b^2} = 0$$

quæ est æquatio exprimens valorem ipsius x, seu abscissæ semiordinatæ maximæ respondentis.

PROBLEMA 14.

71. *Ex dato puncto* R *in axe* AX *curvæ algebraicæ ducere ad perimetrum curvæ rectam* MR, *quæ sit minima omnium ex eodem puncto* R *ducendarum.* Tab. I. Fig. 13.

RESOLUTIO.

Sit $AP = x$, $PM = y$, $AR = c$, erit $PR = c - x$ & ob $PM^2 + PR^2 = MR^2$ (§. 417. *Geom.*), $MR^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$. Concipiamus ergo curvam, cujus applicata sit MR (§. 62) erit

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2$$

$$-2cdx + 2xdx + 2ydy = 2zdz = 0$$

$$ydy + xdx - cdx = 0.$$

Quodsi ex æquatione ad curvam algebraicam data pro ydy substituatur valor ejus; valorem ipsius x eruere licet.

COROLLARIUM. 1.

72. In parabola (§. 21.)

$$\tfrac{1}{2}adx = ydy$$

Ergo $\tfrac{1}{2}adx + xdx - cdx = 0$

$$x = c - \tfrac{1}{2}a \;\&\; \tfrac{1}{2}a = c - x$$

Hinc $ax = ac - \tfrac{1}{2}aa = y^2$ & $[c-x]^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}aa + ac - \tfrac{1}{2}aa = ac - \tfrac{1}{4}aa = z^2$ Unde $MR = z = \sqrt{[ac - \tfrac{1}{4}aa]}$. Est adeo $MR^2 : PM^2 = ac - \tfrac{1}{4}aa : ac - \tfrac{1}{2}aa = c - \tfrac{1}{4}a : c - \tfrac{1}{2}a$.

Quia $PR = c - x = \tfrac{1}{2}a$, evidens est PR esse subnormalem (§. 36), consequenter MR normalem, unde patet

Theorema. Perpendicularis ad parabolam est minima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci potest.

COROLLARIUM. 2.

73. In hyperbola æquilatera [§. 505. *part. 1.*]

$$ax + xx = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$$\tfrac{1}{2}adx + xdx = ydy$$

Quare $\tfrac{1}{2}adx + xdx + xdx - cdx = 0$ (§. 71)

$$2x = c - \tfrac{1}{2}a$$

$$x = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{4}a$$

Sive $PR = c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$

Quoniam subnormalis reperitur $x + \tfrac{1}{2}a$ (§. 35.), $PR = c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$ est denuo subnormalis, consequenter &

Theorema. In hyperbola æquilatera normalis est brevissima omnium rectarum, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci possunt.

COROLLARIUM 3.

74. In ellipsi primi generis est [§. 420 *part. 1.*]

$$ay^2 = abx - bx^2$$

$$2aydy = abdx - 2bxdx$$

$$ydy = [abdx - 2bxdx] : 2a$$

Quare $\tfrac{1}{2}bdx - bxdx : a + xdx - cdx = 0$

$$\tfrac{1}{2}b - c - bx : a + x = 0$$

$$x - \frac{bx}{a} = c - \tfrac{1}{2}b$$

$$ax - bx = ac - \tfrac{1}{2}ab$$

$$x = [ac - \tfrac{1}{2}ab] : [a - b]$$

$$c - x = (\tfrac{1}{2}ab - bc) : (a - b).$$

Cum subnormalis reperiatur $\tfrac{1}{2}b - bx : a$ (§. 35), erit $PR = c - x = \tfrac{1}{2}b - (bc + \tfrac{1}{2}bb)$: ($\tfrac{1}{2}ab$

$(\frac{1}{2}ab - bc):(a-b)$, ut adeo PR denuo sit subnormalis, consequenter &

Theorema. In ellipsi normalis sit linea recta brevissima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci potest.

COROLLARIUM 4.

75. Eodem modo in hyperbola scalena reperitur $x = (ac - \frac{1}{2}ab) : (a + b)$.

COROLLARIUM 5.

76. Quoniam $ydy + xdx - cdx = 0$ (§ 71)

$$ydx = cdx - xdx$$

$$\frac{ydy}{dx} = c - x = PR$$

Est adeo PR subnormalis (§. 35), atque adeo patet generale

Theorema: In omni curva perpendicularis est linea recta bervissima, quæ ex dato puncto in axe ad eam duci potest.

PROBLEMA 15.

Tab. I. Fig. 14. 77. *A puncto* C *extra curvam algebraicam dato ducere rectam* C M, *quæ sit minima omnium ex eodem puncto* C *ad curvam ducendarum.*

RESOLUTIO.

Ob punctum C datum datur quoque perpendicularis ad axem CD, itemque AD. Sit $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$; erit $MH = AP - AD = x - p$ & $CH = CD - PM = q - y$, consequenter $MC^2 = CH^2 + HM^2 = q^2 - 2qy + yy + x^2 - 2px + pp$. Cum adeo MC^2 sit minimum quoddam; erit ejus differentiale nihilo æquale (§. 63.) hoc est, $-2qdy + 2ydy + 2xdx - 2pdx = 0$

seu $(y-q)dy + (x-p)dx = 0$.

Reliqua peragenda sunt ut in problemate præcedente (§. 71).

COROLLARIUM. 1.

78. Si curva AMO fuerit parabola primi generis; erit

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a$$

Unde $y - q + [x-p]\,2y : a = 0$

$$ay - aq + 2xy - 2py = 0$$

$$ay - aq + 2y^3 : a - 2py = 0$$

$$aay - aaq + 2y^3 - 2apy = 0$$

h. e. $y^3 + \frac{1}{2}a^2y - \frac{1}{2}aaq = 0$
$\quad - apy$

Quodsi hæc æquatio ope parabolæ datæ atque circuli construatur (§. 622. *part. I.*); una eademque opera determinantur & A P & PM, & punctum M. Nimirum (*vi* §. *cit.*) fieri debet $AL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$ & $IL = \frac{1}{4}q$, atque centro C per verticem parabolæ A describendus est circulus, qui eam in puncto desiderato M secabit. Erit autem $AL = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$; si ex A in G transferatur $\frac{1}{2}a$ & DG bifariam secetur in L. Nam $AD = p$, adeoque

$DG = \frac{1}{2}a - p$. Ergo $DL = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, consequenter $AL = \frac{1}{4}a - p + \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$. His factis $AP = x$, $PM = y$. Etenim ex natura parabolæ $AP = y^2 : a$, adeoque $LP = IR = y^2 : a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}p$, consequenter $IR^2 = y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2$. Porro $MR = y - \frac{1}{4}q$, adeoque $MR^2 = y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}p^2$. Habemus itaque (§. 417 *Geom.*) $MI^2 = IR^2 + MR^2 = y^4 : a^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$. Est vero $MI^2 = AI^2 = IL^2 + LA^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{16}q^2$. Quare

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}qy = 0$$
$$-\frac{py^2}{a}$$

$$y^4 + \frac{1}{2}a^2y^2 - \frac{1}{2}a^2qy = 0$$
$$-apy^2$$

$$y^3 + \frac{1}{2}a^2y - \frac{1}{2}a^2q = 0$$
$$-apy$$

quæ est æquatio ad construendum proposita.

COROLLARIUM 2.

79. Quoniam (§. 77)

$$(y-q)\,dy + (x-p)\,dx = 0$$

erit $$(x-p)\,dx = (q-y)\,dy$$

$$\frac{(x-p)y}{q-y} = \frac{ydy}{dx}$$

Jam porro (§. 268 *Geom.*)

$$CH : MH = CD : DR$$
$$q-y : x-p = q :$$

adeoque $DR = \frac{qx - pq}{q-y}$, consequenter ob $DP = x - p$, $PR = \frac{qx - pq}{q-y} - x + p = (qx - pq - qx + pq + xy - py) : (q-y) = (x-p)y : (q-y)$. Est adeo $DR = ydy : dx$ subnormalis (§. 35). Patet adeo denuo generale

Theorema. In omni curva AMO linea ad eam perpendicularis est brevissima omnium, quæ ex dato extra eam puncto C ad eam duci possunt.

SCHOLION.

80. *Ex allato exemplo liquet, si problema non fuerit planum, consultius esse ut in expressione generali valor potius ipsius* dx, *quam* dy *substituatur. Nec absimili modo in curvis algebraicis determinatur punctum intra earum ambitum datum, a quo ad earum perimetros ducantur rectæ minimæ: quemadmodum ex sequente problemate patet.*

PROBLEMA 16.

81. *A puncto* C *intra curvam algebraicam dato ducere rectam* C M, *quæ sit minima omnium ex eodem puncto* C *ad curvam ducendarum.* Tab. IV. Fig. 44.

Sit $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$, erit $HC = PD = p - x$ & $MH = y - q$, consequenter $MC^2 = MH^2 + HC^2$ (§. 417 *Geom.*) $= y^2 - 2qy + q^2 +$

$q^2 + p^2 - 2px + x^2$. Cum MC^2 sit minimum quoddam ex hypothesi; erit ejus differentiale nihilo æquale (§. 63), hoc est, $2ydy - 2qdy - 2pdx + 2xdx = 0$, seu $(y-q)\,dy - dx\,(p-x) = 0$. Reliqua peragenda sunt ut in problemate 14 (§. 71).

COROLLARIUM 1.

82. Quoniam $(y-q)\,dy = (p-x)\,dx$

erit $\frac{dy}{dx} = \frac{p-x}{y-q}$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{(p-x)y}{y-q}$$

$$= \frac{HC.PM}{MH}$$

Quare cum sit MH : HC = PM : PR (§. 268 *Geom.*); erit PR subnormalis (§. 35). Patet adeo denuo

Theorema. In omni curva AMO linea normalis est brevissima, quæ a dato intra eam puncto C ad eam duci potest.

COROLLARIUM. 2.

83. Linea itaque ad curvam normalis est brevissima omnium, quæ a dato quocunque in eodem plano puncto ad eam duci potest (§. 76. 79. 82).

PROBLEMA 17.

Tab. II. 84. *Lineam rectam* AB *ita secare in* D, *ut rectangulum ex* AD & DB *sit maximum eorum, quæ hac ratione construi possunt.* Fig. 15.

Sit AB=a, AD=x, erit DB=a−x, consequenter AD.DB = ax − xx maximum aliquod, atque hinc [§. 63] ejus differentiale nihilo æquale: concipitur nempe esse ad circulum, ad quem

$$ax - xx = yy$$

Quare $adx - 2xdx = 2ydy = 0$

$$a - 2x = 0$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Linea igitur AB est secanda in duas partes æquales, estque quadratum omnium rectangulorum maximum, quorum altitudines & bases junctim sumtæ inter se æquantur.

PROBLEMA 18.

85. *Lineam rectam* AB *ita secare in* D, *ut* $AD^m.DB^n$ *sit maximum factorum simili modo formatorum.*

Sit denuo AB=a, AD=x, erit DB=a−x, consequenter $AD^m.DB^n = x^m(a-x)^n$. Erit igitur x abscissa respondens semiordinatæ maximæ in infinitis circulis, ad quos $x^m(a-x)^n = y^{m+n}$ (§. 517. *part. 1.*) & hinc (§. 63)

 mx^m

$$mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$$

$$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$$

$$m(a-x) = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma:(m+n) = x$$

Sit e. gr. $m=2$, $n=1$, erit $x=\frac{2}{3}a$, hoc est, si recta $AD=\frac{1}{3}a$ & $BD=\frac{2}{3}a$, atque BD sumatur pro altitudine prismatis, AD pro latere quadrati, quod est basis ejusdem; erit prisma omnium maximum eorum, quæ ex divisione rectæ AB in duas partes formari possunt.

PROBLEMA 19.

Tab. II. Fig. 16. 86. *Super recta* AB *tanquam hypothenusa triangulum rectangulum maximum construere.*

Sit $AB=a$, $AC=x$, erit (§. 417 *Geom.*) $BC=\sqrt{(aa-xx)}$, area (§. 392. *Geom.*) $=\frac{1}{2}AC.\,CB=\frac{1}{2}x\sqrt{(aa-xx)}$. Habemus adeo æquationem ad curvam quarti generis

$$x\sqrt{(aa-xx)}=2y^2$$

seu $aaxx-x^4=4y^4$

Unde $2a^2x^2dx-4x^3dx=16y^3dy=0$

$$2a^2x^2=4x^3$$

$$-4x^2$$

$$\tfrac{1}{2}a^2=x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2}=x$$

Patet adeo triangulum maximum esse æquicrurum. Nam si $AB^2=aa$ & $AC^2=\frac{1}{2}aa$, erit etiam $CB^2=\frac{1}{2}aa$, consequenter $AC=CB$.

PROBLEMA 20.

87. *Inter omnes Conos æquales determinare eum, qui maximam habet superficiem.* Tab. II Fig. 17.

Sit soliditas conorum æqualium a^3, ratio radii ad peripheriam $r:p$, radius Coni $AC=x$; erit $r:p=x:\frac{px}{r}$. Hæc peripheria basis $px:r$ ducta in $\frac{1}{2}x$ dat basin Coni $px^2:2r$ (§. 429 *Geom.*): per quam si dividatur a^3, habetur $\frac{1}{3}DC=2a^3r:px^2$ (§. 548 *Geom.*). Unde $DC=6a^3r:px^2$ &

$$DC^2=36a^6r^2:p^2x^4$$
$$AC^2=\quad x^2$$

$$AD^2=x^2+36a^6r^2:p^2x^4 \text{ (§. 417 Geom.)}$$

$$AD=\sqrt{(p^2x^6+36a^6r^2)}:px^2$$

$\frac{1}{2}$peripheria Baf. $px:2r$

Superf. Coni $\sqrt{(p^2x^6+36a^6r^2)}:2rx$ (§. 548 *Geom.*)

Habemus itaque vi methodi de maximis & minimis (§. 63.)

$$(p^2x^6+36a^6r^2):4r^2x^2=y^2$$

h. e. $p^2x^4:4r^2+9a^6:x^2=y^2$

$$4p^2x^3dx:4r^2 - 18a^6xdx:x^4 = 2y\,dy = 0$$

$$p^2x^3dx:r^2 - 18a^6dx:x^3 = 0$$

$$p^2x^3:r^2 = 18a^6:x^3$$

$$p^2x^6 = 18a^6r^2$$

$$px^3 = 3a^3r\sqrt{2}$$

$$x^3 = 3a^3r\sqrt{2}:p$$

$$x = a\sqrt[3]{(3r\sqrt{2}:p)}$$

Quoniam $px^3 = 3a^3r\sqrt{2}:p$, erit $x^3:a^3 = 3r\sqrt{2}:1p$, consequenter evidens est.

Theorema. Cubus radii Coni inter æquales maximam superficiem habentis est ad ipsum Conum in ratione composita radii ad peripheriam & $3\sqrt{2}$ ad 1.

PROBLEMA 21.

88. *Sit* ADB *semicirculus & curva* AMD *ejus naturæ, ut sit* BP : PN = AP : PM; *determinare punctum* M, *in quo* MN *est maxima linea earum, quæ simili modo determinantur.*

Tab. IV. Fig. 45. Sit diameter semicirculi AB $= a$, AP $= x$; erit PB $= a-x$ & PN $= \sqrt{(ax-x^2)}$ (§. 327. 377 *Geom.*). Est vero *per hypoth.*

$$BP:PN = AP:PM$$

$$a-x:\sqrt{(ax-x^2)} = x:$$

adeoque $PM = \frac{x\sqrt{(ax-x^2)}}{a-x} = \frac{\sqrt{x^3}}{(\sqrt{a-x})}$, consequenter $NM = PN - PM = \sqrt{(ax-x^2)} - \sqrt{x^3}:\sqrt{(a-x)}$ & hinc $MN^2 = a^2x - 2ax^2 + 2x^3 - 2\sqrt{(a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)} = (\text{ob } \sqrt{a^2x^4 - 2ax^5 + x^6} = ax^2 - x^3), \frac{a^2x - 4ax^2 + 4x^3}{a-x}$. Quare cum NM^2 sit maximum aliquod erit (§. 63)

$$\frac{(a^2 - 8ax + 12x^2)(a-x)dx + (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)dx}{(a-x)^2} = 0$$

$$(a^2 - 8ax + 12x^2)(a-x) + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 = 0$$

h. e.
$$\begin{array}{l} a^3 - 8a^2x + 12ax^2 \\ \quad - a^2x + 8ax^2 - 12x^3 \\ \quad + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 \end{array} = 0$$

$$a^3 - 8a^2x + 16ax^2 - 8x^3 = 0 \qquad a-2x$$

$$a^2 - 6ax + 4x^2 = 0$$

$$4x^2 - 6ax = -a^2 \qquad 4$$

$$x^2 - \tfrac{3}{2}ax = -\tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{9}{16}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{5}{16}a^2$$

$$x^2 - \tfrac{3}{2}ax + \tfrac{9}{16}a^2 = \tfrac{5}{16}a^2$$

$$\frac{3}{4}a - x = \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$$

$$x = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$$

Dividatur radius CB bifariam in E, erit $CE = \frac{1}{4}a$, adeoque ob $CD = \frac{1}{2}a$ $DE = \sqrt{\frac{5}{16}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$. Fiat $EP = ED$: erit $PB = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$, consequenter $AP = AB - PB = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$.

PROBLEMA 22.

Tab. IV. Fig. 46. 89. *Determinare maximam applicatam QN in curva AMND ejus naturæ, ut ducta recta FM per punctum D, in quo recta AE lineam CB positione datam secat, sit eidem AE constanter æqualis.*

Sit $FM = AE = a$, $DE = b$, $EP = MG = x$, erit $DP = x - b$ & $FG = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Jam cum anguli ad P & G sint recti *per construct.* & $o = u$ (§. 156 *Geom.*) & ob parallelas DE & MG (§. 256 *Geom.*) $o = n$ (§. 233 *Geom.*), consequenter $u = n$ (§ 77 *Geom.*). Quare $\triangle FGM \backsim \triangle PDM$ & ideo (§. 267 *Geom.*)

$$MG : GF = DP : PM$$

$$x : \sqrt{(a^2 - x^2)} = x - b :$$

adeoque $PM = \frac{x - b}{x}\sqrt{(a^2 - x^2)} = 1 - \frac{b}{x}\sqrt{(a^2 - x^2)}$

Hinc $PM^2 = \left(1 - \frac{2b}{x} + \frac{b^2}{x^2}\right)(a^2 - x^2)$

$$= a^2 - \frac{2a^2 b}{x} + \frac{a^2 b^2}{x^2} - x^2 + (2bx - b^2$$

Habemus adeo (§. 63)

$$\frac{2a^2 b dx}{x^2} - \frac{2a^2 b^2 dx}{x^3} - 2x dx + 2b (dx = 0$$

$$\frac{a^2 b}{x^2} - \frac{a^2 b^2}{x^3} - x + b = 0 \qquad \cdot x^3$$

$$a^2 bx - a^2 b^2 - x^4 + bx^3 = 0 \qquad : x - b$$

$$a^2 b - x^3 = 0$$

$$x^3 = a^2 b$$

$$x = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Parametro a circa axem EB describatur parabola EIR (§. 400 *part. 1.*) fiatque (§. 222 *part. 1.*) $EO = \frac{1}{2}a$ & OK ad EB perpendicularis $= \frac{1}{2}b$. Ex centro K radio KE describatur circulus EIT secans parabolam in I, erit IL ad EB perpendicularis $(= EQ) = x$, adeoque QN perperpendicularis ad AE transiens per $I = x$.

Est enim $IS = IL - SL = x - \frac{1}{2}b$ &, cum $EL = x^2 : a$ (§. 391 *part. 1.*) $LO = SK = \frac{1}{2}a - x^2 : a$. Quare $SI^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$ & $SK^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2 + x^4 : a^2$, consequenter $EK^2 = IK^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - bx + x^4 : a^2$. Unde ob $EK^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$ habe-

habetur $x^4 : a^2 - bx = 0$, adeoque $x^3 - a^2 b = 0$.

PROBLEMA 23.

Tab. IV. Fig. 46. 90. *Determinare maximam applicatam* PM *curvæ* AME *ejus naturæ, ut diameter circuli* ANB *sit axi* AE *& rectæ per* A *ductæ* MN *in quolibet curvæ puncto* M *æqualis,*

Sit MN = AB = AE = a, AM = x, PM = y, erit AN = $a - x$. Jam cum AB & PM sint ad AE perpendiculares *per hypoth.* erunt eædem inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*). Quare cum porro angulus ad P rectus sit (§. 78 *Geom.*) & ANB, qui est in semicirculo, sit itidem rectus (§. 317 *Geom.*); erit $\triangle$ AMP $\sim$ $\triangle$ ANB (§. 267 *Geom.*) &

$$PM : AM = AN : AB$$
$$y : x = a - x : a$$

$$ay = ax - x^2$$

$$ady = adx - 2xdx = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$a = 2x$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Hinc porro $ay = x - \frac{x^2}{a}$

$$= \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}a$$
$$= \tfrac{1}{4}a$$

Est igitur in casu applicatæ maximæ AM = ML = $\frac{1}{2}a$: unde reperitur AP = $\frac{1}{4}\sqrt{3a^2}$ (§. 417. *Geom.*)

SECTIO II.

DE CALCULO INTEGRALI SEU SUMMATORIO.

CAPUT I.

DE NATURA CALCULI INTEGRALIS.

DEFINITIO 5.

91. *Calculus integralis* seu *Summatorius* est methodus quantitates differentiales summandi, hoc est, ex quantitate differentiali data inveniendi eam, ex cujus

cujus differentiatione resultat differentiale datum.

COROLLARIUM.

92. Integrationis itaque seu summationis rite peractæ indicium est, si quantitas inventa juxta regulas Cap. I. Sect. I. traditas differentiata eam producit, quæ ad summandum proponebatur.

SCHOLION.

93. *Quoniam Angli differentialia quantitatum fluxiones vocant* (§ 6); *Calculum, quem nos differentialem dicimus*, Methodum fluxionum; *quem vero integralem vocamus & qui a differentiis ad summas, seu, ut cum Anglis loquar, a fluxionibus ad quantitates fluentes* (*ita nimirum variabiles dicunt*) *ascendit*, Methodum fluxionum inversam *appellant.*

HYPOTHESIS.

94. *Signum summæ aut quantitatis integralis sit* ∫, *ita ut* ∫ y d x *denotet summam seu integrale differentialis* y d x.

PROBLEMA 24.

95. *Quantitatem differentialem integrare seu summare.*

RESOLUTIO.

Ex superioribus manifestum est, quod sit

I. $\int dx = x$ (§. 8).

II. $\int (dx \mp dy) = x \mp y$ (§. 11).

III. $\int (xdy + ydx) = xy$ (§. 12).

IV. $\int mx^{m-1}dx = x^m$ (§. 13).

V. $\int (n:m)\, x^{(n-m):m}\, dx = x^{n:m}$ (§. 17).

VI. $\int (ydx - xdy) : y^2 = x : y$ (§. 19).

Ex his casus quartus & quintus frequentius occurrunt, in quibus quantitas differentialis summatur, si exponenti variabilis unitas additur, & ea, quæ prodit, dividitur per novum exponentem ductum in differentiale radicis e. gr. in casu quarto per $(m-1+1)dx$, hoc est, per mdx.

Quodsi quantitas differentialis ad summandum proposita nulli illarum formularum similis; aut reducenda est ad summabilem finitam, aut ad seriem infinitam, cujus singuli termini summari possunt, vel etiam ad quadraturas & rectificationes Curvarum simpliciorum, quæ quadrari vel rectificari nondum possunt, veluti ad Quadraturam Circuli, vel rectificationem arcus circuli: quas reductiones exemplis potius, quam regulis docemus, ne calculi tyronibus nauseam moveamus.

Et quia eadem differentialia prodeunt, si variabilibus constantes quantitates adjiciantur, quam si eadem abfuerint (§. 10); itaque fieri

fieri poteſt, ut $\int dx$ ſit $x + a$ vel $x - a$, $\int(xdy + ydx) = xy \mp a^2$, vel $xy \mp ab$, & ita porro. Sed quid de quantitate adjicienda tenendum ſit, docebitur paulo poſt.

SCHOLION.

96. *Quemadmodum in analyſi finitorum qualibet quantitas ad quemcunque dignitatis gradum evehi, ſed non vice verſa ex qualibet radix extrahi poteſt deſiderata; ita ſimiliter in analyſi infiniteſimali quantitas qualibet variabilis aut ex variabilibus & conſtantibus quomodocunque compoſita haud difficulter differentiatur, ſed non vice verſa quodlibet differentiale integrari poteſt. Quemadmodum autem porro in analyſi finitorum non ex omnibus æquationibus radices extrahendi methodus hactenus inventa, neque enim ætas noſtra tranſcendit limites ultra ſeculum & quod excurrit Algebræ jam aſſignatos: ita ſimiliter in analyſi infinitorum calculus integralis ſuam perfectionem nondum eſt aſſecutus. Sicuti autem in analyſi finitorum ad methodos extrahendi radicem per approximationem recurrimus, ubi perfectam extrahere non datur; ita ſimiliter in analyſi infinitorum ad ſeries infinitas confugimus, ubi perfectam ſummationem dare non valemus.*

CAPUT II.

DE USU CALCULI INTEGRALIS IN QUADRATURIS CURVARUM.

DEFINITIO 6.

Tab. I. Fig. 2. 97. *Differentiale ſeu elementum areæ dicitur rectangulum* PMRP *ex ſemiordinata* PM *in differentiale abſciſſæ* P*p*.

COROLLARIUM 1.

98. Si ergo ſemiordinata PM $= y$, abſciſſa AP $= x$; erit Pp $=$ MR $= dx$, conſequenter Elementum areæ PM.MR $= ydx$.

COROLLARIUM 2.

99. Quoniam mR $= dy$ & MR $= dx$; erit $\triangle$MR$m = \frac{1}{2}dxdy$ (§. 392 *Geom.*). Sed $\frac{1}{2}dxdy$ eſt ipſius ydx infiniteſima (§. 12.), conſequenter trapezium PMmp æquale eſt rectangulo PMRp in præſente nimirum caſu, ubi pm ipſi PM infinite propinqua intelligitur (§. 4.). Quare cum area AMP in infinita iſtiusmodi trapezia reſolvi poſſit; erit ea $\int ydx$ (§. 91. 94.).

COROLLARIUM 3.

100. Quodſi itaque ex æquatione ad curvam datam ſubſtituatur valor ipſius y, & ydx integrabile evadat; integratione peracta

peracta habetur quadratura curvæ. Curvam igitur quadrare idem est ac summare ydx.

PROBLEMA 25.

101. *Invenire aream trianguli.*

Tab. II. Fig. 18. Sit $CP=x$, $MN=y$, $CD=a$, $AB=b$; erit ob MN ipsi AB parallelam, (§. 268. 396. *Geom.*)

$$CP:MN=CD:AB$$
$$x : y = a : b$$

$$y = bx:a$$

Ergo elementum $MNmn=ydx$ (§. 98) $=bxdx:a$. Unde habetur $\int ydx=bx^2:2a$ (§. *cit.*): quæ est area indefinita CMN. Quodsi pro CP seu x substituatur CD seu a; prodibit area totius trianguli $ACB = ba^2:2a=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}AB.CD$, prorsus ut in Elementis Geometriæ (§. 392) demonstratum.

SCHOLION.

102. *Hoc exemplum ideo attulimus, ut tyrones, quibus principia calculi summatorii sub initium duriora videntur, intelligant, per eum non alia reperiri, nisi quæ demonstrationibus rigidis firmantur; tum ut methodi applicationem in exemplo obvio facilius perspiciant.*

PROBLEMA 26.

103. *Parabolam quadrare.*

Pro parabola Apolloniana (§. 388. *part. 1.*)

$$ax=y^2$$

$$a^{1:2}x^{1:2}=y$$

$$ydx=a^{1:2}x^{1:2}dx$$

$\int ydx=\frac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}=\frac{2}{3}xy$, substituto valore ipsius $a^{1:2}x^{1:2}$.

COROLLARIUM.

104. Est ergo spatium parabolicum ad rectangulum ex semiordinata in abscissam ut $\frac{2}{3}xy$ ad xy, hoc est, ut 2 ad 3 (§. 124. *part. 1.*).

PROBLEMA 27.

105. *Infinitas parabolas quadrare.*

Pro infinitis parabolis & curvis agnatis (§. 519 *part. 1*)

$$a^n x^m = y^r$$

$$a^{n:r}x^{m:r}=y$$

$$ydx=a^{n:r}x^{m:r}dx$$

$$\int ydx = \frac{r}{m+r}a^{n:r}x^{m:r+1} = \frac{r}{m+r}xy$$

ob $a^{n:r}x^{m:r}=y$.

COROLLARIUM.

106. Spatium parabolicum aut paraboloidicum quodcunque est ad rectangulum ex semiordinata in abscissam, ut $rxy:(m+r)$ ad xy, hoc est, ut r ad $m+r$ (§. 124 *part. 1.*).

Pro-

PROBLEMA 28.

Tab. II. Fig. 19.

107. *Quadrare segmentum spatii parabolici PMNQ inter duas semiordinatas PM & QN interceptum.*

I. Quoniam AP constans est & origo abscissæ indeterminatæ in P: sit $AP=b$, $PQ=x$, $QN=y$, $AQ=b+x$. Sit porro parameter $=a$, erit (§. 388 *part. 1.*)

$$ab+ax=y^2$$

$$\surd(ab+ax)=y$$

$$ydx=dx\surd(ab+ax)$$

Ut hoc elementum integrabile reddatur; fiat

$$\surd(ab+ax)=v$$

erit $ab+ax=v^2$

$$adx=2vdv$$

$$dx=2vdv:a$$

$$ydx=2v^2dv:a$$

$$\int ydx=\tfrac{2}{3}v^3:a=\tfrac{2}{3}(ab+ax)\surd(ab+ax):a=\tfrac{2}{3}(b+x)\surd(ab+ax).$$

Quoniam in P $x=0$, & spatium quoque QNMP evanescit; si in integrali inventa ponatur $x=0$, quod relinquitur $\tfrac{2}{3}b\surd ab$, ostendit quid ei adjiciendum vel demendum, ut spatium QNMP nihilum evadat in P, consequenter ut integrale fiat quadratura ipsius QNMP. Habemus nempe in nostro casu subtrahendum $\tfrac{2}{3}b\surd ab$: unde ipsius QNMP area $=\tfrac{2}{3}(b+x)\surd(ab+ax)-\tfrac{2}{3}b\surd ab$.

II. Sit AQ constans, & $=b$, origo ipsius x in Q, erit $QP=x$, $PM=y$, $AP=b-x$ & (§. 351)

$$ab-ax=y^2$$

$$\surd(ab-ax)=y$$

$$ydx=dx\surd(ab-ax)$$

Fiat ut ante $ab-ax=v^2$

erit $-adx=2vdv$

$$dx=-2vdv:a$$

$$ydx=-2v^2dv:a$$

$$\int ydx=-\tfrac{2}{3}v^3:a=-\tfrac{2}{3}(b-x)\surd(ab-ax)$$

Ut intelligatur, quid integrali sit adjiciendum, quo spatii PMNQ mensuram constituat; ponatur ut ante $x=0$, relinquetur $-\tfrac{2}{3}b\surd ab$. Unde manifestum est, si illi adjiciatur $+\tfrac{2}{3}b\surd ab$, haberi spatium $PMNQ=\tfrac{2}{3}\surd ab-\tfrac{2}{3}(b-x)\surd(ab-ax)$

SCHOLION.

108. *Spatium* PMNQ, *esse in casu priore* $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, *in posteriore* $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}-\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$ *etiam ex problemate 26.* (§. 103) *manifestum est. Nimirum* PMNQ = ANQ − AMP. *Sed in casu priore* $AMQ=\frac{2}{3}AQ.QN=\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$, & $AMP=\frac{2}{3}AP.PM=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *Unde* $PMNQ=\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *In posteriore* $ANQ=\frac{2}{3}AQ.QN=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ & $AMP=\frac{2}{3}AP.PM=\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$. *Unde* $QNMP=\frac{2}{3}b\sqrt{ab}-\frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

COROLLARIUM.

109. Quodsi adeo curva non supponatur descripta, sed tantum æquatio ad eam detur, ut adeo non constet, ubi origo ipsius x sit statuenda; evidens est, ex resolutione problematis præsentis, quod in integrali poni debeat $x=0$ & deleris iis, quæ per x multiplicantur, residuum, si quod fuerit, sub signo contrario ipsi sit adjiciendum, ut habeatur quadratura quæsita.

PROBLEMA 29.

110. *Quadrare curvam, ad quam* $xy^3=a^4$. Quoniam

$$y=a^{4:3}x^{-1:3}$$

erit $ydx=a^{4:3}x^{-1:3}dx$

$$\int ydx=\frac{3}{2}a^{4:3}x^{2:3}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^4x^2}=\frac{3}{2}a\sqrt[3]{ax^2}.$$

PROBLEMA 30.

111. *Quadrare curvam* Cartesii (d), *ad quam* $b^2:x^2=b-x:y$.

Quoniam $b^2y=bx^2-x^3$

erit $y=(bx^2-x^3):b^2$

$$ydx=(bx^2dx-x^3dx):b^2$$

$$\int ydx=x^3:3b-x^4:4b^2$$

PROBLEMA 30.

112. *Quadrare curvam, ad quam* $x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^5=a^4y$.

Quoniam $y=x^5:a^4+x^4:a^3+x^3:a^2+x^2:a+a$

erit $ydx=\left(\frac{x^5}{a^4}+\frac{x^4}{a^3}+\frac{x^3}{a^2}+\frac{x^2}{a}+a\right)dx$

$$\int ydy=\frac{x^6}{6a^4}+\frac{x^5}{5a^3}+\frac{x^4}{4a^2}+\frac{x^3}{3a}+ax$$

PROBLEMA 31.

113. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2=x^4+a^2x^2$.

Quoniam $y=x\sqrt{(x^2+a^2)}$

erit $ydx=xdx\sqrt{(x^2+a^2)}$

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(x^2+a^2)}=v$$

erit

(d) Epist. Tom. 3. p. 289.

erit $x^2 + a^2 = v^2$

$2xdx = 2vdv$

$xdx = vdv$

$xdx\surd(a^2 + x^2) = v^2 dv$

$\int ydx = \frac{1}{3}v^3 = \frac{1}{3}(x^2 + a^2)\surd(x^2 + a^2)$. Ponatur $x=0$, erit residuum $\frac{1}{3}a^2\surd a^2$ sive $\frac{1}{3}a^3$. Ergo quadratura curvæ $\frac{1}{3}(x^2+a^2)\surd(x^2+a^2) - \frac{1}{3}a^3$ (§ 109).

PROBLEMA 32.

114. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^3 + ax^2$.

Quoniam $y = x\surd(x+a)$

erit $ydx = xdx\surd(x+a)$

Ut elementum integrabile evadat, fiat

$\surd(x+a) = v$

erit $x+a=v^2$ & $x=v^2-a$

$dx = 2vdv$

$ydx = 2v^4dv - 2av^2dv$

$\int ydx = \frac{2}{5}v^5 - \frac{2}{3}av^3 = \frac{2}{5}(x+a)^2\surd(x+a) - \frac{2}{3}a(x+a)\surd(x+a) = \frac{6}{15}[(x^2 + 2ax + aa) - \frac{10}{15}(ax+aa)](\surd x+a) = (6x^2+2ax-4aa)\surd(x+a):15$. Ponatur $x=0$; relinquetur $-\frac{4}{15}aa\surd a$. Area igitur curvæ $\frac{1}{15}\surd(x+a)(6x^2 + 2ax - 4aa) + \frac{4}{15}aa\surd a$ (§. 109).

PROBLEMA 15.

115. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^2 : (x+a)$.

Quoniam $y = x : \surd(x+a)$

erit $ydx = xdx : \surd(x+a)$

Ponatur $\surd(x+a) = v$

erit $x + a = v^2$

$x = v^2 - a$

$dx = 2vdv$

$xdx : \surd(x+a) = (2v^3dv - 2avdv) : v = 2v^2dv - 2adv$

$\int ydx = \frac{2}{3}v^3 - 2av = \frac{2}{3}(x+a)\surd(x+a) - 2a\surd(x+a) = (2x+2a-6a)\frac{1}{3}\surd(x+a) = (2x-4a)\frac{1}{3}\surd(x+a) = \frac{2}{3}\surd(x^3 - 3ax^2 + 4a^3)$. Reductio ad mere surdam necessaria, ut appareat, si fiat $x=0$, quinam termini nullescant, propterea quod $x-2a$ signis afficitur diversis.

Ponatur $x=0$; relinquetur $\frac{2}{3}\surd 4a^3 = \frac{4}{3}a\surd a$. Area igitur curvæ $= \frac{2}{3}\surd(x^3 - 3ax^2 + 4a^3) - \frac{4}{3}a\surd a$ (§. 109) $= \frac{2}{3}(x-2a)\surd(x+a) - \frac{4}{3}a\surd a$.

PROBLEMA 34.

116. *Quadrare omnes curvas, quae comprehenduntur sub aequatione generali* $y = \sqrt[m]{(x+a)}$.

Quoniam $y = (x+a)^{1:m}$

erit $ydx = dx\,(x+a)^{1:m}$

Ut elementum integrabile fiat, ponatur

$$(x+a)^{1:m} = v$$

erit $x + a = v^m$

$$dx = mv^{m-1}dv$$

$$ydx = mv^m dv$$

$\int ydx = \frac{mv^{m+1}}{m+1} = \frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)}$. Fiat $x=0$: erit residuum $\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$. Unde area curvae $\frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)} - \frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$ (§.109).

PROBLEMA 35.

117. *Quadrare omnes curvas, quae definiuntur hac aequatione generali* $y = ax^m : \sqrt{(b+cx^{m+1})}$.

Elementum harum curvarum $ydx = ax^m dx : \sqrt{(b+cx^{m+1})}$. Ut integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(b+cx^{m+1})} = v$$

erit $b+cx^{m+1} = v^2$

$$(m+1)\,cx^m dx = 2vdv$$

$$x^m dx = 2vdv : c(m+1)$$

$$ydx = 2adv : (m+1)c$$

$\int ydx = 2av : (m+1)c = 2a\sqrt{(b+cx^{m+1})} : (m+1)c$.

Fiat $x=0$, relinquetur $2a\sqrt{b} : (m+1)c$

Est igitur area $\frac{2a\sqrt{(b+cx^{m+1})} - 2a\sqrt{b}}{(m+1)c}$.)

PROBLEMA 36.

118. *Quadrare innumeras hyperbolas intra asymptotos.*

Pro infinitis hyperbolis intra asymptotos $a^{m+n} = y^m x^n$.

Fiat $a = 1$

erit $1 = y^m x^n$

$$x^{-n} = y^m$$

$$x^{-n:m} = y$$

$$ydx = x^{-n:m}dx$$

$\int ydx$

$$\int y dx = \frac{m}{m-n} x^{-n:m+1} = \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^{m-n}} = \frac{m}{m-n} \sqrt{x^m y^n} = \frac{m}{m-n} xy.$$

Tab. I Fig. 4. Si $m > n$; ſpatii interminati RMPS quadratura ſemper habetur: ſi $m < n$, ob valorem negativum reperitur quadratura ſpatii IMPK: ſi vero $m = n$, ſpatium neutrum quadratur. Sit enim $xy^2 = a^3$; erit $m = 2$, $n = 1$, adeoque RMPS $= 2xy$. Si $xy^4 = a^5$; erit $m = 4$ $n = 1$, adeoque RMPS $= \frac{4}{3}xy$. Si $x^2 y = a^3$; theorema dat $a^3 : x = -xy$ ſeu xy pro ſpatio interminato IMPK. Si $x^4 y = a^5$; habetur $m = 1$, $n = 4$ adeoque $-\frac{1}{3}xy$, hoc eſt $\frac{1}{3}xy =$ IMPK. Sed ſi $xy = a^2$; erit $m = 1$, $n = 1$, adeoque $m : (m-n) = \frac{1}{0}$: eſt adeo numerator reſpectu denominatoris infinitus.

SCHOLION.

119. Johannes Wallisius (e) *ſpatium* SAPMR *eo in caſu, ubi valor negativus, vocavit* plusquam infinitum: *oſtendit vero celeberrimus* Varignonius (f), *virum ceteroquin magno ſuo merito celeborem aliquid humani paſſum eſſe, conſentiente ſummo* Leibnitio (g).

PROBLEMA 37.

120. *Hyperbolam Apollonianam intra aſymptotos quadrare.*

Quoniam ad hyperbolam intra aſymptotos (§. 490 *part. 1.*) $a^2 = b$ $y + xy$, ſeu, ſi fiat $a = b = 1$ (quod ponere licet, cum quantitatis b determinatio ſit arbitraria, *vi* §. *cit.*)

$$1 = y + xy$$

erit $1 : (1 + x) = y$

hoc eſt, diviſione actu facta, (§. 45. *part. 1.*)

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \text{ \&c.}$$

$$y dx = dx - x dx + x^2 dx - x^3 dx + x^4 dx - x^5 dx + x^6 dx \text{ \&c. in infinit.}$$

$$\int y dx = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x \quad \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7 \text{ \&c. in infinit.}$$

SCHOLION.

121. *Hanc quadraturam hyperbolæ primus dedit ſerierum infinitarum inventor* Nicolaus Mercator (h). *Cum autem ſeriem quæſiviſſet per diviſionem; celeberrimi Geometræ* Leibnitius *atque* Nevvtonus (i) *methodum hanc ſerierum infinitarum promoverunt, hic quidem eas eliciens per radicum extractiones, ille autem ex ſerie quadam præſuppoſita. Utrius-*

(e) In Arithmet. infinit. Schol. prop. 101. fol. 407. & Prop. 104. fol. 409.
(f) Memoires de l'Academiæ Royale des Sciences A. 1706. p. m. 15.
(g) In Actis Eruditorum A. 1712. p. 167. & ſeqq.
(h) in Logarithmotechnia Prop. 17. p. 31. & ſeqq.
(i) Vid. Epiſtolæ ipſorum apud *Walliſium* Vol. III. Operum Mathemat.

Utriusque exempla in sequentibus occurrunt.

PROBLEMA 38.

122. *Quadrare curvam, in qua* $x^2y+y=1$.

Quoniam $x^2y+y=1$

$$y=\frac{1}{x^2+1}$$

vel $$y=\frac{1}{1+x^2}$$

$$ydx=dx:(x^2+1)$$

vel $$=dx:(1+x^2)$$

Resolvatur $1:(x^2+1)$ per divisionem in seriem infinitam (§. 45. *part. 1.*), reperietur

$$y=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^8}\ \&c.$$

$$=x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}\ \&c.$$

Quare $ydx=x^{-2}dx-x^{-4}dx+x^{-6}dx-x^{-8}dx$ &c,

adeoque $\int ydx=x^{-1}+\frac{1}{3}x^{-3}-\frac{1}{5}x^{-5}+\frac{1}{7}x^{-7}$ &c. $=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}$ &c.

Resolvatur similiter $1:(1+x^2)$ in seriem (§. *cit.*), reperietur

$$y=1-x^2+x^4-x^6+x^8\ \&c.$$

adeoque $ydx=dx-x^2dx+x^4dx-x^6dx+x^8dx$ &c.

Quare $\int ydx=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9$ &c.

Quoniam series exprimit aream, quia convergit, hoc est, termini continuo fiunt minores, ut in casu singulari tandem deveniatur ad particulam inassignabilem, etiamsi terminorum numerus sit finitus, series autem prior citius convergit posteriore; ideo utendum est serie prima, si x fuerit satis magna, secunda vero, si satis parva.

PROBLEMA 39.

123. *Quadrare hyperbolam* AMP. Tab. I. Fig. 2.

Quoniam in hyperbola $ay^2=abx+bx^2$ (§. 499 *part. 1.*); $y=\sqrt{(ax+x^2)}\sqrt{a}:\sqrt{b}$, adeoque $ydx=dx\sqrt{(ax+x^2)}\sqrt{a}:\sqrt{b}$, consequenter $\int ydx=\sqrt{(a:b)}\int dx\sqrt{(ax+x^2)}$. Quoniam $\int dx\sqrt{(ax+x^2)}$ est area hyperbolæ æquilateræ (§. 507 *part. 1*) hac data datur etiam area hyperbolæ scalenæ. Quare ut elementum areæ hyperbolæ æquilateræ integrabile reddatur, solvatur $\sqrt{(ax+x^2)}$ in seriem infinitam (§. 98 *part. 1*), erit in theoremate generali

$$m=1,\ n=2,\ P=ax,$$

$$Q=x:a=a^{-1}x$$

$$P^{m:n}=a^{1:2}x^{1:2}=A$$

$$\frac{m}{n}AQ=\tfrac{1}{2}a^{1:2}x^{1:2}.-a^{-1}x=\tfrac{1}{2}a^{1:2}$$

$$x^{3:2}=B$$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4}.\frac{1}{2}a^{-1:2}x^{-3:2}a^{-1}x = -\frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6}. - \frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2}.a^{-1}x = +\frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8}. + \frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2}.a^{-1}x = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2} = E$

$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10}. - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}.a^{-1}x = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}a^{-9:2}x^{11:2}$

&c.

Est itaque $y = a^{1:2}x^{1:2} + \frac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2} - \frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2} + \frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}$ &c. in infinit.

Quare $y\,dx = a^{1:2}x^{1:2}dx + \frac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2}dx - \frac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2}dx + \frac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2}dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}dx$ &c. in infinit.

adeoque $\int y\,dx = \frac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2} + \frac{1}{5}a^{-1:2}x^{5:2} - \frac{1}{4.7}a^{-3:2}x^{7:2} + \frac{1.3}{4.6.9}a^{-5:2}x^{9:2} - \frac{1.3.5}{4.6.8.11}a^{-7:2}x^{11:2} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13}a^{-9:2}x^{13:2}$ &c.

Quoniam $a^{1:2}x^{1:2} = \sqrt{ax}$ erit $\int y\,dx = \sqrt{ax}\,(\frac{2}{3}x + \frac{x^2}{5a} - \frac{x^3}{4.7a^2} + \frac{1.3x^4}{4.6.9a^3} - \frac{1.3.5x^5}{4.6.8.11a^4} + \frac{1.3.5.7x^6}{4.6.8.10.13a^5}$ &c. in infin.)

PROBLEMA 40.

124. *Circulum quadrare.*

Sit AB = 1, AP = x, PM = y; erit (§. *377. part. 1.*)

$$y = \sqrt{(x-xx)}$$

$$y\,dx = dx\sqrt{(x-xx)} = dx(x-xx)^{1:2}$$ Tab. I. Fig. 2.

Ut elementum integrabile reddatur, ex x−xx extrahatur radix per theorema generale (§. *98 part. 1*), in quo erit

$m = 1, n = 2, P = x, Q = -xx : x = -x$

$P^{m:n} = x^{1:2} = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2}x^{1:2}. - x = -\frac{1}{2}x^{3:2} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4}. - \frac{1}{2}x^{3:2}. - x = -\frac{1}{2.4}x^{5:2} = C$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}. - \frac{1}{2.4}x^{5:2}. - x = - \frac{1.3}{2.4.6}x^{7:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}. - \frac{1.3}{2.4.6}x^{7:2}. - x = - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\tfrac{7}{10}. - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2}. - x = - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{11:2}$$ &c. in infin.

Habemus adeo $ydx = x^{1:2}dx - \frac{1}{2}x^{3:2}dx - \frac{1}{2.4}x^{5:2}dx - \frac{1.3}{2.4.6}x^{7:2}dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2}dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{11:2}dx$ &c. in infin.

Hinc $\int ydx = \frac{2}{3}x^{3:2} - \frac{1}{5}x^{5:2} - \frac{1}{4.7}x^{7:2} - \frac{1.3}{4.6.9}x^{9:2} - \frac{1.3.5}{4.6.8.11}x^{11:2}$ &c. in infin. $= \sqrt{x}\,(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{4.7}x^3 - \frac{1.3}{4.6.9}x^4 - \frac{1.3.5}{4.6.8.11}x^5 - \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13}x^7$ &c. in infinit.) $= \sqrt{x}\,(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5 - \frac{1}{1664}x^7$ &c. in infin.)

Hæc nempe series exhibet quadraturam indeterminatam segmenti AMP.

Aliter.

Quoniam si radius circuli $= 1$, CP $= x$, PM $= y$ (§. 377. *part.* 1.) $y = \sqrt{(1-x^2)}$ & $\sqrt{(1-x^2)} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10}$ &c. in infinit. erit (§. 98 *part.* 1.) Tab. I. Fig. 3.

$ydx = dx - \frac{1}{2}x^2dx - \frac{1}{8}x^4dx - \frac{1}{16}x^6dx - \frac{5}{128}x^8dx - \frac{7}{256}x^{10}dx -$ & in infinit.

$\int ydx = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 - \frac{7}{2816}x^{11}$ &c. in infinit.

Quando x radio CA æqualis evadit, spatium DCPM degenerat in quadrantem. Substituta itaque 1 pro x; erit quadrans $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$ &c. in infinit. quæ eadem series integram circuli aream metitur, si diameter fuerit 1.

Quodsi progressum in infinitum perspicere lubet, multiplicatio ut ante tantummodo indicanda, dum $\sqrt{(1-x^2)}$ in seriem resolvitur.

Ita nimirum prodibit $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2.4}x^4 - \frac{1.3}{2.4.6}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}$ &c. in infinit.

$ydx = dx - \frac{1}{2}x^2dx - \frac{1}{2.4}x^4dx - \frac{1.3}{2.4.6}x^6dx$

$x^6dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}dx$ &c.

$\int ydx = x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{2.4.5}x^5 - \frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.11}x^{11}$ &c. in infin.

Dicatur terminus primus A, secundus B, tertius C, quartus D, quintus E &c. erit

$A = x$

$B = -\frac{1}{2.3}x^3 = -\frac{1.1}{2.3}Ax^2$

$C = -\frac{1}{2.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{2.3.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{4.5}Bx^2$

$D = -\frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 = -\frac{1.3.5.3}{2.3.4.5.6.7}x^7 = -\frac{3.5}{6.7}Cx^2$

$E = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 = \frac{1.3.5.3.5.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^9 = -\frac{5.7}{8.9}Dx^2$

Aliter.

Tab. II. Fig. 20. Sit tangens arcus dimidii $GB = x$, radius $BC = 1$; erit tangens integri seu dupli $KB = 2x:(1-xx)$ (§. 327. *part. 1.*) & (§. 269 *Geom.*)

$BG : BC = KG : KC$

$x : 1 = \frac{x+x^3}{1-xx} : \frac{1+x^2}{1-x^2}$

Est enim $KG = 2x:(1-xx) - x = (2x-x+x^3):(1-xx) = (x+x^3):(1-xx)$

Porro (§. 268 *Geom.*)

$KC : KB = MC : PM$

$\frac{1+x^2}{1-x^2} : \frac{2x}{1-x^2} = 1 : \frac{2x}{1+x^2}$

$KC : BC = MC : PC$

$\frac{1+x^2}{1-x^2} : 1 = 1 : \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Unde $PB = 1-(1+x^2):(1+x^2) = (1+x^2-1+x^2):(1+x^2) = 2x^2:(1+x^2)$. Hinc differentiando eruitur $Pp = MR = (4xdx + 4x^3dx - 4x^3dx):(1+x^2)^2 = 4xdx:(1+x^2)^2$ & $mR = (2dx+2x^2dx-4x^2dx):(1+x^2)^2 = (2dx-2x^2dx):(1+x^2)^2$. Ob $MR^2 + mR^2 = Mm^2$ (§ 417 *Geom.*) habetur $Mm^2 = 16x^2dx^2:(1+x^2)^4 + (4dx^2 - 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2):(1+x^2)^4 = (4dx^2 + 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2):(1+x^2)^4$ & $Mm = (2dx+2x^2dx):(1+x^2)^2 = 2dx:(1+x^2)$. Denique $Mm.\frac{1}{2}MC = dx:(1+x^2)$. Ut sector hic infinite parvus MCm seu elementum sectoris BCM, cujus dimidii tangens x, summetur; resolvi debet $1:(1+x)$ in seriem (§. 45. *part. 1.*): quo facto re-

 peri-

peritur $dx:(1+x^2)=dx-x^2dx+x^4dx-x^6dx+x^8dx-x^{10}dx$ &c. adeoque $\int dx:(1+x^2)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{11}x^{11}$ &c. quæ series exprimit sectorem BCM, ita ut arcus dimidii tangens GB $=x$.

Quando arcus integer BM in quadrantem degenerat; tangens dimidii BG fit radio æqualis (§. 32. *Trig.*). Si ergo pro x substituatur 1, series $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ &c. in infinit. quadrantem circuli exprimit. Immo totam aream emetitur, si 1 denotet diametrum circuli.

Brevius.

Tab. II. Fig. 20. Sit tangens KB $=x$, BC $=1$ & secans CA alteri CK infinite propinqua ductusque arculus KL radio CK; erit AK $=dx$, KC $=\sqrt{(1+x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Jam cum anguli ad B & L sint recti (§. 78) & ob angulum infinite parvum KCL angulus BKC = KAC (§. 239 *Geom.* & §. 3. *Analys. infinit.*); erit (§. 267 *Geom.*)

$$KC : BC = KA : KL$$
$$\sqrt{(1+x^2)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Porro (§. 137. 412 *Geom.*)

$$CK : KL = CM : mM$$
$$\sqrt{(1+x^2)} : dx = 1 : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} \quad \frac{dx}{1+x^2}$$

Sector igitur CM$m=\frac{1}{2}dx:(1+x^2)=\frac{1}{2}(dx-x^2dx+x^4dx-x^6dx+x^8dx-x^{10}dx$ &c). Unde per summationem eruitur sector BCM, cujus tangens KB $=x$, $\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{14}x^7+\frac{1}{18}x^9-\frac{1}{22}x^{11}$ &c. in infinit. adeoque si BM octans circuli seu arcus 45°, sector erit (§. 32. *Trigonom.*) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{18}-\frac{1}{22}$ &c. infinit. Hujus adeo seriei duplum $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ &c. in infinitum est quadrans circuli, immo integra area si diameter $=1$.

SCHOLION.

125 *Seriem primam invenit* Nevvtonus, *alteram* Jacobus Gregorius, *& in eandem incidit* Leibnitius *ignorans dubio procul prodituram seriem* Gregorianam, *cum ex tangente quæreret aream. Neque enim putandum est, quod inventum seriei, quam a* Gregorio *repertam non ignorabat, etsi publice non constaret, sibi attribuerit absque ulla ratione vir probati alias candoris. Sed nullum est dubium quin ingeniosissimus* Leibnitius *methodo ab iis diversa, quas ego proposui, ad suam pervenerit. Cum enim methodum priorem, in quam incideram ante annos complures, amico percontanti, unde constet, (quod* Leibnitius *in actis Eruditorum asseruerat)* $\int dx:(1+x^2)$ *dependere a quadratura circuli & quomodo inde eruatur series* Leibnitiana *pro circulo* $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ &c. *responsurus, judicio* Leibnitii *submisissem, eam quidem non*

im-

improbavit, monuit tamen, totum negotium brevius absolvi posse: unde etiam factum est, ut postea de breviori cogitarem.

PROBLEMA 41.

Tab. I. Fig. 10. 126. *Ellipsin Apollonianam quadrare.*

Sit $AC=a$, $GC=c$, $PC=x$; erit (§. 432 *part. 1.*)

$$y^2=c^2(a^2-x^2):a^2$$

$$y=c\sqrt{(a^2-x^2)}:a$$

Est vero $\sqrt{(a^2-x^2)}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}-\frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infinit. (§. 81. *part. 1.*). Ergo $ydx=cdx-\frac{cx^2dx}{2a^2}-\frac{cx^4dx}{8a^4}-\frac{cx^6dx}{16a^6}-\frac{5cx^8dx}{128a^8}-\frac{7cx^{10}dx}{256a^{10}}$ &c. in infinit. consequenter $\int ydx=cx-\frac{cx^3}{6a^2}-\frac{cx^5}{40a^4}-\frac{cx^7}{112a^6}-\frac{5cx^9}{1152a^8}-\frac{7cx^{11}}{2816a^{10}}$ &c. in infinit.

Quodsi pro x ponatur a; erit quadrans ellipsis $ac-\frac{1}{6}ac-\frac{1}{40}ac-\frac{1}{112}ac-\frac{5}{1152}ac-\frac{7}{2816}ac$ &c. in infinitum: quæ eadem series integram ellipsis aream exhibet, si a axem integrum denotet.

Aliter.

Quoniam elementum Ellipseos est $cdx\sqrt{(a^2-x^2)}:a$; erit $ECLR=\frac{c}{a}\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$. Sed $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$ $=DCLK$ (§. 124). Est itaque $a:c=DCLK:ECLR$, hoc est, area elliptica ECLR est ad circularem DCLK ut axis major AB (quæ est diameter circuli) ad minorem 2CD (§. 124). Pendet adeo quadratura ellipseos a quadratura circuli. Tab. II. Fig. 23.

COROLLARIUM 1.

127. Si fiat $\sqrt{ac}=1$, erit area ellipsis $=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\frac{1}{112}-\frac{5}{1152}-\frac{7}{2816}$ &c. in infinitum. Patet adeo ellipsin esse circulo æqualem, cujus diameter est media proportionalis inter axes ellipsis conjugatos (§. 124).

COROLLARIUM. 2.

128. Est ergo ellipsis ad circulum, cujus diameter axi majori æqualis, ut ac ad a^2 (§ 408 *Geom.*), hoc est, ut c ad a (§. 124 *part. 1*), seu ut axis minor ad majorem: quod idem de segmentis indefinitis ostendimus analytice in resolutione.

COROLLARIUM 3.

129. Data circuli quadratura dabitur etiam quadratura ellipsis & contra.

SCHOLION.

130. *Quamvis circuli integri quadratura finita hactenus dari non potuerit, varias tamen ejus portiones quadrarunt Geometræ. Primam quadraturam par-*

tialem alicujus lunulæ dedit jam olim Hippocrates *Chius, ex mercatore naufrago Geometra factus. Sit* AEB *semicirculus &* GC = BG. *Describatur radio* BC *quadrans* AFB; *erit* AEBFA Lunula Hippocratis. *Quoniam* $BC^2 = 2GB^2$ (§. 417. *Geom.*); *erit quadrans* AGBC *semicirculo* AEB *æqualis* (§. 408 *Geom.*). *Ablato igitur utrinque segmento communi* AFBGA; *erit* AEBFA = △ ACB = GB^2.

Tab. II. Fig. 21.

PRBOLEMA 42.

131. *Cycloidem quadrare.*

Quoniam TP = PM (§. 52); erunt in △ PMT anguli M & T æquales (§. 184 *Geom.*), adeoque TPQ = 2M (§. 239 *Geom.*). Est vero anguli APQ mensura arcus dimidius AP (§. 291. & 314 *Geom.*) & idem metitur angulum TPA (§. 322. *Geom.*). Ergo APQ = TPA (§. 142 *Geom.*). Sed TPQ = TPA + APQ = 2 APQ = 2TMP per *demonstrata*. Ergo APQ = TMP = M*m*S ob parallelas MP & *mq* (§. 255 *Geom.*). Quamobrem cum ad S & Q sint recti *per constr.*; erit (§. 267 *Geom.*)

Tab. I Fig. 7.

$$AQ : QP = MS : mS$$

Sit jam AQ = x, AB = 1, erit MS = dx, PQ = $\sqrt{(x - xx)}$ (§. 377. *part. 1.*) & $mS = dx\sqrt{(x - xx)} : x$. Reperimus autem supra (§. 124.) $\sqrt{(x - xx)} = x^{1:2} - \frac{1}{2}x^{3:2} - \frac{1}{8}x^{5:2} - \frac{1}{16}x^{7:2}$ &c. in infinitum. Ergo $dx\sqrt{(x - xx)} : x$ = (quoniam ob divisionem per x factam numeratores exponentium duabus unitatibus minuuntur, §. 54 part. 1.) $x^{-1:2}dx - \frac{1}{2}x^{1:2}dx - \frac{1}{8}x^{3:2}dx - \frac{1}{16}x^{5:2}dx$ &c, in infinitum, cujus summa $2x^{1:2} - \frac{1}{3}x^{3:2} - \frac{1}{20}x^{5:2} - \frac{1}{56}x^{7:2}$ &c. in infinitum, est semiordinata cycloidis QM ad axem AB relatæ. Hinc QM.dx seu elementum QMSq spatii cycloidici AMQ = $2x^{1:2}dx - \frac{1}{3}x^{3:2}dx - \frac{1}{20}x^{5:2}dx - \frac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. in infinitum: cujus summa = $\frac{4}{3}x^{3:2} - \frac{2}{15}x^{5:2} - \frac{1}{70}x^{7:2} - \frac{1}{252}x^{9:2}$ &c. in infinitum exprimit segmentum cycloidis AMQ.

Quodsi $mS = gG = dx\sqrt{(x - xx)} : x$ ducatur in GM = AQ = x, reperietur elementum GMHG areæ AMG = $dx\sqrt{(x - xx)}$: quod cum idem sit cum elemento segmenti circuli APQ (§. 124), erit spatium AMG segmento circuli APQ, consequenter area ADC semicirculo APB æqualis.

COROLLARIUM.

132. Quoniam CB semiperipheriæ circuli æquatur (§. 574. *part. 1.*) si ea = p & AB = a; erit rectangulum BCDA = ap (§. 375 *Geom.*) & semicirculus APB, adeoque & spatium cycloidicum externum ADC = $\frac{1}{4}ap$ (§. 406 *Geom.*). Ergo area semicycloidis ACB = $\frac{3}{4}ap$ & AMCBPA = $\frac{1}{4}ap$, consequenter area cycloidis est circuli genitoris tripla.

PRO-

PROBLEMA 43.

133. *Cissoidem* Dioclis *quadrare*.

Quoniam $y^2=x^3:(2-x)$, si 1 diameter circuli genitoris (§. 548 *part. 1.*); erit

$$y=x\surd x:\surd(1-x)=x^{3:2}(1-x)^{-1:2}$$

Extrahatur ergo ex $1:\surd(1-x)$ actu radix per theorema generale (§. 98 *part. 1.*) in quo erit $m=-1$, $n=2$, $P=1$, $Q=-x$ & hinc

$$P^{m:n}=1=A$$

$$\frac{m}{n}AQ=-\frac{1}{2}.1.-x=\frac{1}{2}x=B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{3}{4}.\frac{1}{2}x.-x=\frac{1.3}{2.4}x^2=C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{5.1.3}{6\ 2.4}x^2.-x=\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3=D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{7.1.3.5}{8.2.4.6}x^3.-x=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4$$

&c. in infinitum.

Unde $ydx=x^{3:2}(1-x)^{-1:2}dx=x^{3:2}dx+\frac{1}{2}x^{5:2}dx+\frac{1.3}{2.4}x^{7:2}dx+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^{9:2}dx+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{11:2}dx$ &c. cujus summa $\frac{2}{5}x^{5:2}+\frac{1}{7}x^{7:2}+\frac{1.3}{4.9}x^{9:2}+\frac{1.3.5}{4.6.11}x^{11:2}+\frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^{13:2}$ &c. in infinitum $=\surd x\,(\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{7}x^3+\frac{1.3}{4.9}x^4+\frac{1.3.5}{4.6.11}x^5+\frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^6$ &c. in infinitum) exprimit spatium APM.

Aliter.

Sit $AP=x$, $PN=v$, $PM=y$, $AB=a$; erit (§. 548 *part. 1.*) Tab. II. Fig. 22.

$$ay^2-xy^2=x^3$$

$$2ady-2xydy-y^2dx=3x^2dx$$

$$-y$$

$$2(a-x)dy-ydx=3x^2dx:y$$

Quoniam (§. 547 *part. 1.*) $x^2=vy$; erit $x^2:y=v$. Fiat præterea $a-x=PB=z$: habebimus

$$2zdy-ydx=3vdx$$

$$2\int zdy-\int ydx=3\int vdx$$

Est vero vdx elementum circuli $PNnp$; $\int zdy$ ob $z=PB=OM$ & $dy=mR=oO$ elementum $mMOo$ areæ AMOB & ydx elementum $PMmp$ areæ AMP. Jam quando $\int zdy$ integram aream intra cissoidem AI & ejus asymptotum BH exhibet, etiam $\int ydx$ est eadem area, adeoque $\int ydx=\int zdy$, consequenter $2\int zdy-\int ydx=\int zdy$. Quare cum in eodem casu $\int vdx$ semicirculum producat ANB; erit ob $\int zdy=3\int vdx$ totum spatium cissoidale in infinitum protensum semicirculi genitoris ANB triplum.

PRO-

PROBLEMA 44.

134. *Quadrare Logisticam* seu *Logarithmicam*.

Tab. I. Fig. 8. Sit subtangens PT $= a$ (§. 54.), PM=x, Pp=dx; erit (§. cit.)

$$y\,dx : dy = a$$

$$y\,dx = a\,dy$$

$$\int y\,dx = ay$$

Spatium ergo interminatum H PMI æquatur rectangulo ex PM in PT.

COROLLARIUM 1.

135. Sit QS$=z$; erit spatium interminatum ISQH $= az$, consequenter S MPQ$=ay-az=a(y-z)$, hoc est, spatium inter duas logisticæ semiordinatas interceptum æquatur rectangulo ex subtangente in differentiam semiordinatarum.

COROLLARIUM. 2.

136. Est itaque spatium BAPM ad spatium PMSQ ut differentia semiordinatarum AB & PM ad differentiam semiordinatarum PM & SQ (§. *præc.* & §. 124. *part. 1.*).

PROBLEMA 45.

137. *Quadrare spirales.*

Tab. I. Fig. 6. Sint omnia ut in problemate 8. (§. 50); erit arculus EG$=y\,dx:a$, qui ductus in $\frac{1}{2}$AG producit sectorem infinite parvum GAE$=y^2dx:2a$ (§. 435 *Geom.*). Est autem pro spirali Archimedea

$$ax = by$$

$$a^2x^2 : b^2 = y^2$$

$$y^2dx : 2a = ax^2dx : 2b^2$$

$$\int y^2dx : 2a = ax^3 : 6b^2$$

Qnodsi pro arcu x ponatur integra peripheria b; erit spatium spirale integrum $\frac{1}{6}ab$. Similiter pro infinitis spiralibus ad circulum relatis (§. 572. *part. 1.*)

$$a^m x^n = b^n y^m$$

$$a^m x^n : b^n = y^m$$

$$ax^{n:m} : b^{n:m} = y$$

$$a^2 x^{2n.m} : b^{2n:m} = y^2$$

$$y^2 dx : 2a = ax^{2n.m}dx : 2b^{2n:m}$$

$$\int y^2dx : 2a = max^{2n+m,:m} : (4n+2m)\,b^{2n:m}$$

Quare si pro x ponatur integra peripheria circuli b, prodibit pro spatiis spiralibus integris $mab^{2n:m+1}:(4n+2m)\,b^{2n:m} = mab:(4n+2m)$.

Quodsi ponamus arcum BC esse ad CF ut abscissa ad semiordinatam in curva aliqua algebraica, eodem modo reperitur spatium spirale. Sit enim e. gr. BC ad CF ut abscissa parabolæ ad semiordinatam, erit (sumto r pro parametro)

rx=

$$rx = a^2 - 2ay + yy$$

$$dx = (2ydy - 2ady) : r$$

$$y^2dx : 2a = (y^3dy - ay^2dy) : ar$$

$$\int y^2dx : 2a = y^4 : 4ar - y^3 : 3r$$

Nec absimili modo invenitur spatium inter arcum BC & spiralem BF comprehensum: cujus elementum est trapezium CFID $=$ (CD $+$ FI) $\frac{1}{2}$ FC (§. 400. *Geom.*). Est vero CD $= dx$, FI $= ydx : a$, FC $= a - y$, adeoque CFID $= (dx + ydx:a)(\frac{1}{2}a - y) = (a^2dx - y^2dx) : 2a$.

Si jam spiralis sit parabolica, pro dx substituatur valor ipsius $(2ydy - 2ady) : r$; erit elementum speciale $(ay^2dy + a^2ydy - y^3dy - a^3dy) : ar$, cujus summa $y^3 : 3r + ay^2 : 2r - y^4 : ar - a^2y : r$ est spatium quaesitum BFC.

PROBLEMA 46.

Tab. I. Fig. 5. 138. *Quadrare Conchoidem Nicomedis.*

Sit AP $= x$, PM $= y$, BC $= b$, AB $= a$ & OQ ad PM perpendicularis: erit PB $=$ OQ $= a - x$, PC $= a + b - x$. Quoniam OQ & BA perpendiculares ad PM *per hypoth.* erunt inter se parallelae (§. 256 *Geom.*), consequenter (§. 268 *Geom.*)

$$PC : PM = OQ : OM$$

$$a + b - x : y = a - x :$$

& hinc OM $= y(a - x) : (a + b - x)$ adeoque OM$^2 = y^2(a - x)^2 : (a + b - x)^2$. Porro OQ$^2 = (a - x)^2$ & QM^2 $=$ AB^2 (§. 352 *part. 1.*) $= a^2$. Quare (§. 417 *Geom.*)

$$a^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \frac{y^2(a-x)^2}{(a+b-x)^2}$$

$$2ax - x^2 = y^2(a-x)^2 : (a+b-x)^2$$

$$\sqrt{(2ax - x^2)} = y(a-x) : (a+b-x)$$

$$y = \frac{a+b-x}{a-x}\sqrt{(2ax - x^2)}.$$

Habemus itaque elementum areae PpMm $= ydx = \frac{a+b-x}{a-x} dx\sqrt{(2ax - x^2)}$, nec alia re opus est, quam ut $\sqrt{(2ax - x^2)}$ resolvatur in seriem (§. 98 *part. 1.*), series haec porro ducatur in $a + b - x$ & factum tandem dividatur per $a - x$. Ita enim obtinetur series, quae singulis terminis in dx ductis exprimit elementum areae atque eodem, quo ante, modo summatur. Ne calculus perplexus tyrones turbet, sumamus casum simplicissimum, in quo est $b = a$, adeoque $a + b = 2a$, & ne $\sqrt{2}$ toties sit scribenda, ponamus $2a = c$, ut sit $a = \frac{1}{2}c$: erit $ydx = \frac{c-x}{\frac{1}{2}c - x} dx\sqrt{(cx - x^2)}$. Est autem

$\sqrt{}(cx-x^2)$ semiordinata circuli, cujus diameter c, atque adeo coincidit resolutio in seriem cum ea, quam dedimus paulo ante (§.124), nisi quod ibidem supposuerimus $c=1$. Quoniam tamen hic consultius est c retineri & in resolutione in gratiam operationum sequentium quædam notanda sunt; ideo noninconsultum ducimus vi theorematis *Newtoniani* (§.98 *part.1.*) resolutionem ipsam instituere. Erit itaque

$m=1, n=2, P=cx, Q=-x^2:cx=-x:c=-c^{-1}x$ (§. 54. 55 *part. 1*), adeoque

$P^{m:n}=c^{1:2}x^{1:2}=A$

$\frac{m}{n}AQ=\frac{1}{2}c^{1:2}x^{1:2}.-c^{-1}x=-\frac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2}=B$

$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{1}{4}.-\frac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2}.-c^{-1}x=-\frac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2}=C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{3}{6}.-\frac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2}.-c^{-1}x=-\frac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2}=D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{5}{8}.-\frac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2}.c^{-1}x=-\frac{5}{128}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c.

Est itaque $\sqrt{}(cx-x^2)=c^{1:2}x^{1:2}-\frac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2}-\frac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2}-\frac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2}-\frac{5}{128}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Quodsi hanc seriem multiplices per $c-x$, prodibit $(c-x)\sqrt{}(cx-x^2)=2c^{1:2}x^{1:2}+c^{-1:2}x^{3:2}+\frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2}+\frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2}+\frac{723}{64}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Multiplicatio & divisio modo ordinario instituitur. Etenim si seriem multiplices per c, prodit $c^{3:2}x^{1:2}-\frac{1}{2}c^{1:2}x^{3:2}-\frac{1}{8}c^{-1:2}x^{5:2}-\frac{1}{16}c^{-3:2}x^{7:2}-\frac{5}{128}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. in infinit. Si porro eandem ducas in $-x$, prodit $-c^{1:2}x^{3:2}+\frac{1}{2}c^{-1:2}x^{5:2}+\frac{1}{8}c^{-3:2}x^{7:2}+\frac{1}{16}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. Quodsi terminos homogeneos in unam summam colligas, obtinetur series $c^{3:2}x^{1:2}-\frac{3}{2}c^{1:2}x^{3:2}+\frac{3}{8}c^{-1:2}x^{5:2}+\frac{1}{16}c^{-3:2}x^{7:2}+\frac{3}{128}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. Hac porro divisa per $\frac{1}{2}c-x$ (§. 40. part. 1), prodit quotus $2c^{1:2}x^{1:2}+c^{-1:2}x^{3:2}+\frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2}+\frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2}+\frac{723}{64}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c.

Est adeo elementum areæ Conchoidis $2c^{1:2}x^{1:2}dx+c^{-1:2}x^{3:2}dx+\frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2}dx+\frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2}dx+\frac{723}{64}c^{-7:2}x^{9:2}dx$ &c. in infinit.

Qare area $AMP=\frac{4}{3}c^{1:2}x^{3:2}+\frac{2}{5}c^{-1:2}x^{5:2}+\frac{11}{14}c^{-3:2}x^{7:2}+\frac{5}{4}c^{-5:2}x^{9:2}+\frac{723}{352}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c. in infin.

PROBLEMA 47.

139. *Invenire rationem, quam habent spatia curvilinea juxta axem eundem vel axes æquales descripta, semiordinatis correspondentibus rationem constantem habentibus.*

Sit elementum spatii curvilinei unius

unius $=ydx$. Quoniam ordinatæ ad æquales partes axis continuo applicantur, *per hypoth.* erit elementum spatii alterius zdx, posita nempe semiordinata hujus z, abscissa communi x. Sed cum in singulis elementis eadem semper sit ratio ipsius y ad z, *per hypoth.* erit $\int ydx : \int zdx = ydx : zdx$ (§. 187 *Arithm.*) $= y : z$ (§. 181 *Arithm.*).

Theorema. Spatia curvilinea æque alta habent rationem basium, quibus insistunt, si semiordinatæ correspondentes fuerint in ratione constante.

COROLLARIUM 1.

Tab. II. Fig. 23. 140. Quare si ARB fuerit semiellipsis; AKB semicirculus & KL ad AB perpendicularis; erit KL ad RL in ratione constante DC ad CE (§. 598 *part. 1.*), adeoque segmentum circulare BKL ad segmentum ellipticum BRL ut KL ad RL.

COROLLARIUM. 2.

141. Quodsi ex foco F ducantur rectæ FR & FK, erunt quoque triangula FKL & FRL ut KL ad RL (§. 389 *Geom.*). Quamobrem sector circularis BFK est ad sectorem ellipticum RFB ut KL ad RL (§. 187 *Arithm.*). Cum itaque KL : RL $=$ CD : CE (§. 598 *part. 1.*) & ut CD ad CE ita circulus integer ad ellipsin integram (§. 124); erit quoque sector KFB ad sectorem RFB ut circulus ad ellipsin (§. 167. *Arithm.*), consequenter ut sector KFB ad aream integri circuli, ita sector RFB ad integram ellipsis aream (§. 173 *Arithm.*).

SCHOLION.

142. *Quoniam sectores ex arcuum elementis derivantur; de iis quadrandis agemus capite sequente, ubi arcuum rectificatio docetur.*

CAPUT III.
DE USU CALCULI INTEGRALIS IN RECTIFICATIONE CURVARUM.

DEFINITIO 7.

143. R*ectificatio curvæ* est inventio rectæ, cui æqualis est linea curva.

COROLLARIUM.

144. Cum linea curva concipiatur constare ex innumeris lineolis rectis infinite exiguis; si una earum inveniatur per calculum differentialem, summa dabit longitudinem curvæ. Nimirum cum ex superioribus constet, esse MR $= dx$, mR $= dy$ (§. 20.); erit Mm seu elementum curvæ $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 417. *Geom.*). Quodsi itaque ex æquatione differentiali ad curvam specialem substituatur valor vel ipsius dx^2, vel ipsius dy^2; habetur

elementum speciale: quod integratum prodit longitudinem curvæ.

SCHOLION.

145. *Interdum elementum curvæ commodius ex circumstantiis specialibus eruitur, prout exempla mox afferenda loquentur.*

PRBOLEMA 48.

146. *Parabolam rectificare.*

Pro parabola $adx = 2ydy$ (§. 21.)

$$a^2dx^2 = 4y^2dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + 4y^2dy^2 : a^2)} = dy\sqrt{(aa + 4yy)} : a.$$

Ut hoc elementum curvæ integrabile fiat, resolvatur in seriem infinitam (§. 99. *part. 1.*); erit in theoremate generali

$n = 2 \quad m = 1 \quad P = a^2 \quad Q = 4y^2 : a^2$

$P^{m:n} = a = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2}a.\, 4y^2 : a^2 = 2y^2 : a = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4}.\, \frac{2y^2}{a}.\, \frac{4y^2}{a^2} = -\frac{2y^4}{a^3} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6}.\, -\frac{2y^4}{a^3}.\, \frac{4y^2}{a^2} = \frac{4y^6}{a^5} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8}.\, \frac{4y^6}{a^5}.\, \frac{4y^2}{a^2} = -\frac{10y^8}{a^7}$ &c.

in infinitum.

Quare $dy\sqrt{(aa + 4y)} : a = dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6} - \frac{10y^8dy}{a^8}$ &c.

cujus integrale $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ &c. in infinitum exprimit arcum parabolicum AM. Tab. I. Fig. 2.

COROLLARIUM. 1.

147. Sint AC & DC semiaxes conjugati hyperbolæ æquilateræ; erit AC = DC = a (§. 505 *part. 1*). Sit CQ = MP = $2y$; erit (§. 534. *part. 1*) QM = $\sqrt{(4yy + aa)}$. Quodsi qm intelligatur ipsi QM infinite propinqua; erit $Qq = dy$, adeoque elementum areæ CQMA = $dy\sqrt{(aa + 4yy)}$. Pendet itaque rectificatio parabolæ a quadratura spatii hyperbolici CQMA. Tab. II. Fig. 24.

COROLLARIUM. 2.

148. Sit AMR parabola, cujus parameter AC, & circa communem axem descripta hyperbola æquilatera ANT, cujus axis 2CA. Si fiat CQ = AV = QN = 2PM & rectangulum CORA spatio curvilineo CQNA æquale; erit AR æqualis arcui AM (§. 146. 147.), consequenter RV = AM − 2PM, seu differentia inter ordinatam & arcum respondentem, & ORVQ = VNA. Tab. IV. Fig. 48.

SCHOLION.

149. *Probe notandum est, omnes summationes reduci ad quadraturas curvarum, quocunque in casu iisdem utamur. Unde ut sint perfecta, in omnibus observanda*

vanda est regula supra tradita de quadraturis (§.109.).

PROBLEMA 49.

150. *Rectificare parabolam secundi generis, ad quam $ax^2=y^3$, seu sumto $a=1$, $x^2=y^3$.*

Quoniam $x^2 = y^3$

erit $2xdx=3y^2dy$

$$4x^2dx^2 = 9y^4dy^2$$

$$dx^2=9y^4dy^2:4x^2=9y^4dy^2:4y^3=\tfrac{9}{4}ydy^2$$

$$\sqrt{}(dx^2+dy^2)=\sqrt{}(\tfrac{9}{4}ydy^2+dy^2)=\tfrac{1}{2}\sqrt{}(9ydy^2+4dy^2)=\tfrac{1}{2}dy\sqrt{}(9y+4)$$

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{}(9y+4)=v$$

erit $9y+4=v^2$

$$9dy=2vdv$$

$$\tfrac{1}{2}dy\sqrt{}(9y+4)=\tfrac{1}{9}v^2dv$$

$$\int\tfrac{1}{2}dy\sqrt{}(9y+4)=\tfrac{1}{27}v^3=\tfrac{1}{27}(9y+4)\sqrt{}(9y+4).$$

Ut vero summa exprimat longitudinem arcus, fiat $y=0$; erit residuum $=\tfrac{4}{27}\sqrt{}4=\tfrac{8}{27}$: adeoque arcus $\tfrac{1}{27}(9y+4)\sqrt{}(9y+4)-\tfrac{8}{27}$ (§. 109.).

COROLLARIUM.

151. Sit parameter parabolæ Apollonianæ 1, AP=1, PQ$=\tfrac{9}{4}y$, erit AQ$=\tfrac{9}{4}y+1$ &c. ob parametrum 1, QN$^2=\tfrac{9}{4}y+1=(9y+4):4$ (§. 388 part. 1.), consequenter QN$=\tfrac{1}{2}\sqrt{}(9y+4)$. Est adeo elementum QN$nq$ spatii parabolici PMNQ$=\tfrac{1}{2}dy\sqrt{}(9y+4)$: quod divisum per 1 sive parametrum dat elementum arcus parabolæ secundi generis, ad quam $ax^2=y^3$. Pendet adeo rectificatio a quadratura parabolæ Apollonianæ: quæ cum dari possit (§. 103), mirum non est, illam quoque rectificabilem esse. Tab. II. Fig. 19.

PROBLEMA 50.

152. *Infinitas parabolas rectificare.*

Si parameter = 1, pro infinitis parabolis (§. 519 *part. 1.*)

$$y^m = x$$

$$my^{m-1}dy=dx$$

$$m^2y^{2m-2}dy^2=dx^2$$

h. e. si brevitatis gratia fiat $2m-2=r$

$$m^2y^rdy^2=dx^2$$

$$\sqrt{}(dx^2+dy^2)=\sqrt{}(m^2y^rdy^2+dy^2)=dy\sqrt{}(m^2y^r+1)$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex m^2y^r+1 extrahenda est radix per theorema generale (§. 99. *part. 1.*); in quo erit

$m=1$, $n=2$, P$=1$, Q$=m^2y^r$

$P^{n:m}=1=A$

$\frac{m}{n}AQ=\tfrac{1}{2}m^2y^r=B$

m—n

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}m^2y^r\cdot m^2y^r = -\frac{1}{2.4}m^4y^{2r}=C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{3}{6}\cdot -\frac{1}{2.4}m^4y^{2r}\cdot m^2y^r = +\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}=D.$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8}\cdot\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}\cdot m^2y^r = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}=E$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\frac{7}{10}\cdot -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}\cdot m^2y^r = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}$$ &c: in infinitum.

Habemus itaque $dy\sqrt{(1+m^2y^r)} = dy + \frac{1}{2}m^2y^rdy - \frac{1}{2.4}m^4y^{2r}dy + \frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}dy - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}dy$ &c. in infinit. cujus integrale $y + \frac{1}{2(r+1)}m^2y^{r+1} - \frac{1}{2.4(2r+1)}m^4y^{2r+1} + \frac{1}{2.4.6(3r+1)}m^6y^{3r+1} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(4r+1)}m^8y^{4r+1} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(5r+1)}m^{10}y^{5r+1}$. &c. in infinitum indefinite exprimit arcum parabolicum cujuscunque generis.

Quodsi pro r substituatur valor ipsius $2m-2$; prodibit idem arcus $=y+\frac{1}{2(2m-1)}m^2y^{2m-1} - \frac{1}{2.4(4m-3)}m^4y^{4m-3} + \frac{1.3}{2.4.6(6m-5)}m^6y^{6m-5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(8m-7)}m^8y^{8m-7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(10m-9)}m^{10}y^{10m-9}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA 51.

153. *Dato sinu* PQ *arcus* AP *invenire arcum* AP. Tab. I. Fig. 7.

Sit radius AI $=1$, PQ$=y$, AQ$=x$; erit (§.377. *part.1.*)

$$2x - xx = yy$$

$$2dx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = ydy:(1-x)$$

$$dx^2 = y^2dy^2:(1-2x+xx) = y^2dy^2:(1-y^2)$$

$$dx^2+dy^2 = \frac{y^2dy^2}{1-y^2} + dy^2 = (y^2dy^2+dy^2-y^2dy^2):(1-y^2) = dy^2:(1-y^2)$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dy:\sqrt{(1-y^2)} = dy(1-y^2)^{-1:2}.$$

Resolvatur hoc elementum in seriem infinitam per extractionem radicis vi theorematis generalis (§: 99 part. 1), in quo erit

$m=-$

$m=-1$, $n=2$, $P=1$, $Q=-y^2$.

$P^{m:n}=1=A$

$\frac{m}{n}AQ=-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot -y^2=\frac{1}{2}y^2=B$

$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}y^2\cdot -y^2=\frac{1.3}{2.4}y^4=C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{5}{6}\cdot\frac{1.3}{2.4}y^4\cdot -y^2=\frac{1.3.5}{2.4.6}y^6$

$=D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{7}{8}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}y^6\cdot -y^2=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8$ &c. in infinitum.

Est adeo $dy:\sqrt{(1-y^2)}=dy+\frac{1}{2}y^2dy+\frac{1.3}{2.4}y^4dy+\frac{1.3.5}{2.4.6}y^6dy+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8dy$ &c. in infinitum, cujus integrale $y+\frac{1}{2.3}y^3+\frac{1.3}{2.4.5}y^5+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$ &c. est arcus AP, cujus sinus $PQ=y$, sinu toto existente 1. Si terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. & secundus multiplicetur per $\frac{1}{1}$, tertius per $\frac{3}{3}$, quartus per $\frac{3.5}{3.5}$, quintus per $\frac{3.5.7}{3.5.7}$ &c. cum sit

$A=y$

$B=\frac{1}{2.3}y^3=\frac{1.1}{2.3}Ay^2$

$C=\frac{1.3}{2.4.5}y^5=\frac{1.3.3}{2.3.4.5}y^5=\frac{3.3}{4.5}By^2$

$D=\frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7=\frac{1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}y^7=\frac{5.5}{6.7}Cy^2$

$E=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9=\frac{1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}y^9=\frac{7.7}{8.9}Dy^2$

series inventa in hanc degenerat: $y+\frac{1.1}{2.3}Ay^2+\frac{3.3}{4.5}By^2+\frac{5.5}{6.7}Cy^2+\frac{7.7}{8.9}Dy^2$ &c.

Si Cosinus $QI=x$; erit (§.417. *Geom.*) $PQ=\sqrt{(1-xx)}$. Sit pq ipsi PQ infinite propinqua & PO ad pq perpendicularis: cum anguli Q & q sint recti *per hyp.* $PQ=Qq=dx$ & $\triangle\triangle$ pOP atque PQI rectangula. Quare cum OPQ sit rectus (§. 230 *Geom.*) & PpI itidem rectus (§. 38.); erit etiam $PpO=IPQ$ (§.91. *Arithm.*), consequenter (§. 267. *Geom.*)

$$PQ : PI = PO : Pp$$

$$\sqrt{(1-xx)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

Cum adeo hoc elementum coincidat cum anteriore, evidens est, si in serie anteriore pro y substituatur x, prodire seriem pro arcu, qui est illius complementum ad 90°.

COROL-

COROLLARIUM. 1.

Tab. II. Fig. 20. 154. Quoniam elementum arcus $Mm = dy : \surd(1-y^2)$, si $MC=1$, $PM=y$ (§. 143); erit sector elementaris $MCm = dy : 2\surd(1-y^2)$ (§. Geom.), consequenter sector $BCM = \frac{1}{2}\int dy : \surd(1-y^2) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{4.5}y^5 + \frac{3.5}{4.6.7}y^7 + \frac{3.5.7}{4.6.8.9}y^9$ &c. in infinit.

COROLLARIUM 2.

155. Quodsi $MC=1$, $PC=y$, erit denuo $Mm = dy : \surd(1-y^2)$ (§. 153), consequenter & $MCm = dy : 2\surd(1-y^2)$. Summa vero exhibet sectorem MCO.

COROLLARIUM 3.

156. Si fiat $y=1$, sector BCM vel MCO degenerat in quadrantem, qui adeo erit $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4.5} + \frac{3.5}{4.6.7} + \frac{3.5.7}{4.6.8.9}$ &c. sive $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{20} + \frac{5}{56} + \frac{35}{576}$ &c. in infinit. Eadem series integrum circulum exprimit, si fuerit diameter $=1$.

PROBLEMA 52.

Tab. I. Fig. 7. 157. *Dato sinu verso AQ invenire arcum AP.*

Sit $AQ=x$, diameter $AB=1$, erit $QP=\surd(x-xx)$ (§. 377 *part. 1.*) & *vi probl. præc.* $Pp = dx : 2\surd(x-xx) = \frac{1}{2}dx(x-xx)^{-1:2}$. Cum adeo sit in theoremate generali (§. 99 *part. 1.*) $m=-1$, $n=2$, $P=x$, $Q=-x$; erit

$P^{m:n} = x^{-1:2} = A$

$\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{2}.x_^{1:2}.-x = \frac{1}{2}x^{1:2} = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4}.\frac{1}{2}x^{1:2}.-x = \frac{1.3}{2.4}x^{3:2} = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5.1.3}{6.2.4}x^{3:2}.-x = \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2} = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7.1.3.5}{8.2.4.6}x^{5:2}.-x = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{7:2}$ &c. in infinitum.

Hinc $\frac{1}{2}dx : \surd(x-xx) = \frac{1}{2}x^{-1:2}dx + \frac{1}{4}x^{1:2}dx + \frac{1.3}{4.4}x^{3:2}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^{5:2}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{7:2}dx$ &c. in infinitum, cujus integrale $x^{1:2} + \frac{1}{2.3}x^{3:2} + \frac{1.3}{2.4.5}x^{5:2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^{7:2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^{9:2}$ &c. in infinitum, seu $\surd x(1 + \frac{1}{2.3}x + \frac{1.3}{2.4.5}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^4$ &c. in infinitum exprimit arcum AP, quia $x^{1:2} = \surd x$.

PROBLEMA 53.

158. *Data tangente BK invenire arcum BM.* Tab. II. Fig. 20.

Sit

Sit tangens BK $=x$, radius BC $=1$, erit $Mm = dx:(1+x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. in infinitum (§. 124). Hujus seriei summa $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. in infinitum dat arcum BM.

Cum tangens 45° sit radio æqualis (§. 32. *Trigon.*) si pro x ponatur 1; prodibit arcus 45° seu dimidius quadrans $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum, quæ eadem series quadranti satisfacit, si diameter $=1$.

PROBLEMA 54.

Tab. II. Fig. 20. 160. *Dato arcu* BM *invenire sinum* PM.

Sit sinus PM $=y$, radius BC $=1$, arcus BM $=v$; erit $v = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum (§. 156). Valor ipsius y invenietur extrahendo radicem ex $y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum. Est nimirum in theoremate generali (§. 366. *part. 1*) $a=1$, $c=\frac{1}{6}$, $e=\frac{3}{40}$ &c. adeoque

$$v:a=v$$
$$-acv^3:a^5=-\tfrac{1}{6}v^3$$
$$+(3a^2c^2-a^3e)\,v^5:a^9=\left(\tfrac{3}{36}-\tfrac{3}{40}\right)v^5=\left(\tfrac{1}{12}-\tfrac{3}{40}\right)v^5=\frac{40-36}{12.40}v^5=\frac{4}{12.40}v^5=\tfrac{1}{120}v^5.$$

Hinc $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5$ &c. in infinitum $= \frac{1}{1}v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5$ &c. in infinitum: unde lex progressionis manifesta est. Nimirum $y = v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9$ &c.

Quodsi theorema generale supponere non libet, reperietur valor ipsius y eodem modo, quo (§. 366 *part. 1.*) theorema generale investigavimus. Sit nempe

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 + \&c.$$

erit (§. 95. *part. 1.*)

$$y^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 + \&c.$$
$$\qquad\qquad + 3a^2cv^7 + \&c.$$
$$y^5 = \qquad a^5v^5 + 5a^4bv^7 + \&c.$$
$$y^7 = \qquad\qquad a^7v^7 + \&c.$$

Habemus itaque

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \;\&c.$$
$$\tfrac{1}{6}y^3 = \; + \tfrac{1}{6}v^3 + \tfrac{1}{2}a^2bv^5 + \tfrac{1}{2}ab^2v^7 \;\&c.$$
$$\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}a^2cv^7$$
$$\tfrac{3}{40}y^5 = \; + \tfrac{3}{40}a^5v^5 + \tfrac{3}{8}a^4bv^7 \;\&c.$$
$$\tfrac{5}{112}y^7 = \; \tfrac{5}{112}a^7y^7 \;\&c.$$
$$-v = -v$$

$$a-1=0 \qquad b+\tfrac{1}{6}=0$$
$$a=1 \qquad b=-\tfrac{1}{6}$$
$$c+\tfrac{1}{2}a^2b+\tfrac{3}{40}a^5=0$$

h. e. $c - \frac{1}{12} + \frac{3}{40} = 0$

$$c = \tfrac{1}{12} - \tfrac{3}{40}$$
$$= \frac{40-36}{12.40}$$
$$= \tfrac{1}{120}$$

$$d+\tfrac{1}{2}ab^2+\tfrac{1}{2}a^2c+\tfrac{3}{8}a^4b+\tfrac{5}{112}a^7=0$$

h. e $d+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{240}-\tfrac{1}{16}+\tfrac{5}{112}=0$

seu $d+\tfrac{1}{5040}=0$

$$d=-\tfrac{1}{5040}$$

Nimirum $\tfrac{1}{72}+\tfrac{1}{240}=\tfrac{13}{720}$, $\tfrac{13}{720}-\tfrac{1}{16}=-\tfrac{2}{45}$ tandem $\tfrac{5}{112}-\tfrac{2}{45}=\tfrac{1}{5040}$.

Habemus itaque ut ante $y=v-\tfrac{1}{6}v^3+\tfrac{1}{120}v^5-\tfrac{1}{5040}v^7$ &c. in infin.

PROBLEMA 55.

161. *Dato arcu* BM *invenire tangentem* BK.

Tab. II. Fig. 20. Sit tangens $=x$, radius $=1$, arcus $=v$; erit (§. 158.) $v=x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7+\tfrac{1}{9}x^9-\tfrac{1}{11}x^{11}$ &c. Unde eodem modo, quo in problemate præcedente, reperitur $x=v+\tfrac{1}{3}v^3+\tfrac{2}{15}v^5$ &c. (§. 366. *part.* 1).

Est nimirum vi theorematis generalis $x=\dfrac{v}{a}+\dfrac{2b^2-ac}{a^5}v^3+\dfrac{14b^4+6a^2bd-21ab^2c+3a^2c^2-a^3e}{a^4}v^5$ &c.

Jam vero $a=1$, $b=0$, $c=\tfrac{1}{3}$, $d=0$, $e=\tfrac{1}{5}$ per legem comparationis, adeoque

$$\frac{-ac}{a^5}=-\tfrac{1}{3}$$

$$c=+\tfrac{1}{3}$$

$$3a^2c^2-a^3e=\tfrac{1}{?}$$

h. e. $\tfrac{3}{9}-e=\tfrac{1}{5}$

$$e=\tfrac{3}{9}-\tfrac{1}{5}$$
$$=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}$$
$$=\frac{5-3}{15}=\tfrac{2}{15}$$

Quare $x=v+\tfrac{1}{3}v^3+\tfrac{2}{15}v^5$ &c.

Potest etiam valor ipsius x eodem modo inveniri, quo in problemate præcedente.

Ponamus nempe $x=av+bv^3+cv^5+dv^7$ &c. $=0$; erit (§. 95 *part.* 1)

$$x^3=a^3v^3+3a^2bv^5+3ab^2v^7\ \&c.$$
$$+3a^2cv^7\ \&c.$$
$$x^5=\quad +a^5v^5\quad +5a^4bv^7\ \&c.$$
$$x^7=\qquad +a^7v^7\ \&c.$$

Habemus adeo ob

$$x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7\ \&c.=0$$
$$-v=-v$$
$$x=av+bv^3+cv^5+dv^7\ \&c.$$
$$-\tfrac{1}{3}x^3=-\tfrac{1}{3}a^3v^3-a^2bv^5-ab^2v^7\ \&c.$$
$$-a^2cv^7$$
$$+\tfrac{1}{5}x^5=\quad+\tfrac{1}{5}a^5v^5+a^4bv^7$$
$$-\tfrac{1}{7}x^7\qquad -\tfrac{1}{7}a^7v^7$$

Quamobrem

$a-1=0$ | $b-\tfrac{1}{3}=0$ | $c-a^2b+\tfrac{1}{5}a=0$

$a=1$ | $b=\tfrac{1}{3}$ | $c=b-\tfrac{1}{5}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}$

$$=\frac{5-3}{15}=\frac{2}{15}$$

$$d-ab^2-a^2c+a^4b-\tfrac{1}{7}a^7=0$$

$$d-\tfrac{1}{9}-\tfrac{2}{15}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{7}=0$$

$d=$

$d = \frac{2}{15} + \frac{1}{7} - \frac{2}{9} = \frac{126 + 135 - 210}{945}$
$= \frac{51}{945} = \frac{17}{315}$

His ergo valoribus coëfficientium a, b, c, d &c. in æquatione assumtitia $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. substitutis, prodit $x = v + \frac{1}{3}v^3, + \frac{2}{15}v^5 + \frac{17}{315}v^7$ &c.

SCHOLION.

162. *Me non monente apparet, si plures termini desiderentur, assumtitiam quoque ex pluribus conflandam esse.*

PROBLEMA 56.

163. *Dato arcu* AP *invenire sinum versum.*

Tab. I. Fig. 7. Quodsi formulam desideres, quam *Newtonus* dedit (k); radius supponi debet 1. In formula superiori, quam pro arcu ex sinu verso eruimus (§. 157), diameter est 1. Quamobrem hæc prius eadem, qua supra usi sumus, methodo eruenda. Sit igitur $AI = 1$, $AQ = x$, erit $AB = 2$, $PQ = \sqrt{(2x - x^2)}$ & per demonstratata (§. 153)

$PQ : PI = PO : Pp$
$\sqrt{(2x - x^2)} : 1 = dx :$

consequenter $Pp = dx : \sqrt{(2x - x^2)} = dx(2x - x^2)^{-1:2}$ cumque sit (§. 99. *part. 1.*)

$m = -1$ $n = 2$ $P = 2x$ $Q = -x^2 : 2x = -\frac{1}{2}x$, erit

$P^{m:n} = \frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}} = A$

$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{2}x = + \frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{2}x = + \frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{2}x = + \frac{5x^{5:2}}{128\sqrt{2}}$

&c.

Est itaque $Pp = \frac{x^{-1:2}dx}{\sqrt{2}} + \frac{x^{1:2}dx}{4\sqrt{2}} + \frac{3x^{3:2}dx}{32\sqrt{2}} + \frac{5x^{5:2}dx}{128\sqrt{2}}$ &c.

adeoque arcus $AP = \frac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}} + \frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}} + \frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}} + \frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$ &c.

Nam $\frac{x^{3:2}}{4\sqrt{2}.\frac{3}{2}} = \frac{2x^{3:2}}{3.4\sqrt{2}} = \frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}}$

$\frac{3x^{5:2}}{32\sqrt{2}.\frac{5}{2}} = \frac{2.3x^{5:2}}{5.32\sqrt{2}} = \frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}}$

$\frac{5x^{7:2}}{128\sqrt{2}.\frac{7}{2}} = \frac{2.5x^{7:2}}{128.7\sqrt{2}} = \frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$

Sit jam $AP = v$,
erit $v = \frac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}} + \frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}} + \frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}}$

Gggg 2 +5x

(k) in epistola ad *Leibnitium*, quæ legitur apud *Wallisium* Vol. III. Oper. f. 625.

$$+ \frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}} \text{ \&c.}$$

adeoque

$$v^2 = \frac{4x}{2} + \frac{4x^2}{2.6} + \frac{x^3}{2.36} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{4.3x^2}{2.80}$$

hoc est, $v^2 = 2x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{72}x^3$
$+ \frac{3}{40}x^3$

Ponatur

$$x = av^2 + bv^4 + cv^6 \text{ \&c.}$$

erit $x^2 = \qquad a^2v^4 + 2abv^6$

$x^3 = \qquad + a^3v^6$

adeoque

$$2x = 2av^2 + 2bv^4 + 2cv^6 \text{ \&c}$$
$$+\tfrac{1}{3}x^2 = \quad +\tfrac{1}{3}a^2v^4 + \tfrac{2}{3}abv^6$$
$$+\tfrac{1}{72}x^3 = \quad +\tfrac{1}{72}a^3v^6$$
$$+\tfrac{3}{40}x^3 = \quad +\tfrac{3}{40}a^3v^6$$
$$-v^2 = -v^2$$

Quamobrem

$2a - 1 = v \qquad 2b + \frac{1}{3}a^2 = 0$

$2a = 1 \qquad 2b = -\frac{1}{3}a^2$

$a = \frac{1}{2} \qquad b = -\frac{1}{6}a^2$

$= -\frac{1}{6.4} = -\frac{1}{24}$

$$2c + \tfrac{2}{3}ab + \tfrac{1}{72}a^3 + \tfrac{3}{40}a^3 = 0$$

$$c = -\tfrac{1}{3}ab - \tfrac{3}{144}a^3 - \tfrac{3}{80}a^3$$

$-\frac{1}{3}ab = + \frac{1}{144} = + \frac{8}{144.8}$

$-\frac{1}{144}a^3 = - \frac{1}{144.8}$

$-\frac{1}{3}ab - \frac{1}{144}a^3 = \frac{7}{144.8} = \frac{7}{1152}$

$-\frac{3}{80}a^3 = -\frac{3}{80.8} = -\frac{3}{640}$

$$c = \frac{480 - 3456}{1152.640}$$
$$= \frac{1024}{1152.640}$$
$$= \frac{16}{1152.10} = \frac{1}{720}$$

Est igitur $x = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{24}v^4 + \frac{1}{720}v^6$ &c. Enimvero $2 = 1.2$, $24 = 1.2.3.4$. $720 = 1.2.3.4.5.6$. Quare $x = \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{1.2.3.4}v^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6}v^6$ &c. Quod si jam terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C &c. erit $x = \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{3.4}Av^2 + \frac{1}{5.6}Bv^2 - \frac{1}{7.8}Cv^2$ &c, in infinitum.

COROLLARIUM. 1.

164. Quoniam radius $= 1$, erit sinus complementi seu cosinus arcus $v = 1 - \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3.4}v^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}v^6 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}v^8$ &c.

COROLLARIUM 2.

165. Si $1 - \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3.4}v^4$, sive $1 -$

$\frac{1}{7}v^2 + \frac{1}{24}v^4$ praxi satisfacit pro sinu complementi arcus, & cosinus iste dicatur c; erit $c = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$, consequenter $v = \sqrt{(6 + \sqrt{(24c + 12)})}$ (§. 143. *part. 1*).

PROBLEMA 57.

Tab. II. Fig. 20. 166. *Dato arcu* BM *invenire secantem* KC.

Sit BC = 1, arcus = v, erit KB = $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 +$ &c. (§. 161) adeoque $BC^2 = 1$, KB = $v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6$ &c. consequenter (§. 417. *Geom.*) ob $\frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6 = \frac{17}{45}v^6$ $KC^2 = 1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6$ &c. Quodsi inde radix vulgari modo extrahatur, prodit KC = $1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{24}v^4 + \frac{61}{720}v^6$ &c. quemadmodum typus exempli ostendit.

$1 + v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6$ &c.

1

$+ v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6$ &c.

(2)

$+ v^2 + \frac{1}{4}v^4$

$+ \frac{5}{12}v^4 + \frac{17}{45}v^6$ &c.

$(2 + v^2)$

$+ \frac{5}{12}v^4 + \frac{5}{24}v^6$ &c.

$+ \frac{61}{360}v^6$ &c.

$(2 + v^2 + \frac{5}{12}v^4)$

$+ \frac{61}{360}v^6$ &c.

&c. &c.

SCHOLION.

167. *Seriem pro sinu & sinu verso ex arcu atque pro arcu ex iisdem determinando invenit* Newtonus (l); *seriem pro tangente & secante, ex arcu atque arcu ex tangente determinando,* Jacobus Gregorius (m). *Existimavit autem* Leibnitius *series istas Trigonometriam canonicam ad quantamcunque exactitudinem in numeris a Tabularum necessitate liberare.*

PROBLEMA 58.

168. *Rectificare cycloidem.* Tab. I.

Sit AQ = x, AB = 1, erit Qq = M Fig.
S = dx, PQ = $\sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 7.
part. 1) & hinc AP = $\sqrt{x} = x^{1:2}$ (§. 417 *Geom.*), consequenter ob △△ APQ & MmS similitudinem supra demonstratam (§. 131)

$$AQ : AP = MS : Mm$$
$$x : x^{1:2} = dx : x^{-1:2}dx$$

Est ergo Mm differentiale arcus Cycloidici AM = $x^{-1:2}dx$. Unde $\int x^{-1:2}dx = 2x^{1:2} = 2$AP est arcus AM, seu arcus Cycloidis AM est chordæ arcus circuli genitoris ipsi respondentis AP duplus.

PROBLEMA 59.

169. *Data chorda arcus* AP *in-* Tab.
venire arcum cognominem, quem IV.
subtendit. Fig.

Sit AB = 1, AP = x: cum angulus 49.
APB

(l) Vide Commercium epistolicum *D.* Joh. Collins p. 40. 52.
(m) Ibidem p. 45.

APB sit rectus (*§. 317 Geom.*) erit $PB=\sqrt{(1-x^2)}$ (*§. 417 Geom.*). Sit porro Ap ipsi AP infinite propinqua. Quoniam angulus $AQB=APB+PAp$ (§. 239 *Geom.*) & PAp, cujus mensura est $\frac{1}{2}Pp$ (*§. 314. Geom.*); erit AQB=APB (§.4), consequenter rectus (§. 145 *Geom.*). Est igitur & $PQp=AQB$ (§. 156. *Geom.*) rectus (*§.145 Geom.*) itidemque AQP rectus (*§.65 Geom.*) adeoque ipsi APQ æqualis (*§.145 Geom.*) & hinc AP=AQ (§. 251.89 *Geom.*), consequenter QP differentiale chordæ AP (§.6)$=dx$. Porro anguli PAB mensura est arcus dimidius PB & anguli QPp mensura $\frac{1}{2}pB$ (*§. 314. Geom.*): quare cum arcus PB & pB ob infinite parvum Pp sint æquales (§. 4), erit angulus $PAB=QPp$ (*§. 141 Geom.*). Habemus itaque (*§. 267 Geom.*)

$$PB : AB = pQ : Pp$$
$$\sqrt{(1-x^2)} : 1 = dx :$$

adeoque $Pp=dx : \sqrt{(1-x^2)}$ & hinc porro arcus $AP = \int dx : \sqrt{(1-x^2)}$. Eadem igitur formula satisfacit arcui AP ex chorda cognomine determinando, quam supra invenimus pro eodem ex sinu PM determinando (§.153), nimirum arcus AP

$$=x+\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1.3}{2.4.5}x^5+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^9 \text{ \&c. in infinitum.}$$

Quodsi $PB=x$, erit $PQ=dx$ & $AP=(\sqrt{1-x^2})$, atque eodem prorsus modo reperitur arcus $PB=\int dx : \sqrt{(1-x^2)}$, ut adeo eadem series satisfaciat utrique arcui AP & PB inveniendo.

PROBLEMA 60.

170. *Data chorda arcus* AP *invenire segmentum circuli cognomine.*

Sit diameter circuli AB=1, chorda $AP=x$, erit per demonstrata in problemate præcedente $PB=\sqrt{(1-x^2)}$ & $pQ=dx$, nec non $\triangle APB \backsim \triangle PQp$: erit etiam (§.267 *Geom.*)

$$PB : AP = pQ : PQ$$
$$\sqrt{(1-x^2)} : x = dx :$$

adeoque $PQ=xdx : \sqrt{(1-x^2)}$, consequenter cum PQ haberi possit per arcu infinite parvo ex centro A radio AP descripto (§. 38), adeoque APQ pro sectore circulari, erit $APQ=x^2dx : 2\sqrt{(1-x^2)}$ (§. 435 *Geom.*) $=\frac{1}{2}x^2dx(1-x^2)^{-1:2}$.

Est vero $(1-x^2)^{-1:2}$ seu $1:\sqrt{(1-x^2)}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8$ &c. (*§.153*), adeoque

$$APQ=\tfrac{1}{2}x^2dx(1-x^2)^{-1:2}=\tfrac{1}{2}x^2dx$$
$$+\tfrac{1}{4}x^4$$

$+\frac{1}{4}x^4dx + \frac{1.3}{4.4}x^6dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^8dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{10}dx$ &c. in infinit:

Ergo segmentum circuli AP = $\frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{4.5}x^5 + \frac{1.3}{4.4.7}x^7 + \frac{1.3.5}{4.4.6.9}x^9 + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.11}x^{11}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA 61.

Tab. IV. Fig. 49. 171. *Dato arcu* AP *invenire chordam cognominem.*

Sit diameter circuli AB=1, AP=x, erit arcus AP $= x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. (§. 169). Dicatur idem arcus v, erit $v = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. adeoque AP $= x = v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.7.8.9}v^9$ &c. in infinitum, ut supra (§. 160).

Quodsi diameter dicatur d, non 1, reperietur arcus AP $= x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{1.3}{2.3.5d^4}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6}x^7$ &c. & vicissim chorda AP $= v - \frac{1}{1.2.3d^2}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5d^4}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7d^6}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.7.8.9d^8}v^9$ &c. id quod calculos superiores repetenti apparet.

PRBOLEMA 62.

172. *Rectificare arcum ellipsis* GM. Tab. II. Fig. 10.

Sit C$G=c$, AC$=a$, PC$=x$, PM=y, erit (§.432 *part. 1*)

$$a^2y^2 = a^2c^2 - c^2x^2$$

$$2a^2ydy = -2c^2xdx$$

$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$

$$dy^2 = \frac{c^4x^2dx^2}{a^4y^2} = \frac{c^4x^2dx^2}{a^4c^2 - a^2c^2x^2} = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2} = \frac{a^4dx^2 - a^2x^2dx^2 + c^2x^2dx^2}{a^4 - a^2x^2}$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{\sqrt{(a^4 - a^2x^2)}} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Ut

Ut elementum hoc integrabile reddatur, tam numerator $\sqrt{(a^4-a^2x^2+c^2x^2)}$, quam denominator $a\sqrt{(a^2-x^2)}$, resolvendus est in seriem & series prior per posteriorem dividenda eo modo, quem mox subjiciemus. Est itaque (§.99 *part. 1*) in casu primo

$m=1$ $n=2$ $P=a^4$ $Q=-(a^2+c^2)x^2:a^4$

Fiat $a^2-c^2=b^2$ ob commoditatem calculi, erit $Q=-b^2x^2:a^4$.

Unde porro obtinetur

$$P^{m:n}=a^2=A$$

$$\frac{m}{n}AQ=\frac{1}{2}.a^2.-\frac{b^2x^2}{a^4}=-\frac{b^2x^2}{2a^2}=B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{1}{4}.-\frac{b^2x^2}{2a^2}.-\frac{b^2x^2}{a^4}=-\frac{b^4x^4}{8a^6}=C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{3}{6}.-\frac{b^4x^4}{8a^6}.-\frac{b^2x^2}{a^4}=-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}=D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{5}{8}.-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}.-\frac{b^2x^2}{a^4}=-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}\ \&c.$$

Est itaque $\sqrt{(a^4-b^2x^2)}=\sqrt{(a^4-a^2x^2+c^2x^2)}=a^2-\frac{b^2x^2}{2a^2}-\frac{b^4x^4}{8a^6}-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$ &c. in infinitum $=K$

Enimvero $\sqrt{(a^2-x^2)}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$ &c. in infinitum (§. 126.). Qare $a\sqrt{(a^2-x^2)}=a^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{x^4}{8a^2}-\frac{x^6}{16a^4}-\frac{5x^8}{128a^6}$ &c. in infin. (§.126) $=L$.

Seriem adeo primam K per alteram L divisurus probe observare debes omnes terminos in divisione emergentes, in quibus *x* ad eandem dimensionem assurgit, haberi pro uno, cum pro coëfficientibus omnibus simul sumtis substitui possit unus, qualis etiam in casu singulari revera prodiret, ubi *a* & *b* in numeris dantur, si fractiones ad eandem denominationem reductæ in unam summam colligerentur. Quamobrem terminus unusquisque dividendæ dividitur per *a*, quotcunque partibus fuerit auctus in ipso divisionis actu, & integra series dividens ducitur in quotum atque a dividenda subtrahitur, quemadmodum in communi divisione fieri solet: id quod ex typo exempli subjecti attento lectori obvium.

$$K = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$L = a^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$\text{Resid. I.} - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{16a^4} + \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$\text{L. B} = -\frac{b^2x^2}{2a^2} + \frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{16a^6} + \frac{b^2x^8}{32a^8}$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{x^8}{32a^6}$$

$$\text{Resid. II.} \quad -\frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$-\frac{b^2x^4}{4a^4} - \frac{b^2x^6}{16a^6} - \frac{b^2x^8}{32a^8}$$

$$+\frac{3x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{9x^8}{128a^8}$$

$$\text{L. C} = -\frac{b^4x^4}{8a^6} + \frac{b^4x^6}{16a^8} + \frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$

$$-\frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{8a^6} + \frac{b^2x^8}{32a^8}$$

$$+\frac{3x^4}{8a^2} - \frac{3x^6}{16a^4} - \frac{3x^8}{64a^6}$$

$$\text{Resid. III.} = -\frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$-\frac{b^4x^6}{16a^8} - \frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$

A.	B.	C.	D.	E.
1	$-\frac{b^2x^2}{2a^4}$	$-\frac{b^4x^4}{8a^8}$	$-\frac{b^6x^6}{16a^{12}}$	$-\frac{5b^8x^8}{128a^{16}}$
	$+\frac{x^2}{2a^2}$	$-\frac{b^2x^4}{4a^6}$	$-\frac{b^4x^6}{16a^{10}}$	$-\frac{b^6x^8}{32a^{14}}$
		$+\frac{3x^4}{8a^4}$	$-\frac{3b^2x^6}{16a^8}$	$-\frac{3b^4x^8}{64a^{12}}$
			$+\frac{5x^6}{16a^6}$	$-\frac{5b^2x^8}{32a^{10}}$
				$+\frac{35x^8}{128a^8}$

$$-\frac{3b^2x^6}{16a^6} - \frac{b^2x^8}{16a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^4} + \frac{15x^8}{128a^6}$$

$$\text{L.D} = -\frac{b^6x^6}{16a^{10}} + \frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16a^8} + \frac{b^4x^8}{32a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^6} + \frac{3b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{32a^6}$$

$$-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$-\frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$
$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{5b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{35x^8}{128a^6}$$

&c. &c.

Subſtituatur jam valor ipſius b. Quoniam

$b^2 = a^2 - c^2$

$b^4 = a^4 - 2a^2c^2 + c^4$

$b^6 = a^6 - 3a^4c^2 + 3a^2c^4 - c^6$

$b^8 = a^8 - 4a^6c^2 + 6a^4c^4 - 4a^2c^6 + c^8$

erit

I.

$$-\frac{b^2x^2}{2a^4} = -\frac{x^2}{2a^2} + \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$+\frac{x^2}{2a^2} = +\frac{x^2}{2a^2}$$
$$B = +\frac{c^2x^2}{2a^4}$$

$-b^4x^4$

2.

$$-\frac{b^4x^4}{8a^8} = -\frac{x^4}{8a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$

$$-\frac{b^2x^4}{4a^6} = -\frac{x^4}{4a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6}$$

$$+\frac{3x^4}{8a^2} = +\frac{3x^4}{8a^2}$$

$$C = +\frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$

3.

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{12}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8} - \frac{3c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$

$$-\frac{b^4x^6}{16a^{10}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{c^2x^6}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{16a^{10}}$$

$$-\frac{3b^2x^6}{16a^8} = -\frac{3x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8}$$

$$+\frac{5x^6}{16a^6} = +\frac{5x^6}{16a^6}$$

$$D = +\frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{4c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$

4.

$$-\frac{5b^8x^8}{128a^{16}} = -\frac{5x^8}{128a^8} + \frac{5c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{30c^4x^8}{128a^{12}} + \frac{5c^6x^8}{32a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

$$-\frac{b^6x^8}{32a^{14}} = -\frac{x^8}{32a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{32a^{12}} + \frac{c^6x^8}{32a^{14}}$$

$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{12}} = -\frac{3x^8}{64a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{64a^{12}}$$

$$-\frac{5b^2x^8}{32a^{10}} = -\frac{5x^8}{32a^8} - \frac{5c^2x^8}{32a^{10}}$$

$$+\frac{35x^8}{128a^8} = +\frac{35x^8}{128a^8}$$

$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} + \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Habemus itaque

$A = 1$

$B = \frac{c^2x^2}{2a^4}$

$C = \frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$

$D = \frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$

$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^4} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$

Quamobrem prolixo ſatis calculo, quem tamen diſtincte hic explicari conſultum fuit, ut ſit exemplar in caſibus ſimilibus, tandem reperitur $\frac{\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

$$= 1 + \frac{c^2x^2}{2a^4} + \frac{c^2x^4}{2a^6} + \frac{c^2x^6}{2a^8} + \frac{c^2x^8}{2a^{10}} \ \&c.$$

$$-\frac{c^4x^4}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}}$$
$$+\frac{c^6x^6}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}}$$
$$-\frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$

Est igitur elementum arcus $\frac{dx\sqrt{(a^4-a^2x^2+c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$

$$= dx + \frac{c^2x^2\,dx}{2a^4} + \frac{c^2x^4\,dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6\,dx}{2a^8}$$
$$-\frac{c^4x^4\,dx}{8a^8} - \frac{c^4x^6\,dx}{4a^{10}}$$
$$+\frac{c^6x^6\,dx}{16a^{12}}$$
$$+\frac{c^2x^8\,dx}{2a^{10}} \text{ \&c. in infinitum.}$$
$$-\frac{3c^4x^8\,dx}{8a^{12}}$$
$$+\frac{3c^6x^8\,dx}{16a^{14}}$$
$$-\frac{5c^8x^8\,dx}{128a^{16}}$$

Tandem adeo arcus GM =

$$x + \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} + \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$-\frac{c^4x^5}{40a^8} - \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+\frac{c^6x^7}{112a^{12}} + \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$-\frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

Quodsi terminorum homogeneorum coëfficientes reducas ad eandem denominationem; erit

$$GM = x + \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{4a^2c^2-c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2-4a^2c^4+c^6}{112a^{12}}x^7 + \frac{64a^6c^2-48a^4c^4+24a^2c^6-5c^8}{1152a^{10}}x^9$$

COROLLARIUM. 1.

173. Quodsi ponamus esse GC : AC = 1 : m, adeoque AC = mc; erit

$$GM = x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 + \frac{4m^2-1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4-4m^2+1}{112m^{12}c^6}x^7 + \frac{64m^6-48m^4+24m^2-5}{1152m^{16}c^{18}}x^9 \text{ \&c.}$$

Quare si species ellipsis in casu dato determinetur, hoc est, m per numerum determinatum explicetur; prodibit series multo simplicior. Sit enim $m = 2$, erit

$$GM = x + \frac{1}{96c^2}x^3 + \frac{3}{2048c^4}x^5 + \frac{113}{458752c^6}x^7 + \frac{3419}{75497412}x^9 \text{ \&c.}$$

COROLLARIUM 2.

174. Quodsi $c = a$, ellipsis degenerat in circulum & series pro circulo evadit

$$x + \frac{x^3}{6a^2} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6} + \frac{35x^9}{1152a^8} \text{ \&c.}$$

hoc est, si $a = 1$, series $= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5$

PRO-

$+ \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ &c. prorsus ut supra (§. 153).

PROBLEMA 63.

Tab. II. Fig. 24. 175. *Rectificare arcum hyperbolæ* AM.

Sit $BC = AB = c$ $CQ = QM = x$ dimidius axis conjugatus $= a$ $CP = y$ erit $BP = y + c$, $AP = y - c$

$AP . PB = y^2 - c^2$

Quare (§. 469 *part. 1.*)

$$a^2 : c^2 = x^2 : y^2 - c^2$$

$$a^2y^2 - a^2c^2 = c^2x^2$$

$$a^2y^2 = a^2c^2 + c^2x^2$$

$$2a^2ydy = 2c^2xdx$$

$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$

h.e. $a^4c^2dy^2 + a^2c^2x^2dy^2 = c^4x^2dx^2$

$$a^4dy^2 + a^2x^2dy^2 = c^2x^2dx^2$$

$$dy^2 = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$= \frac{a^4dx^2 + a^2x^2dx^2 + c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx\sqrt{(a^4 + a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

Elementum hoc nonnisi signis differt ab elemento ellipsis (§. 172). Quamobrem eodem prorsus modo, quo in problemate præcedente, reperitur elementum arcus $Mm =$

$$dx + \frac{c^2x^2dx}{2a^4} - \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} - \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} + \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} - \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

Quare arcus $AM =$

$$x + \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} - \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} + \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} - \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

hoc est, reductione coëfficientium in eodem termino ad eandem denominationem facta, $x + \frac{c^2x^3}{6a^4}$

$$- \frac{4a^2c^2 - c^4\, x^5}{40a^8} + \frac{8a^4c^2 + 4a^2c^4 + c^6\, x^7}{112a^{12}}$$
$$- \frac{64a^6c^2 - 48a^4c^4 - 24a^2c^6 - 5c^8\, x^9}{1152a^{16}} \text{ \&c.}$$

Quodsi denuo hyperbolæ axes

 ponan-

ponantur inter se ut 1 ad m, hoc est, si sit $a = mc$, reperietur arcus

$$AM = x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 - \frac{4m^2-1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4+4m^2+1}{112m^{12}c^6}x^7 - \frac{64m^6-48m^4-24m^2-5}{1152m^{16}c^{18}}x^9 \text{ \&c.}$$

Et si species hyperbolæ determinetur, explicando m per numerum determinatum, erit

$$AM = x + \frac{1}{96c^2}x^3 - \frac{3}{2048c^4}x^5 + \frac{113}{458752c^6}x^7 - \frac{3419}{75497472c^8}x^9 \text{ \&c.}$$

Series adeo pro arcu hyperbolico a serie pro arcu elliptico non differt nisi signis.

COROLLARIUM.

176. Si hyperbola fuerit æquilatera, erit $c = a$ & series pro arcu AM multo simplicior evadit. Est nempe

$$= x + \frac{x^3}{6a^2} - \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{13x^7}{112a^6} - \frac{101x^9}{1152a^8} \text{ \&c.}$$

PROBLEMA 64.

177. *Rectificare Logarithmicam.*

Tab. I. Fig. 8. Sit curvæ subtangens $= a$, $PM = y$, $Pp = dx$, erit (§. 54)

$$\frac{ydx}{dy} = a$$

$$ydx = ady$$

$$dx = \frac{ady}{y}$$

$$dx^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2} + dy^2$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dy\sqrt{\left(\frac{a^2}{y^2}+1\right)}$$

Ut elementum hoc mM integrabile reddatur, ex $a^2 : y^2 + 1$ extrahenda est radix. Erit itaque in theoremate generali (§. 99 *part.* 1.)

$$m=1 \quad n=2 \quad P = \frac{a^2}{y^2}. \quad Q = 1 : \frac{a^2}{y^2} = \frac{y^2}{a^2}$$

$$P^{m:n} = \frac{a}{y} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}.\frac{a}{y}.\frac{y^2}{a^2} = \frac{y}{2a} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4}.\frac{y}{2a}.\frac{y^2}{a^2} = -\frac{y^3}{8a^3} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{y^3}{8a^3}.\frac{y^2}{a^2} = +\frac{y^5}{16a^5} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}.\frac{y^5}{16a^5}.\frac{y^2}{a^2} = -\frac{5y^7}{128a^7} \text{ \&c.}$$

Est itaque $\sqrt{\left(\frac{a^2}{y^2}+1\right)} = \frac{a}{y} + \frac{y}{2a} - y^3 +$

$\frac{y^3}{8a^3} + \frac{y^5}{16a^5} - \frac{5y^7}{128a^7}$ &c. in infinitum.

Eadem series prodit, si ex $\sqrt{(a^2 + y^2)}$ extrahatur radix (§. *cit.*) &, quæ provenit, $a + \frac{y^2}{2a} - \frac{y^4}{8a^3} + \frac{y^6}{16a^5} - \frac{5y^8}{128a^7}$ porro dividatur per y. Habemus itaque elementum M*m* arcus interminati MI $= \frac{a\,dy}{y} + \frac{y\,dy}{2a} - \frac{y^3\,dy}{8a^3} + \frac{y^5\,dy}{16a^5} - \frac{5y^7\,dy}{128a^7}$ &c.

Quare arcus MI $= \int \frac{a\,dy}{y} + \frac{y^2}{4a} - \frac{y^4}{32a^3} + \frac{y^6}{96a^5} - \frac{5y^8}{1024a^7}$ &c.

Ponatur SQ = z, erit arcus interminatus SI $= \int \frac{a\,dz}{z} + \frac{z^2}{4a} - \frac{z^4}{32a^3} + \frac{z^6}{96a^5} - \frac{5z^8}{1024a^7}$ &c.

Est igitur arcus MS $= \int \frac{a\,dy}{y} - \int \frac{a\,dz}{z} + \frac{y^2 - z^2}{4a} - \frac{y^4 + z^4}{32a^3} + \frac{y^6 - z^6}{96a^5} - \frac{5y^8 + 5z^8}{1024a^7}$ &c.

$\int \frac{a\,dy}{y} - \int \frac{a\,dz}{z}$ est spatium hyperbolicum asymptoticum inter duas semiordinatas $a^2 : y$ & $a^2 : z$ comprehensum, & per a divisum (§. 118).

Est autem a latus potentiæ hyperbolæ, y & z sunt abscissæ in asymptoto sumtæ (§. 488 *part. 1.*). Pendet adeo rectificatio curvæ logarithmicæ a quadratura hyperbolæ, quæ per series infinitas in superioribus data (§. 120).

Potest etiam alia adhuc ratione extrahi radix. Nimirum poni potest B = 1. $Q = \frac{a^2}{y^2} = a\, y^{-2}$. Quare cum sit ut ante $m = 1$, $n = 2$; erit

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2}.1.a^2 y^{-2} = \frac{1}{2}a^2 y^{-2} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4}.\frac{1}{2}a^2 y^{-2}.a^2 y^{-2} = -\frac{1}{8}a^4 y^{-4} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6}.-\frac{1}{8}a^4 y^{-4}.a^2 y^{-2} = +\frac{1}{16}a^6 y^{-6} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8}.\frac{1}{16}a^6 y^{-6}.a^2 y^{-2} = -\frac{5}{128}a^6 y^{-8}$ &c.

Est igitur elementum curvæ $dy + \frac{1}{2}a^2 y^{-2} dy - \frac{1}{8}a^4 y^{-4} dy + \frac{1}{16}a^6 y^{-6} dy - \frac{5}{128}a^6 y^{-8} dy$ &c. in infinitum.

Quare longitudo curvæ $= y - \frac{1}{2}a^2 y^{-1} + \frac{1}{24}a^4 y^{-3} - \frac{1}{80}a^6 y^{-5} + \frac{5}{896}a^8 y^{-7}$ &c.

&c. $= x - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{5a^8}{896y^7}$ &c.

Sit jam alia semiordinata SQ $= z$, erit longitudo curvæ $= z - \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896z^7}$ &c.

Ergo arcus inter semiordinatas y & z interceptus MS $= y - z - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896y^7} - \frac{5a^8}{896z^7}$ &c.

COROLLARIUM.

178. Quoniam series istæ satisfaciunt quæsito, quatenus convergunt, & termini continuo minores fiunt (§. 53. *part. 1*), in Logarithmica autem y continuo fit minor, ita ut tandem infra subtangentem a decrescat; serie prima utendum est, si $a > y$; posteriori autem si $y > a$.

PROBLEMA 65.

179. *Rectificare hyperbolam ex æquatione ad hyperbolam intra asymptotos.*

Quoniam $xy = a^2$ (§. 488. *part. 1*), erit

$$y = a^2 : x = ax^{-1}$$

$$dy = -a^2x^{-2}\,dx$$

$$dy^2 = a^4x^{-4}\,dx^2$$

$$dy^2 + dx^2 = dx^2 + a^4x^{-4}dx^2$$

$$\sqrt{(dy^2+dx^2)} = dx\sqrt{(1+a^4x^{-4})}$$

Elementum hoc arcus hyperbolici non multum differt ab elemento arcus logarithmicæ (§. 177).

Vi theorematis generalis (§. 99. *part. 1*)

$m = 1 \quad n = 2 \quad P = 1 \quad Q = a^4x^{-4}$

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}.1.a^4x^{-4} = \frac{1}{2}a^4x^{-4} = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{1}{4}.\frac{1}{2}a^4x^{-4}.a^4x^{-4} = -\frac{1}{2.4}a^8x^{-8} = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{3}{6}.-\frac{1}{2.4}a^8x^{-8}.a^4x^{-4} = +\frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12} = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{5}{8}.\frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12}.a^4x^{-4} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{16}x^{-16}$ &c.

Est igitur elementum curvæ $dx + \frac{1}{2}a^4x^{-4}dx - \frac{1}{2.4}a^8x^{-8}dx + \frac{1.3}{2.4.6}a^{12}x^{-12}dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{16}x^{-16}$ &c. consequenter longitudo curvæ $= x - \frac{1}{2.3}a^4x^{-3} + \frac{1}{2.4.7}a^8x^{-7} - \frac{1.3}{2.4.6.11}a^{12}x^{-11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15}a^{16}x^{-15}$ &c. $= x$

$-a^4$

$-\frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{1.3.a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3.5.a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}}$ &c. in infinitum.

Quodsi alia abscissa sit z; erit longitudo curvæ $z - \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c.

Arcus igitur inter semiordinatas abscissis x & z respondentes interceptus $= x - z - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}} - \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c. in infinitum.

Eadem prorsus series prodit, si in elemento curvæ generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituatur valor ipsius dx^2, ut elementum curvæ speciale evadat $dy\sqrt{(1+a^4y^{-4})}$. Enimvero cum y continuo decrescat, nec unquam sit major latere potentiæ a; series hæc altera parum convergit.

Quodsi a dicatur 1, erit series pro arcu intercepto $x - z - \frac{1}{2.3x^3} + \frac{1}{2.3z^3} + \frac{1}{2.4.7x^7} - \frac{1}{2.4.7z^7} - \frac{1.3}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15x^{15}} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c. in infinitum $= x - z - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{56x^7} - \frac{1}{56z^7} - \frac{1}{176x^{11}} + \frac{1}{176z^{11}} + \frac{5}{1920x^{15}} - \frac{5}{1920z^{15}}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA 66.

180. *Data area hyperbolæ intra asymptotos, invenire abscissam eidem respondentem.*

Sit area hyperbolæ $= t$, abscissa a fine lateris potentiæ hyperbolæ computata $= x$, erit (§. 120. *part. 1.*)

$$t = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \text{ \&c.}$$

Fiat $x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4$ &c.

erit $x^2 = + a^2t^2 + 2abt^3 + b^2t^4 + 2act^4$

$x^3 = + a^3t^3 + 3a^2bt^4$

$x^4 = + a^4t^4$

adeoque

$$x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4 \text{ \&c.}$$

$$-\tfrac{1}{2}x^2 = -\tfrac{1}{2}a^2t^2 - abt^3 - \tfrac{1}{2}b^2t^4 - act^4$$

$$+\tfrac{1}{3}x^3 = +\tfrac{1}{3}a^3t^3 + a^2bt^4$$

$$-\tfrac{1}{4}x^4 = -\tfrac{1}{4}a^4t^4$$

$$-t = -t$$

Habemus itaque

$a-1=0$ $\quad b-\frac{1}{2}a^2=0$

$a=1$ $\quad b=\frac{1}{2}$

$c-ab+\frac{1}{3}a^3=0$

h. e. $c-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=0$

$c=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

$d-\frac{1}{2}b^2-ac+a^2b-\frac{1}{4}a^4=0$

h.e. $d-\frac{1}{8}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=0$

$d=\frac{14}{48}-\frac{1}{4}=\frac{7}{24}-\frac{6}{24}=\frac{1}{24}$

Est igitur $x=t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4$ &c. $=\frac{1}{1}t+\frac{1}{1.2}t^2+\frac{1}{1.2.3}t^3+\frac{1}{1.2.3.4}t^4+\frac{1}{1.2.3.4.5}t^5$ &c. in infinitum. Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. erit $x=t+\frac{1}{2}At+\frac{1}{3}Bt+\frac{1}{4}Ct+\frac{1}{5}Dt$ &c. in infinitum.

SCHOLION.

181. *Eodem prorsus modo in aliis casibus inveniri potest basis, si figuræ area datur per seriem infinitam, ut pluribus exemplis non sit opus.*

PROBLEMA 67.

182. *Quadrare Cycloidem ex supposita arcus circuli rectificatione vi sinus versi.*

In Cycloide est arcus AP=PM (§.575. *part.1*). Jam si AQ=x, arcus AP, (§.157) consequenter, Tab. I. Fig. 7.

$PM=x^{1:2}+\frac{1}{6}x^{3:2}+\frac{3}{40}x^{5:2}+\frac{5}{112}x^{7:2}$ &c.

$PQ=x^{1:2}-\frac{1}{2}x^{3:2}-\frac{1}{8}x^{5:2}-\frac{1}{16}x^{7:2}$ (§.124)

$QM=2x^{1:2}-\frac{1}{3}x^{3:2}-\frac{1}{20}x^{5:2}-\frac{1}{56}x^{7:2}$

Quare elementum $QMmq=2x^{1:2}dx-\frac{1}{3}x^{3:2}dx-\frac{1}{20}x^{5:2}dx-\frac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. prorsus ut supra (§.131).

SCHOLION.

183. *Methodo hac quadrandi cycloidem usus est* Newtonus (n): *quam ideo superiori addidimus, ut appareat, quomodo subinde quadraturæ curvarum ex aliarum rectificationibus deducantur. Etenim pro circulo substitui possunt curvæ aliæ, quarum arcui* AP *æqualis est* PM. *Dari etiam possunt exempla, in quibus arcus datur non per abscissam, ut in exemplo præsente, sed per semiordinatam veluti si* AP *sit parabola* (§. 146).

PROBLEMA 68.

184. *Data chorda arcus cujuscunque invenire chordam arcus alterius, qui sit ad illam in ratione data.*

Sit diameter circuli $=d$
chorda arcus dati $=a$
ratio arcuum $=1:n$
chorda arcus quæsiti $=x$
erit (§.169)

arcus

(n) in Analysi per æquation, numero terminorum infinitas p. 18.

arcus datus $= a + \frac{1}{2.3d^2} a^3 + \frac{1.3}{2.4.5d^4} a^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6} a^7 \&c. = a + \frac{1}{2.3d^2} a^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5.d^4} a^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} a^7 \&c.$

arcus quæsitus $= x + \frac{1}{2.3d^2} x^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} x^7 \&c.$

Quoniam arcus datus ad quæsitum ut 1 ad n; erit (§. 297. *Arithm.*)

$$na + \frac{n}{2.3d^2} a^3 + \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} a^5 + \frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6} a^7 \&c. = x + \frac{1}{2.3d^2} x^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} x^7 \&c.$$

consequenter si prima series sit = A altera = B, erit B—A=0.

Fiat

$$x = ha + ia^3 + ka^5 + la^7 \&c.$$
$$x^3 = h^3a^3 + 3h^2ia^5 + 3h^2ka^7 + 3hi^2a^7$$
$$x^5 = + h^5a^5 + 5h^4ia^7$$
$$x^7 = h^7a^7$$

adeoque

$$x = ha + ia^3 + ka^5 + la^7 \&c.$$
$$+ \frac{1}{2.3d^2} x^3 = + \frac{1}{2.3d^2} h^3a^3 + \frac{1}{2d^2} h^2ia^5 + \frac{1}{2d^2} h^2ka^7 + \frac{1}{2d^2} hi^2a^7$$
$$+ \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} x^5 = + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4} h^5a^5 + \frac{3.3}{2.3.4d^4} h^4ia^7$$
$$+ \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} \&c.\ x^7 = + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6} \&c.\ h^7a^7$$
$$-A = -na - \frac{n}{2.3d^2} a^3 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} a^5 - \frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6} a^7$$

Habemus itaque

$$h - n = 0$$
$$h = n$$
$$i + \frac{1}{2.3d^2} h^3 - \frac{n}{2.3d^2} = 0$$
$$i = \frac{n + n^3}{2.3d^2}$$
$$= \frac{n\ 1 - n^2}{2.3d^2}$$

$$k + \frac{1}{2d^2}h^2i + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} = 0$$

$$k = \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} - \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 - \frac{1}{2d^2}h^2i$$

Est vero

$$h^5 = n^5$$

$$\frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 = \frac{9n^5}{2.3.4.5d^4}$$

$$h^2 = n^2$$

$$i = n - \frac{n^3}{2.3d^2}$$

$$h^2i = n^3 - \frac{n^5}{2.3d^2}$$

$$\frac{1}{2d^2}h^2i = \frac{n^3 - n^5}{3.4d^2}$$

$$= \frac{10n^3 - 10n^5}{2.3.4.5d^4}$$

Quamobrem

$$k = \frac{9n - 9n^5 - 10n^3 + 10n^5}{2.3.4.5d^4}$$

$$= \frac{9n - 10n^3 + n^5}{2.3.4.5d^4}$$

$$= \frac{n.\overline{1-n^2}.\overline{9-n^2}}{2.3.4.5d^4}$$

Eodem modo reperitur $l = \frac{n.\overline{1-n^2}.\overline{9-n^2}.\overline{25-n^2}}{2.3.4.5.6.7a^6}$

Est igitur chorda arcus quaesiti $= na + \frac{n.\overline{1-n^2}\,a^3}{2.3d^2} + \frac{n.\overline{1-n^2}.\overline{9-n^2}\,a^5}{2.3.4.5d^4} + \frac{n.\overline{1-n^2}.\overline{9-n^2}.\overline{25-n^2}\,a^7}{2.3.4.5.6.7d^6}$ &c. in infinitum.

SCHOLION.

185. *Cum sinus sit arcus dimidii subtensa dimidia* (§. 2. Trigon.); *formula praesens sinibus computandis inservit.*

PROBLEMA 69.

186. *Quadrare sectorem Ellipsis* DCM.

Ducatur C*m* ex centro C ipsi C [Tab.] M infinite propinqua & ex eo- [IV.] dem centro C radio CM describa- [Fig.] tur arcus MN, erit angulus ad N [5.] rectus (§. 38) & sector infinite parvus CMN = MN. $\frac{1}{2}$ CM (§. 435 *Geom.*). Est vero $Mm^2 - Nm^2 = MN^2$ (§ 417 *Geom.*).

Sit jam $AC = a$, parameter $= b$,
$PC = x$, $PM = y$
erit $AP = a - x$
$PB = a + x$

$$AP.PB = a^2 - x^2$$

consequenter (§. 420 *part. 1.*)

b: AB

$b : AB = PM^2 : AP.PB$

$b : 2a = y^2 : a^2 - x^2$

$$y^2 = \frac{a^2b - bx^2}{2a}$$

$$= \frac{2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$

Porro $CP^2 = x^2$

$$PM^2 = \frac{2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2a^3b - 2abx^2)}$$

$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2a^3b - 2abx^2)^{1:2}$$

$$Nm = \frac{2axdx - bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Jam $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2}$ (§. 172)

Est vero $c^2 = \frac{1}{2}ab$ (§. 423 *part. 1*).

Ergo $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + \frac{1}{2}abx^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2}$

$$= \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2}$$

Habemus itaque

$$NM^2 = \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2} + \frac{dx^2(-4a^2x^2 + 4abx^2 - b^2x^2)}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Quodsi jam partes has ipsius NM^2 reducas ad eandem de nominationem, prodibit $(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b) = 8a^5bx^2 - 8a^3bx^4 + 8a^2b^2x^4 - 8a^4b^2x^2 - 2ab^3x^4 + 4a^6b^2 + 2a^3b^3x^2$ & $(-4a^2x^2 + 4abx^2 - b^2x^2)(2a^3b - 2abx^2) = -8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 - 2a^3b^2x^2 + 8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 + 2ab^3x^4$.

Quare $NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^2}{(2a^3b - 2abx^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$

adeoque $NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}}$

Jam cum sit $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$; erit tandem elementum Sectoris $CMN = \frac{a^2bdx}{2\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}}$

$$= \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{2ab}.\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Est vero $\sqrt{2ab} = 2c$. Ergo $CMN = \frac{2acdx}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{acdx}{2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, conse-

quenter ſector BCM $= \frac{1}{2} c \int \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$

Enimvero $\int \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ eſt elementum arcus circuli LE radio CA deſcripti, cujus ſinus eſt PC (§. 153). Quare cum in ſuperioribus hunc arcum quadrare docuimus, non alia re opus eſt, quam ut is ducatur in $\frac{1}{2}c$ ſive quartum partem axis minoris CD, ut prodeat ſector ellipticus DCM.

COROLLARIUM.

187. Quodſi fiat $c = a$, hoc eſt CD = CE, Ellipſis degenerat in circulum, & formula pro ſectore DCM degenerat in $\frac{1}{2} a \int \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{1}{2}$ CE. LE, adeoque ſector ellipticus DCM in ſectorem circuli ECL (§. 435 *Geom.*). Eſt itaque

$$DCM : ECL = \frac{1}{2} c \int \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} : \frac{1}{2} a \int \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

$$= c : a \quad (\text{§. 124. } part. 1)$$

$$= CD : EL$$

hoc eſt, ſector ellipticus DCM eſt ad ſectorem circuli circa axem majorem deſcripti, ſinu arcuum PC utrobique exiſtente eodem, ut axis minor ad majorem.

SCHOLION.

188. *Pendet adeo quadratura ſectoris elliptici a quadratura ſectoris circuli.*

PROBLEMA 70.

189. *Quadrare ſectorem hyperbolicum* CAM *radio* CM *ex centro* C *ducto.*

Intelligatur radius C*m* ipſi CM infinite propinquus, & radio CM deſcribatur arcus circuli MN, erit ad N angulus rectus (§. 38.), $MN^2 = Mm^2 - Nm^2$ (§. 417 *Geom.*) & $\frac{1}{2}$CM. MN ſector infinite parvus CMN (§. 435 *Geom.*) ſeu elementum ſectoris hyperbolici quadrandi CAM. Tab. IV. Fig. 51.

Sit jam PC $= x$
AC = CB $= a$ erit AP $= x - a$
Parameter $= b$ PB $= x + a$

AP. PB $= x^2 - a^2$

adeoque (§. 459 *part. 1*)

AB : b = AP. PB : PM²
$2a : b = x^2 - a^2 :$

Quare

$$PM^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$CP^2 = x^2$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{2ax^2 + bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a} \sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)^{1:2}$$

$$Nm = \frac{2axdx + bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{dx^2(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Jam $y^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$

$$2ydy = \frac{2bxdx}{2a}$$

$$y^2dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2}$$

$$dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2y^2} = \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b} + dx^2$$

h. e $Mm^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

$$NM^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$+ \frac{dx^2(-4a^2x^2 - 4abx^2 - b^2x^2)}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Si fiat reductio ad eandem denominationem (§. 235 *Arithm.*), reperitur

$$b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b$$
$$4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b$$

$$- 2a^3b^3x^2 - 4a^4b^2x^2 + 4a^6b^2$$
$$+ 2ab^3x^4 + 4a^2b^2x^4 - 4a^4b^2x^2$$
$$+ 4a^2b^2x^4 + 8a^3bx^4 - 8abx^2$$

&

$$- 4a^2x^2 - 4abx^2 - b^2x^2$$
$$2abx^2 - 2a^3b$$

$$+ 8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 + 2a^3b^3x^2$$
$$- 8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 - 2ab^3x^2$$

consequenter productis hisce in unam summam collectis,

$$NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^2}{(2abx^2 - 2a^3b)(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

Jam $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$

$$\tfrac{1}{2}CM.NM = \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{2abx^2 - 2a^3b)}} = \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Est

Est vero $\sqrt{2ab}$ axis conjugatus (§.461.*part.1*) qui si dicatur $2c$; erit sectoris hyperbolici elementum

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

Jam in hyperbola æquilatera $a=c$ (§.505 *part.1.*). Ergo elementum sectoris $= \frac{a^2dx}{2\sqrt{(x^2-a^2)}}$.

Resolvatur $1 : \sqrt{(x^2-a^2)} = (x^2-a^2)^{-1:2}$ in seriem (§. 99 *part. 1.*), erit

$$m=-1 \quad n=2$$

$$P=x^2 \quad Q=-\frac{a^2}{x^2} = -a^2x^{-2}$$

$$P^{m:n} = x^{-1} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.x^{-1}.-a^2x^{-2} = +\tfrac{1}{2}a^2x^{-3} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}a^2x^{-3}.-a^2x^{-2} = +\frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}.-a^2x^{-2} = +\frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}.\frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}.-a^2x^{-2} = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}$$

Habemus itaque

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = x^{-1}dx + \tfrac{1}{2}a^2x^{-3}dx + \frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}dx \text{ \&c. in infinitum.}$$

Quare

$$\frac{acdx}{2\sqrt{(x^2-a^2)}} = \tfrac{1}{2}acx^{-1}dx + \tfrac{1}{4}a^3cx^{-3}dx + \frac{1.3}{4.4}a^5cx^{-5}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}a^7cx^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}a^9cx^{-9}dx$$

&c.

Habemus itaque sectorem CA

$$M = \tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx - \frac{1}{2.4}a^3cx^{-2} - \frac{1.3}{4.4.4}a^5cx^{-4} - \frac{1.3.5}{4.4.6.6}a^7cx^{-6} - \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.8}a^9cx^{-8}$$

$$\text{\&c.} = \tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx - \frac{a^3c}{2.4x^2} - \frac{1.3a^5c}{4.4.4x^4} - \frac{1.3.5a^7c}{4.4.6.6x^6} - \frac{1.3.5.7a^9c}{4.4.6.8.8x^8} \text{ \&c. in infinit.}$$

Quoniam $\tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx$ pendet a quadratura hyperbolæ intra asymptotos (§.120); evidens est quadraturam sectoris hyperbolici in hoc casu supponere quadraturam hyperbolæ intra asymptotos.

Quod-

Quodsi hyperbola ad axem secundum referenda, fiat dimidius axis secundus $CD=c$, $CA=CB=a$, $CQ=PM=x$, $CP=QM=y$, erit $PM^2=x^2$, $AP.PB=y^2-a^2$ & (§. 469 *part. 1.*)

$$AC^2 : CD^2 = AP.PB : PM^2$$
$$a^2 : c^2 = y^2-a^2 : x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2}-c^2=x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2}=x^2+c^2$$

Quoniam linea, quæ est tertia proportionalis ad axem secundum 2CD & primarium AB dicitur parameter respectu axis secundi, quemadmodum parameter respectu axis primarii AB est tertia proportionalis ad AB & 2CD (§. 461 *part. 1*); si parameter respectu axis 2CD dicatur p, erit $c:a=2a:p$, adeoque $2a^2:c=p$, consequenter $2a^2:c^2=p:c$ & $c^2:a^2=2c:p$. Hoc valore ipsius $c^2:a^2$ in æquatione substituto, prodit

$$\frac{2cy^2}{p}=x^2+c^2$$

$$y^2=\frac{px^2+c^2}{2c}$$

Jam $PM^2=x^2$

Ergo $CM^2=x^2+\frac{px^2+pc^2}{2c}$

$$=\frac{2cx^2+px^2+pc^2}{2c}$$
$$=\frac{4cx^2+2pcx^2+2pc^3}{4c^2}$$

$$CM=\frac{1}{2c}\sqrt{(4c^2x^2+2pcx^2+2pc^3)}$$

$$Nm=\frac{2cxdx+pxdx}{\sqrt{(4c^2x^2+2pcx^2+pc^3)}}$$

Porro $y^2=\frac{px^2+pc^2}{2c}$

adeoque $2ydy=\frac{2pxdx}{2c}$

$$dy^2=\frac{p^2x^2dx^2}{4c^2y^2}$$
$$=\frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2+2c^3p}$$

$$Mm^2=\frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2+2pc^3}+dx^2$$
$$=\frac{p^2x^2dx^2+2pcx^2dx^2+2pc^3dx^2}{2pcx^2+2pc^3}$$

$$Nm^2=\frac{(4c^2x^2+4pcx^2+p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2+2pcx^2+2pc^3}$$

$$NM^2 = \frac{(px^2+2pcx^2+2pc^3)dx^2}{2pcx^2+2pc^3} + dx^2 \frac{(-4c^2x^2-4pcx^2-p^2x^2)}{4c^2x^2+2pcx^2+2pc^3} = \frac{4p^2c^6dx^2}{(2pcx^2+2pc^3)(4c^2x^2+2pcx^2+2pc^3)}$$

$$NM = \frac{2pc^3dx}{\sqrt{(2pcx^2+2pc^3)}.\sqrt{(4c^2x^2+2pcx^2+2pc^3)}}$$

$$\tfrac{1}{2}CM = \frac{1}{4c}\sqrt{(4c^2x^2+2pcx^2+2pc^3)}$$

$$CMN = \frac{2pc^2dx^2}{4\sqrt{pc}\sqrt{(x^2+c^2)}} = \frac{cdx\sqrt{2pc}}{4\sqrt{(c^2+x^2)}} = \frac{acdx}{2\sqrt{(c^2+x^2)}} \text{ ob } \sqrt{2bc}=2a. = \tfrac{1}{2}acdx(c^2+x^2)^{-1:2}$$

Resolvatur $1:\sqrt{(c^2+x^2)}$ in seriem: erit in theoremate generali (*§. 99 part. 1.*)

$m=-1 \quad n=2 \quad P=c^2 \quad Q=\frac{x^2}{c^2}$

$P^{m:n}=c^{-1}=\frac{1}{c}=A$

$\frac{m}{n}AQ = -\frac{1}{2}.\frac{1}{c}.\frac{x^2}{c^2} = -\frac{x^2}{2c^3} = B$

$\frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{3}{4}.-\frac{x^2}{2c^3}.\frac{x^2}{c^2} = +\frac{1.3x^4}{2.4c^5} = C$

$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\frac{5}{6}.\frac{1.3x^4}{2.4c^5}.\frac{x^2}{c^2} = -\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7} = D$

$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\frac{7}{8}.-\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7}.\frac{x^2}{c^2} = +\frac{1.3.5.7x^8}{2.4.6.8c^9}$ &c.

Est itaque $\frac{acdx}{2\sqrt{(c^2+x^2)}} = \frac{1}{2}adx - \frac{ax^2dx}{4c^2} + \frac{1.3ax^4dx}{4.4c^4} - \frac{1.3.5ax^6dx}{4.4.6c^6} + \frac{1.3.5.7ax^8dx}{4.4.6.8c^8}$ &c. consequenter $CMA = \frac{1}{2}ax - \frac{ax^3}{3.4c^2} + \frac{1.3ax^5}{4.4.5c^4} - \frac{1.3.5ax^7}{4.4.6.7c^6} + \frac{1.3.5.7ax^9}{4.4.6.8.9c^8}$ &c.

Patet igitur, quadraturam sectoris hyperbolici CAM hoc in casu non pendere a Quadratura hyperbolæ intra asymptotos. Quoniam tamen x ultra a in infinitum excrescit; ubi procul a vertice discesseris, series posterior minus convergit priori; sed quamdiu $x < a$, eadem magis convergit.

COROLLARIUM. 1.

190. Quoniam in hyperbola $y^2 = (bx^2$

$(bx^2+bc^2):2c$; erit $2c : b = x^2 + c^2 : y^2$, hoc est, axis secundus seu conjugatus est ad ipsius parametrum ut Quadratum semiordinatæ PM & dimidii axis conjugati CD ad Quadratum distantiæ semiordinatæ a centro CP.

COROLLARIUM. 2.

191. Cum in hyperbola æquilatera sit $c=a$, sector hyperbolicus est $\int a^2dx : 2\sqrt{(a^2+x^2)} = \frac{1}{2}ax - \frac{x^3}{3.4a} + \frac{1.3x^5}{4.4.5a^3} - \frac{1.3.5x^7}{4.4.6.7a^5} + \frac{1.3.5.7x^9}{4.4.6.8.9a^7}$ &c.

PROBLEMA 71.

Tab. IV. Fig. 52. 192. *Data tangente* AE *arcus elliptici* AM *invenire sectorem* AMC.

Quoniam tangens AE axi conjugato DC est parallela (§. 448. 444 *part. 1*), DC vero ad AB perpendicularis; erit etiam EA perpendicularis ad AB (§. 230. *Geom.*, adeoque angulus ad A rectus (§. 78. *Geom.*). Sit jam $AC=a$, $CD=1$, $AE=x$, $PM=y$. Ducatur Ce ipsi CE infinite propinqua, & ex centro C radio CE arcus EN atque radio CM arcus MO. Erit Δ EeN $\backsim$ Δ AEC, quemadmodum supra in casu simili (§. 124) demonstratum est, $Ee=dx$ & ob $EC^2=AE^2+AC^2$ (§. 417 *Geom.*) $EC = \sqrt{(x^2+a^2)}$. Jam cum sit (§. 267 *Geom.*)

$$EC : AC = Ee : EN$$
$$\sqrt{(x^2+a^2)} : a = dx :$$

erit $EN = \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$

Porro ob parallelismum rectarum AE & PM (§. 256. *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$EA : AC = PM : PC$$
$$x : a = y :$$

adeoque $PC = \frac{ay}{x}$

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2}.$$

Porro (§. 430 *part. 1.*)

$$CD^2 : AC^2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$
$$1 : a^2 = y^2 : a^2 - \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Quare (§. 297. *Arithm.*)

$$a^2y^2 = \frac{a^2x^2 - a^2y^2}{x^2}$$

$$x^2y^2 = x^2 - y^2$$

$$x^2y^2 + y^2 = x^2$$

$$PM^2 = y^2 = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2+1}$$

 CM²

$$CM^2 = \frac{x^2+a^2}{x^2+1}$$

$$CM = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{\sqrt{(x^2+1)}}$$

Denique ob sectores similes CEN & CMO (§.137.412.*Geom.*)

$$CE : EN = CM : OM$$

$$\sqrt{(x^2+a^2)} : \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{\sqrt{(x^2+1)}} :$$

adeoque $OM = \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}\sqrt{(x^2+1)}}$

Jam $\frac{1}{2}CM = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{2\sqrt{(x^2+1)}}$

Ergo $CMO = \frac{\frac{1}{2}adx}{1+x^2}$

Est igitur elementum sectoris elliptici ACE idem cum sectore circuli (§. 124), si CD=1.

Quare sector $AMC = \frac{1}{2}a(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c. in infinit.).

PROBLEMA 72.

Tab. IV. Fig. 52. 193. *Dato sectore* KFB *recta* KF *ex foco Ellipsis ducta, invenire semiordinatam* KQ.

Sit $AC = CB = a$ $QK = y$

$FB = b$ sector $KFB = \frac{1}{2}v$

$CD = c$ erit Differentiale ejus $\frac{1}{2}dv$

& ob $QB.QA = BC^2 - QC^2$ (§.431 *part.1.*) ex natura ellipsis (§.430. *part.1*)

$$CD^2 : CB^2 = QK^2 : CB^2 - QC^2$$

adeoque $CD^2 : QK^2 = CB^2 : CB^2 - QC^2$ (§.124 *part.1.*)

$$CD^2 : CD^2 - QK^2 = CB^2 : QC^2$$

$$c^2 : c^2 - y^2 = a^2 :$$

consequenter $CQ^2 = a^2(c^2-y^2) : c^2$

$$CQ = a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$$
$$CB = a$$

$$QB = a - a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$$
$$FB = b$$

$$FQ = b - a + a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$$

Differentiale ipsius $FQ = \frac{aydy}{c\sqrt{(c^2-y^2)}}$

$$KQ = y$$

Elementum segmenti $KQB = \frac{ay^2dy}{c\sqrt{(c^2-y^2)}}$

Porro

$$FQ = b - a + a\sqrt{(c^2-y^2)} : c$$
$$\tfrac{1}{2}QK = \tfrac{1}{2}y$$

$$\triangle FQK = \tfrac{1}{2}by - \tfrac{1}{2}ay + \frac{ay\sqrt{c^2-y^2)}}{2c}$$

Differ.

Differ. $\Delta FQK = \frac{1}{2} bdy - \frac{1}{2} ady$
$\frac{-ay^2 dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}} + ady\sqrt{(c^2-y^2)}:2c$

hoc est, reductione ad eandem denominationem facta,

$$d\Delta FQK = \frac{(bc-ac)\sqrt{(c^2-y^2)}\,dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}} + \frac{(ac^2-2ay^2)dy}{}$$

$$dKQB = \frac{2ay^2 dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}}$$

$$dFKB = \frac{(bc-ac)\sqrt{(c^2-y^2)}dy + ac^2 dy}{2c\sqrt{(c^2-y^2)}}$$
$$= \frac{acdy + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}dy}{2\sqrt{(c^2-y^2)}}$$

Habemus itaque

$$\frac{acdy + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}dy}{2\sqrt{(c^2-y^2)}} = \tfrac{1}{2}dv$$

$$[ac + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}]dy = dv\sqrt{(c^2-y^2)}$$

$$\frac{dy}{dv}[ac + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}] = \sqrt{(c^2-y^2)}$$

$$\frac{dy}{dv}[ac + (b-a)\sqrt{(c^2-y^2)}] - \sqrt{(c^2-y^2)} = 0$$

Jam ut valor ipsius y per v exprimatur, quod est quod quæritur, fiat

$$y = hv + iv^3 + lv^5 + mv^7 \text{ \&c.}$$

erit $dy = hdv + 3iv^2dv + 5lv^4dv + 7mv^6dv$

$$\frac{dy}{dv} = h + 3iv^2 + 5lv^4 + 7mv^6$$

$$y^2 = h^2v^2 + 2hiv^4 + i^2v^6 + 2hlv^6 \text{ \&c.}$$
$$y^4 = h^4v^4 + 4h^3iv^6 \text{ \&c.}$$
$$y^6 = h^6v^6 \text{ \&c.}$$

Porro $\sqrt{(c^2-y^2)} = c - \frac{y^2}{2c} - \frac{y^4}{8c^3} - \frac{y^6}{16c^5}$ (§. 99 *part. I*)

$$= c - \frac{h^2v^2}{2c} - \frac{2hiv^4}{2c} - \frac{i^2v^6}{2c} - \frac{2hlv^6}{2c}\text{ \&c.} - \frac{h^4v^4}{8c^3} - \frac{4h^3iv^6}{8c^3}\text{ \&c.} - \frac{h^6v^6}{16c^5}\text{ \&c.}$$

$$\frac{bdy}{dv} = bh + 3biv^2 + 5blv^4 + 7bmv^6$$

$$\begin{array}{llll}
\frac{bdy\sqrt{(c^2-y^2)}}{dv} = bch & +\, 3bciv^2 & +\, 5bclv^4 & +\, 7bcmv^6 \\
 & -\frac{bh^3}{2c} & -\frac{2bh^2i}{2c} & -\frac{bhi^2}{2c} \\
 & & & -\frac{2bh^2l}{2c} \\
 & & -\frac{bh^5}{8c^4} & -\frac{4bh^4i}{8c^3} \\
 & & -\frac{3bh^2i}{2c} & -\frac{bh^6}{16c^5} \\
 & & & -\frac{6bhi^2}{2c} \\
 & & & -\frac{5bh^2l}{2c} \\
 & & & -\frac{3bh^4i}{8c^3}
\end{array}$$

Quodsi pro b substituatur a, prodibit valor ipsius $\frac{ady}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)}$.

Quamobrem si hi valores in æquatione $\frac{dy}{dv}(ac+(b-a)\sqrt{(c^2-y^2)})-\sqrt{(c^2-y^2)}=0$ substituantur, prodibit

$$\begin{array}{llll}
\frac{acdy}{dv} = ach & +\, 3aciv^2 & +\, 5aclv^4 & +\, 7acmv^6 \;\&c. \\
\frac{bdy\sqrt{(c^2-y^2)}}{dv} = bch & +\, 3bciv^2 & +\, 5bclv^4 & +\, 7bcmv^6 \\
 & -\frac{bh^3}{2c} & -\frac{2bh^2i}{2c} & -\frac{bhi^2}{2c} \\
 & & & -\frac{7bh^2l}{2c}
\end{array}$$

$-bh^5$

$$\begin{array}{llll}
 & & -\frac{bh^5}{8c^3} & -\frac{7bh^4 i}{8c^3} \\
 & & -\frac{3bh^2 i}{2c} & -\frac{bh^7}{16c^5} \\
 & & & -\frac{6bhi^2}{2c}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
-\frac{ady\sqrt{(c^2-y^2)}}{dv} = -ach & -3aciv^2 & -5aclv^5 & -7acmv^6 & \text{\&c.} \\
 & +\frac{ah^3}{2c} & +\frac{2ah^2 i}{2c} & +\frac{ahi^2}{2c} & \\
 & & & +\frac{7ah^2 l}{2c} & \\
 & & +\frac{ah^5}{8c^3} & +\frac{7ah^4 i}{8c^3} & \\
 & & +\frac{3ah^2 i}{2c} & +\frac{ah^7}{16c^5} & \\
 & & & +\frac{6ahi^2}{2c} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
-\sqrt{(c^2-y^2)} = -c & +\frac{h^2v^2}{2c} & +\frac{2hiv^4}{2c} & +\frac{i^2v^6}{2c} & \\
 & & & +\frac{2hl}{2c} & \\
 & & +\frac{h^4}{8c^3} & +\frac{4h^3 i}{8c^3} & \\
 & & & +\frac{h^6}{16c^5} & \\
 & & & & \text{\&c.} = 0.
\end{array}$$

Habe-

Habemus itaque

$$ach + bch - ach - c = 0$$

$$bch - c = 0$$

$$bh - 1 = 0$$

$$bh = 1$$

$$h = \frac{1}{b}$$

$$3aci + 3bci - \frac{bh^3}{2c} - 3aci + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} = 0$$

$$6ac^2i + 6bc^2i - bh^3 - 6ac^2i + ah^3 + h^2 = 0$$

$$6bc^2i = bh^3 - ah^3 - h^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{a}{b^3} - \frac{1}{b^2} = -\frac{a}{b^3}$$

$$i = -\frac{a}{6b^4c^2}$$

$$5acl + 5bcl - \frac{2bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} - \frac{3bh^2i}{2c} - 5acl + \frac{2ah^2i}{2c} + \frac{ah^5}{8c^3} + \frac{3ah^2i}{2c} + \frac{2hi}{2c} + \frac{h^4}{8c^3} = 0$$

$$40ac^4l + 40bc^4l - 8bc^2h^2i - bh^5 - 12bc^2h^2i - 40ac^4l + 8ac^2h^2i + ah^5 + 12ac^2h^2i + 8c^2hi + h^4 = 0$$

h. e. $40bc^4l - 20bc^2h^2i - bh^5 + 20ac^2h^2i + 8c^2hi + h^4 = 0$

$$40bc^4l = 20bc^2h^2i + bh^5 - 20ac^2h^2i - 8c^2hi - h^4$$

$$h^2 = \frac{1}{b^2}$$

$$i = -\frac{a}{6b^4c^2}$$

$$h^2i = -\frac{a}{6b^6c^2}$$

$$20bc^2h^2i = -\frac{10a^2}{3b^5}$$

$$-20ac^2h^2i = +\frac{10a^2}{3b^6}$$

$$bh^5 = \frac{1}{b^4}$$

$$-ah^5 = -\frac{a}{b^5}$$

$$hi = -\frac{a}{6b^5c^2}$$

$$-8c^2hi = +\frac{4a}{3b^5}$$

Ergo $40bc^4l = -\frac{10a}{3b^5} + \frac{1}{b^4} + \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{3a}{3b^5} + \frac{4a}{3b^5} - \frac{1}{b^4} = 10a$

$$= \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{9a}{3b^5}$$

$$= \frac{10a^2 - 9ab}{3b^6}$$

$$l = \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}$$

Reperitur eodem modo $m = \frac{-280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}$, adeoque tandem $y = \frac{1}{b}v - \frac{a}{6b^4c^2}v^3 + \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}v^5 - \frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}v^6$ &c.

PROBLEMA 73.

Tab. IV. Fig. 53. 194. *Quadrare sectorem hyperbolicum* CAM, *data tangente ad verticem* AE:

Calculus prorsus idem, qui supra pro ellipsi in casu simili (§. 192).

Si enim $AC = CB = a$ $PM = y$
$AE = x$ $CD = 1$
erit $Ee = dx$ $EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$
& ob $\Delta\Delta$ AEC & EeN similitudinem $EN = adx : \sqrt{(x^2 + a^2)}$, ob similitudinem vero $\Delta\Delta$CPM & CAE ut in Ellipsi $PC = ay : x$, atque ob analogiam $CD^2 : AC^2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$ ex natura hyperbolæ (§. 469 *part. 1.*) $a^2y^2 = (a^2x^2 - a^2y^2) : x^2$. Hinc ut supra reperitur $CM = \sqrt{(a^2 + x^2)} : \sqrt{(1 + x^2)}$ & ob $CE : EN = CM : OM$ porro $OM = adx : \sqrt{(a^2 + x^2)}\sqrt{(1 + x^2)}$, tandemque elementum MOC sectoris $CMP = \frac{\frac{1}{2}adx}{1 + x^2}$: quod idem prorsus est, quod pro ellipsi & circulo reperimus.

COROLLARIUM.

195. Eadem ergo series sectoribus circuli, ellipsis atque hyperbolæ ex data tangente inveniendis inservit.

CAPUT IV.

DE USU CALCULI INTEGRALIS IN CUBANDIS SOLIDIS ET DIMETIENDIS SUPERFICIEBUS EORUNDEM.

DEFINITIO 8.

196. *Solidum cubare* idem est ac spatium solido comprehensum dimetiri.

PROBLEMA 74.

197. *Cubare solidum ex rotatione figuræ planæ* ANQ *circa rectam* AQ *tanquam axem facta genitum.* Tab. II. Fig. 19.

RESOLUTIO.

Sit ſemiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua: parallelogrammulum PMR*p* haud differet a trapeziolo PM*mp* (§. 99). Cylindrulus ergo, quem in rotatione figuræ ANQ circa axem AQ deſcribit parallelogrammulum PM R*p* (§.465 *Geom.*) eſt elementum ſolidi per illam rotationem producti: cujus adeo ſumma dat integrum ſolidum, quia ex innumeris cylindrulis eodem modo formatis conſtare concipitur.

Sit jam $AP=x$, $PM=y$, erit $Pp=dx$. Sit porro ratio radii ad peripheriam $=r:p$, erit peripheria circuli radio PM deſcripti $=py:r$, conſequenter area $py^2:2r$ (§.429 *Geom.*), quæ ducta in P*p* ſive *dx* dat ſoliditatem cylindruli ſeu elementi ſolidi $=py^2dx:2r$ (§.541 *Geom.*).

Quodſi jam ex æquatione ad curvam ſpeciali ſubſtituatur valor ipſius y^2; habebitur, ſi elementum integrari poſſit, ſoliditas ſegmenti, cujus altitudo AP, radius baſis P M, hoc eſt revolutione ipſius AM P circa AP geniti.

PROBLEMA 75.

Tab. II. Fig. 17. 198. *Cubare Conum.*

Conus deſcribitur, ſi triangulum ADC circa axem DC rotatur (§.467. *Geom.*). Sit $DC=a$, $AC=r$, $PM=y$, $DP=x$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$DP:PM=DC:AC$$
$$x:y=a:r$$

$$\text{Hinc}\quad rx:a=y$$
$$\&\quad r^2x^2:a^2=y^2$$

$$py^2dx:2r=pr^2x^2dx:2a^2r=prx^2dx:2a^2\ (\S.\ 189).$$

$$\int py^2dx:2r=prx^3:6a^2.$$

Quodſi pro x ſubſtituatur a; habebitur ſoliditas totius Coni $pra^3:6a^2=\frac{1}{6}apr=\frac{1}{2}pr.\frac{1}{3}a$. Baſis nempe $\frac{1}{2}pr$ ducenda eſt in tertiam altitudinis partem $\frac{1}{3}a$, ut ex elementis Geometriæ conſtat (§. 548. *Geom.*).

PROBLEMA 76.

199. *Cubare ſphæram.*

Sphæra cum deſcribatur per rotationem ſemicirculi circa diametrum ejus (§. 470. *Geom.*); erit, ſi diameter ſit $2r$,

$$yy=2rx-x^2\quad (\S.376.\ part.\ 1.)$$

$$\text{Unde}\ py^2dx:2r=pxdx-px^2dx:2r$$

$$\int py^2dx:2r=\tfrac{1}{2}px^2-px^3:6r$$

Habemus adeo indefinitam cubationem ſegmenti ſphærici, cujus diameter $2r$, altitudo x.

Quod-

Quodsi ergo pro x substituatur diameter $2r$; prodibit soliditas sphæræ integræ $2pr^2 - 8pr^3 : 6r = 2pr^2 - \frac{4}{3}pr^2 = \frac{2}{3}pr^2 = 2rp.\ \frac{1}{3}r$. Nimirum rectangulum ex diametro $2r$ in peripheriam p multiplicandum est per tertiam radii aut sextam diametri partem $\frac{1}{3}r$. Denique si diameter $2r$ sit 1; erit soliditas sphæræ $\frac{1}{6}p$.

COROLLARIUM 1.

200. Sphæra igitur æquatur pyramidi quadrangulari, cujus basis est rectangulum ex diametro sphæræ $2r$ in peripheriam eadem descriptam, altitudo semidiameter sphæræ (§. 548 *Geom.*).

COROLLARIUM. 2.

201. Cylindri sphæræ circumscripti soliditas est pr^2 (§. 541 *Geom.*). Est itaque ad sphæram ut pr^2 ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc est, ut 1 ad $\frac{2}{3}$, seu ut 3 ad 2 (§. 124 *part. 1.*).

PROBLEMA 77.

202. *Cubare Conoides parabolicum ex rotatione parabolæ cujuscunque generis cira axem suum genitum.*

Sit parameter $= 1$, erit æquatio ad infinita parabolarum genera (§. 519.)

$$y^m = x$$

$$y = x^{1:m}$$

$$y^2 = x^{2:m}$$

$$py^2 dx : 2r = px^{2:m} dx : 2r$$

$$\int py^2 dx : 2r = mpx^{2+m,\, :m} : (4+2m)\, r$$
$$= mpy^2 x : (4+2m) r$$

Sit altitudo totius Conoidis $= a$, diameter baseos $2r$; erit a pro x & r pro y substituto soliditas totius Conoidis $mpr^2 a : (4+2m)\, r = \frac{m}{4+2m} apr = \frac{1}{2}pr.\ \frac{m}{2+m} a$.

E. gr. Si parabola genitrix fuerit Apolloniana, erit $m = 2$, adeoque $m : (2+m) = 2 : (2+2) = \frac{1}{2}$. Basis ergo ducenda est in dimidiam altitudinem: consequenter Conoides cylindri super eadem basi & ejusdem altitudinis subduplum (§. 541 *Geom.*).

PROBLEMA 78.

203. *Cubare sphæroides ellipticum ex rotatione ellipsis Apollonianæ circa axem genitum.*

Quoniam ad ellipsin Apollonianam (§. 420 *part. 1*)

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

erit $py^2 dx : 2r = pbxdx : 2r - pbx^2 dx : 2ar$

$$\int py^2 dx : 2r = pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$$

Quodsi pro abscissa x substituatur axis a, prodibit soliditas integri sphæroidis $pba^2 : 4r - pba^3 : 6ar = pba^2 :$

 $4r-$

$4r - pba^2 : 6r = (6pba^2 - 4pba^2) : 24r = pba^2 : 12r$.

COROLLARIUM. 1.

204. Quodsi $2r$ ponatur axi conjugato æqualis; erit $4r^2 = ab$ (§. 432 *part. 1.*) Unde soliditas sphæroidis habetur $4par^2 : 12r = \frac{1}{3}par$, hoc est, sphæroides ellipticum æquatur Cono, cujus altitudo axi majori a, diameter baseos axi minori ellipsis genetricis quadruplo $4r$ æqualis (§. 548. *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

205. Quoniam Cylindri circumscripti altitudo $= a$, diameter $= 2r$, adeoque soliditas $= \frac{1}{2}apr$ (§. 541. *Geom.*); erit sphæroides ellipticum ad cylindrum circircumscriptum ut $\frac{1}{3}apr$ ad $\frac{1}{2}apr$, hoc est, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, seu ut 2 ad 3 (§. 124. *part. 1.*).

COROLLARIUM 3.

206. Si diameter sphæræ $= a$, erit peripheria circuli maximi (posita ratione radii ad peripheriam $= r : p$) $= ap : 2r$, consequenter sphæra $= a^3 p : 12r$. Est adeo sphæroides ellipticum ad sphæram axe majori a descriptam ut $\frac{1}{3}apr$ ad $a^3 p : 12r$, hoc est, (dividendo per $\frac{1}{3}ap$) ut r ad $a^2 : 4r$, seu ut $4r^2$ ad a^2, nempe ut quadratum axis minoris ad quadratum majoris.

COROLLARIUM 4.

207. Si diameter sphæræ $= 2r$, erit soliditas $= \frac{2}{3}pr^2$ (§. 199). Est itaque sphæroides ellipticum ad sphæram axe minori $2r$ descriptam ut $\frac{1}{3}par$ ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc est, ut a ad $2r$ (§. 124 *part. 1.*), seu ut axis major ad minorem.

PROBLEMA 79.

208. *Cubare Conoides hyperbolicum ex rotatione hyperbolæ Apollonianæ circa axem genitum.*

Quoniam ad hyperbolam scalenam (§. 459. *part. 1*)

$$y^2 = bx + bx^2 : a$$

erit $\int py^2 dx : 2r = pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$

Et quia ad hyperbolam æquilateram (§. 507 *part. 1.*)

$$y^2 = ax + x^2$$

erit $py^2 dx : 2r = (apxdx + px^2 dx) : 2r$

$\int py^2 dx : 2r = apx^2 : 4r + px^3 : 6r$

COROLLARIUM.

209. Si altitudo Conoidis fuerit axi transverso æqualis, hoc est, si $x = a$; erit soliditas Conoidis in casu priore $pba^2 : 4r + pba^3 : 6ar = (6pba^2 + 4pba^2) : 24r = 10pba^2 : 24r = 5pba^2 : 12r$.

PROBLEMA 80.

210. *Cubare solidum ex rotatione Cissoidis circa axem* AB *genitum.* Tab. II. Fig. 22.

Sit AB $= 1$, AP $= x$, PM $= y$; erit (§. 548 *part. 1.*)

$$y^2 = x^3 : (1 - x)$$

$$py^2 dx : 2r = px^3 dx : 2r(1 - x)$$

hoc

hoc est, quia $2r=AB=1$,

$$py^2dx:2r=px^3dx:(1-x).$$

Est vero $x^3:(1-x)=x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$ &c. in infinitum (§. 45. *part: 1.*). Ergo $py^2dx:2r=px^3dx+px^4dx+px^5dx+px^6dx+px^7dx+px^8dx$ &c. in infinitum.

Et hinc $\int py^2dx:2r=\frac{1}{4}px^4+\frac{1}{5}px^5+\frac{1}{6}px^6+\frac{1}{7}px^7+\frac{1}{8}px^8+\frac{1}{9}px^9$ &c. definit solidum portione APM descriptum. Quodsi pro x substituatur $AB=1$; prodit solidum integrum $\frac{1}{4}p+\frac{1}{5}p+\frac{1}{6}p+\frac{1}{7}p+\frac{1}{8}p+\frac{1}{9}p$ &c. seu $p(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$ &c. in infinitum.).

PROBLEMA 81.

Tab. I. Fig. 8. 211. *Cubare solidum ex rotatione Logisticæ circa asymptotum* AH *genitum.*

In Logistica, cujus subtangens $=a$, est (§. 54)

$$ydx=ady$$

$$dx=ady:y$$

$$py^2dx:2r=paydy:2r$$

$$\int py^2dx:2r=pay^2:4r$$

Quodsi pro y substituatur $AB=r$, erit integrum solidum $par^2:4r=\frac{1}{4}apr$.

COROLLARIUM.

212. Cylindrus, cujus altitudo $=a$, radius basis $=r$, est $\frac{1}{2}apr$ (§. 541. *Geom.*), adeoque ad solidum logisticum ut $\frac{1}{2}apr$ ad $\frac{1}{4}apr$, hoc est, ut 2 ad 1 (§. 124 *part. 1*).

SCHOLION.

213. *Facile hinc apparet, quod inventis methodo hactenus exposita expressionibus solidorum, ea inter se facile comparentur unumque in alterum transformetur.*

PROBLEMA 82.

214. *Cubare solidum ex rotatione parabolæ circa semiordinatam* QN *genitum.* Tab. II. Fig. 25.

Ex resolutione problematis 74. (§. 197) manifestum est, elementum solidi esse circulum radio MR descriptum & in differentiale Rr ipsius RN ductum. Sit itaque ratio radii ad peripheriam $=r:p$, $AQ=r$, $AP=x$, $QN=b$, $PM=y$, erit $Rr=dy$, $MR=PQ=AQ-AP=r-x$, peripheria radio MR descripta $=p-px$, consequenter area circuli $\frac{1}{2}pr-px+\frac{px^2}{2r}$ (§. 429 *Geom.*) & hinc elementum solidi $\frac{1}{2}prdy-pxdy+px^2dy:2r$.

Si jam parameter parabolæ 1; erit $y^2=x$ (§. 388 *part. 1*) & $y^4=x^2$: quibus valoribus in expressione elementi generali substitutis, erit

id $\frac{1}{2}prdy - py^2dy + py^4dy : 2r$. Hujus integrale $\frac{1}{2}pry - \frac{1}{3}py^3 + py^5 : 10r$ indefinite exprimit solidum ex rotatione portionis MNR circa NR genitum.

Quodsi pro y^2 ponatur x; habebimus pro eodem solido $\frac{1}{2}pry - \frac{1}{3}pxy + px^2y : 10r = p(\frac{1}{2}ry - \frac{1}{3}xy + x^2y : 10r)$.

Denique si pro y substituatur b, pro x vero r; prodibit solidum integrum $p(\frac{1}{2}br - \frac{1}{3}br + \frac{1}{10}br) = (30 - 20 + 6)\ pbr : 60 = \frac{8}{30}pbr = \frac{1}{2}pr \cdot \frac{8}{15}b$, hoc est, basis seu circulus radio AQ descriptus ducitur in $\frac{8}{15}$ altitudinis QN.

COROLLARIUM.

215. Cylindrus super eadem basi & ejusdem altitudinis est $\frac{1}{2}pbr$ (§. 541. *Geom.*) adeoque ad solidum hoc parabolicum ut $\frac{1}{2}pbr$ ad $\frac{1}{2}pbr \cdot \frac{8}{15}$, hoc est, ut 1 ad $\frac{8}{15}$, seu ut 15 ad 8 (§. 124. *part. I.*).

PROBLEMA 83.

216. *Cubare solidum ex rotatione spatii interminati hyperbolici juxta asymptotum* CD *tanquam axem genitum.* Tab. II. Fig. 26.

Sit AB $= a$, AC $= b$, CP $= x$, PM $= y$; erit P$p = dx$, & posita peripheria radio AB descripta $= p$, peripheria radio PC descripta $px : a$, quæ ducta in PM $= y$ dat superficiem cylindri parallelogrammo CPMR descripti $= pxy : a$ (§. 541. *Geom.*). Hæc vero si ulterius ducatur in P$p = dx$, prodibit cylindrulus cavus, parallelogrammulo PqQM descriptus seu elementum solidi $= pxydx : a$.

Est vero ex natura hyperbolæ intra asymptotos

$$xy = ab \quad (\text{§. } 502\ part.\ I)$$

Quare $\quad y = ab : x$

$$pxydx : a = pabxdx : ax = pbdx$$

$$\int pxydx : a = pbx.$$

Quodsi pro x substituatur a; prodibit solidum integrum pba.

COROLLARIUM.

217. Cylindrus ex rotatione parallelogrammi ACSB circa axem CS geniti est $\frac{1}{2}pba$ (541 *Geom.*), adeoque ad solidum ut $\frac{1}{2}pba$ ad pba, hoc est, ut $\frac{1}{2}$ ad 1 hyperbolicum, seu ut 1 ad 2 (§. 124 *part. I*).

SCHOLION.

218. *Possunt etiam figuræ planæ rotari circa tangentes, vel alias lineas quascunque: Sed cum nihil in his difficultatis sit, plura non addimus.*

PROBLEMA 84.

219. *Metiri superficiem corporis rotatione figuræ* ANQ *circa axem* AQ *geniti.* Tab. II. Fig. 19.

RESOLUTIO.

Sit ratio radii ad peripheriam $= r : p$, AP

p, $AP = x$, $PM = y$, erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$; $Mm = \sqrt{}(dx^2 + dy^2)$, peripheria radio PM descripta $= py : r$, quæ ducta in Mm dat elementum superficiei solidi ex rotatione circa axem AQ geniti $py\sqrt{}(dx^2 + dy^2) : r$.

Quodsi jam ex natura figuræ ANQ valor ipsius dx^2 substituatur & elementum integrabile fiat; superficies desiderata per summationem habetur.

PROBLEMA 85.

Tab. II. Fig. 17. 220. *Invenire superficiem Coni.*

Cum Conus gignatur ex rotatione trianguli ACD circa axem DC; ex æquatione ad triangulum in expressione generali ante (§.198.) inventa substituendus est valor ipsius dx^2. Sit nempe $CD = a$, $AC = r$, $AP = x$, $PM = y$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$x : y = a : r$$

$$rx = ay$$

$$rdx = ady$$

$$dx^2 = a^2 dy^2 : r^2$$

$$py\sqrt{}(dx^2 + dy^2) : r = py\sqrt{}(a^2 dy^2 + r^2 dy^2) : r^2 = pydy\sqrt{}(a^2 + r^2) : r^2$$

$$\int py\sqrt{}(dx^2 + dy^2) : r = py^2\sqrt{}(a^2 + r^2) : 2r^2.$$

Quodsi pro y ponatur r, prodibit superficies coni integri $= \frac{1}{2}p\sqrt{}(a^2 + r^2) = \frac{1}{2}p . AD$: est nempe æqualis facto ex semiperipheria basis Coni in latus AD, prorsus ut in elementis Geometriæ demonstratum (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA 86.

221. *Invenire superficiem sphæræ.* Tab. I. Fig. 3.

Sit diameter circuli genitoris $= 1$, $AP = x$, erit elementum arcus Mm (§. 157) $= dx : 2\sqrt{}(x - xx)$, quod ductum in peripheriam radio PM descriptam $= 2p\sqrt{}(x - x^2)$ producit elementum superficiei sphæricæ (§. 219) pdx. Hujus integrale px indefinite metitur superficiem segmenti sphærici, cujus altitudo x.

Quodsi pro x substituatur diameter 1; erit superficies sphæræ integræ $= p$ seu, si $1 = a$, ap.

COROLLARIUM.

222. Est ergo quodlibet segmentum superficiei sphæricæ ad superficiem sphæræ integram ut px ad p, seu ut x ad 1 (§. 124. *part. I.*), hoc est ut altitudo segmenti ad diametrum sphæræ.

PROBLEMA 87.

223. *Invenire superficiem conoidis parabolici.*

Ad parabolam est $adx = 2ydy$ (§. 21).

dx^2

$$dx^2 = 4y^2dy^2 : a^2$$

$$py\sqrt{(dx^2+dy^2)}:r = py\sqrt{(4y^2dy^2+a^2dy^2)}:ar = pydy\sqrt{(4y^2+a^2)}:ar$$

Fiat $\sqrt{(4y^2+a^2)} = v$

erit $4y^2+a^2 = v^2$

$$8ydy = 2vdv$$

$$ydy = \tfrac{1}{4}vdv$$

$$pydy\sqrt{(4y^2+a^2)}:ar = pv^2dv:4ar$$

$$\int pydy\sqrt{(4y^2+a^2)}:4ar = pv^3:12ar = (4py^2+pa^2)\sqrt{(4y^2+a^2)}:12ar.$$

Fiat $y=0$, relinquetur $pa^2\sqrt{a^2}:12ar = pa^2:12r$. Unde superficies segmenti conoidis parabolici $= (4py^2+pa^2)\sqrt{(4y^2+a^2)}:12ar - pa^2:12r$.

CAPUT V.

DE USU CALCULI INTEGRALIS IN METHODO TANGENTIUM INVERSA.

DEFINITIO 9.

224. *Methodus Tangentium inversa* est, qua ex data tangente aut linea quacunque alia, cujus determinatio a tangente pendet, invenitur æquatio ad curvam aut constructio curvæ.

COROLLARIUM.

225. Cum expressiones differentiales tangentis, subtangentis, subnormalis, normalis & arcus, itemque areæ curvæ superius traditæ fuerint (§. 20. 34. 35. 44. 98. 144); si valor datus expressioni differentiali æquetur & æquatio differentialis vel summetur, vel, si id fieri nequeat, construatur, curva desiderata innotescit.

PROBLEMA 88.

226. *Invenire lineam curvam, cujus subtangens* $=2yy:a$.

Quoniam subtangens lineæ algebraicæ $=ydx:dy$ (§. 20); erit

$$ydx:dy = 2yy:a$$

$$aydx = 2y^2dy$$

$$adx = 2ydy$$

$$ax = y^2$$

Est adeo curva quæsita parabola (§. 388. *part. 1.*), cujus constructio ex superioribus manifesta (§. 392. *part. 1*).

PRO-

PROBLEMA 89.

227. *Curvam invenire, cujus subnormalis est constans,* e. gr. $=a$.

Quoniam subnormalis lineæ algebraicæ (§. 35) $ydy : dx$; erit

$$ydy = adx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$

$$y^2 = 2ax.$$

Est adeo curva quæsita parabola, cujus parameter $=2a$.

PROBLEMA 90.

228. *Invenire curvam, cujus subnormalis $= r - x$.*

Quoniam $ydy : dx = r - x$ (§. 35);

erit $$ydy = rdx - xdx$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = rx - \tfrac{1}{2}xx$$

$$y^2 = 2rx - xx$$

Est adeo curva quæsita circulus, cujus radius r seu diameter $2r$ (§. 377. *part. 1.*).

PROBLEMA 91.

229. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad $r-x$ & y.*

Quoniam (§. 20)

$$r-x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit $r-x : y = dy : dx$ (§. 124 *part. 1*)

$$rdx - xdx = ydy$$

$$rx - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$

$$2rx - xx = y^2$$

Est adeo curva quæsita denuo circulus.

PROBLEMA 92.

230. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad $r+x$ & y.*

Quoniam (§. 20)

$$r+x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit $r+x : y = dy : dx$ (§. 124. *part. 1*)

$$rdx + xdx = ydy$$

$$rx + \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$

$$2rx + x^2 = y^2$$

Est adeo curva quæsita hyperbola æquilatera, cujus axes conjugati & parameter $=2r$ (507 *part. 1*).

PROBLEMA 93.

231. *Invenire curvam, in qua subtangens multiplo abscissæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$mx = ydx : dy$$

erit $mxdy = ydx$

$$mxdx - ydy = 0$$

Ut hæc æquatio integrari poſſit, multiplicetur per $y^{m-1} : x^2$ (§.95).
erit $(my^{m-1}xdy - y^m dx) : x^2 = 0$

$$y^m : x = a^{m-1}$$

$$y^m = a^{m-1}x$$

Satisfaciunt ergo propoſito infinita parabolarum genera.

PROBLEMA 94.

232. *Invenire lineam, in qua ſubtangens ſemiordinatæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$ydx : dy = y$$

$$ydx = ydy$$

$$dx = dy$$

$$x = y$$

Patet adeo, lineam quæſitam eſſe rectam ad cathetum trianguli rectanguli æquicruri tanquam axem relatam, ſeu hypothenuſam trianguli rectanguli æquicruri (§. 89 *Geom.*). Quodſi vero x ſumatur pro arcu circuli; erit linea quæſita cylois (§. 572. *part. 1. & §.* 52. *part. 1.*).

PROBLEMA 95.

233. *Invenire curvam, cujus ſubnormalis* $= \sqrt{ax}$.

Quoniam $ydy : dx = \sqrt{ax}$ (§.34)

erit $ydy = a^{1:2}x^{1:2}dx$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}$$

$$y^2 = \tfrac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

Patet adeo, quadrata ſemiordinatarum hujus curvæ exprimere ſpatia parabolæ, cujus parameter $4a$ (§.103). Sunt igitur ſemiordinatæ ipſæ mediæ proportionales inter abſciſſas & $\tfrac{2}{3}$ ſemiordinatarum parabolæ circa communem axem deſcriptæ (§: *cit.*)

SCHOLION.

234. *Curva hæc dici poteſt Quadratrix parabolæ. Solent enim Geometræ* Quadratricem *alicujus curvæ appellare curvam circa eundem axem deſcriptam, cujus ſemiordinatis datis datur quadratura partium reſpondentium in altera curva. E. gr. ſi fuerit ut in noſtro caſu* APMA = PN², *vel* APMA = AP. PN, *vel* APMA = PN. *a &c. erit* AND quadratrix *ipſius* AMC. Tab. II. Fig. 27.

PROBLEMA 96.

235. *Invenire curvam, cujus normalis conſtans eſt.*

Sit conſtans linea $= a$, abſciſſa $= x$, ſemiordinata $= y$; erit (§.44)

y√

$$y\sqrt{(dy^2+dx^2)}:dx=a$$

$$y\sqrt{(dy^2+dx^2)}=adx$$

$$y^2dy^2+y^2dx^2=a^2dx^2$$

$$y^2dy^2=a^2dx^2-y^2dx^2$$

$$ydy=dx\sqrt{(a^2-y^2)}$$

$$\frac{-ydy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=-dx$$

$$\sqrt{(a^2-y^2)}=a-x \quad (\S. 95)$$

Est itaque curva quæsita circulus.

PROBLEMA 97.

236. *Invenire curvam, cujus area indefinite exprimitur per* $a\sqrt{x}$.

Quoniam differentiale areæ $=y\,dx$ (§. 98);

erit $\frac{1}{2}ax^{-1:2}dx=ydx$

$$\frac{1}{2}ax^{-1:2}=y$$

$$\frac{1}{4}a^2x^{-1}=\frac{1}{4}a^2:x=y^2$$

$$\frac{1}{4}a^2=xy^2$$

Est adeo curva hyperbola secundi generis intra asymptotos.

COROLLARIUM.

237. Cum $\sqrt{ax}$ sit semiordinata parabolæ, cujus parameter $=a$; evidens est parabolam Apollonianam esse quadratricem hyperbolæ intra asymptotos, ad quam $\frac{1}{4}aa=xy^2$

PROBLEMA 98.

238. *Invenire curvam, cujus quadratura indefinita* $=x^3:a$

Quoniam $x^3:a=\int ydx$

erit $3x^2dx:a=ydx$

$$x^2=\frac{1}{3}ay$$

Est adeo curva quæsita parabola exterior, cujus parameter $\frac{1}{3}a$, Sit enim $AQ=PM=x$, $PQ=AM=y$; erit $\frac{1}{3}ay=x^2$ (§. 288 *part. 1*). Tab. II. Fig. 28.

PROBLEMA 99.

239. *Invenire curvam, cujus area* $=a\sqrt{(aa+xx)}$.

Quoniam $axdx:\sqrt{(aa+xx)}=ydx$

$$ax:\sqrt{(aa+xx)}=y$$

$$a^2x^2:(aa+xx)=y^2$$

hoc est, $y^2:x^2=a^2:aa+xx$

Quæ analogia naturam curvæ definit, cujus quadratrix est hyperbola æquilatera, axibus conjugatis & parametro existentibus a (§ 507. *part. 1.* & §. 234 *part. 2*).

PROBLEMA 100.

240. *Invenire curvam, cujus area* $=x\sqrt{(aa+xx)}$.

 Quo-

Quon. $\frac{x^2dx}{\sqrt{(aa+xx)}} + dx\sqrt{(aa+xx)} = ydx$

erit $\frac{2x^2+aa}{\sqrt{(aa+xx)}} = y$

$(2x^2+aa)^2 = y^2(aa+xx)$

$y^2 : aa+2xx = aa+2xx : aa+xx$

Quæ analogia definit itidem naturam curvæ, cujus quadratrix est hyperbola æquilatera.

SCHOLION.

241. *Ex problematibus his apparet, quod data quadratrice semper inveniatur quadranda facili negotio. Et hac quidem methodo inveniri possunt curvæ innumeræ quadrabiles, construique curvarum quadrabilium, seu, quod perinde est, formularum summabilium canones.*

PROBLEMA 101.

242. *Invenire curvam, cujus subtangens est linea constans a.*

Quoniam $ydx : dy = a$ (20)

erit $dx = ay^{-1}dy$

$\int dx = x = \int ay^{-1}dy$

Quodsi $ay^{-1}dy$ multiplicetur per a; erit $a^2y^{-1}dy$ elementum hyperbolæ intra asymptotos (§. 118) & quidem æquilateræ, in qua asymptoti junguntur ad angulos rectos (§. 510. *part. 1*). Quodsi ergo y sumatur pro abscissa, erit respondens semiordinata $x = a\int y^{-1}dy$ æqualis spatio hyperbolico asymptotico per constantem a, quæ latus potentiæ in hyperbola æquilatera (§. 477 *part. 1*), diviso. Unde constructio curvæ quæsitæ a Quadratura hyperbolæ pendet.

COROLLARIUM 1.

243. Quoniam linea, ad quam $x = \int a y^{-1}dy$, est logarithmica ad asymptotum relata (§. 54) atque x in asymptoto sumta logarithmus semiordinatæ ipsi respondentis (§. 555. *part. 1*); erit quoque $\int a y^{-1}dy$ logarithmus ejusdem semiordinatæ y, consequenter $\int ay^{-1}dy = a\int dy : y = ly$: ly denotat logarithmum ipsius y in logistica sumtum, cujus subtangens $= a$. Unde liquet, quomodo differentiale logarithmi aut quantitatis, quam logarithmus ingreditur, sit inveniendum. Quoniam enim $ady : y = dly$ erit etiam $dly^n = nl\, y^{n-1}ady : y$ ubi a notat subtangentem logisticæ.

COROLLARIUM. 2.

244. Et quia $\frac{a\int dy}{y}$ est spatium hyperbolicum per latus potentiæ hyperbolæ divisum; spatia hyperbolica per idem latus divisa exprimunt logarithmos, quorum numeri sunt ut semiordinatæ ad asymptotum relatæ.

PROBLEMA 102.

245. *Invenire curvam, in qua est*

ut a *ad* y *ita* $\surd(aa-yy)$ *ad subtangentem.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a : y = \surd(aa-yy) : \frac{ydx}{dy}$$

hoc est, $a : 1 = dy\surd(aa-yy) : dx$

erit $dy\surd(aa-yy) : a = dx$

$$\int dy\surd(aa-yy) : a = x$$

Tab. I. Fig. 3. Quoniam $\int dy\surd(aa-yy)$ est portio circuli CDPM, cujus radius AC $=a$, abscissa PC$=$y (§. 124): constructio curvæ a quadratura circuli pendet, hoc est, circulus est quadratrix curvæ quæsitæ (§. 234). Retentis nempe abscissis PC, semiordinatæ *x* erunt æquales spatio PMDC per constantem *a* diviso.

PROBLEMA 103.

246. *Invenire curvam, in qua est ut* a *ad* y *ita* $\surd(aa+yy)$ *ad subtangentem.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a : y = \surd(aa+yy) : \frac{ydx}{dy}$$

hoc est, $a : 1 = dy\surd(aa+yy) : dx$

erit $dy\surd(aa+yy) : a = dx$

$$\int dy\surd(aa+yy) : a = x$$

Tab. II. Fig. 19. Quoniam $\int dy\surd(aa+yy) : a$ est arcus parabolæ AM, cujus parameter $2a$ (§. 146.); si semiordinata parabolæ PM sumatur pro abscissa curvæ quæsitæ, erit semiordinata ejusdem arcui parabolico AM æqualis.

SCHOLION.

247. *Apparet adeo, interdum constructionem pendere a rectificatione curvarum. Præstat autem eam ad curvarum potius rectificationem, quam quadraturam reducere, quia in priori casu praxis est facilior, ubi arcum filo metiri datur. In posteriori autem spatiorum quadratura ope serierum infinitarum definienda est in numeris prope veris & inde similiter in istiusmodi numeris semiordinata curvarum quæsitarum sunt computanda.*

PROBLEMA 104.

248. *Invenire curvam, in qua est subtangens ad* y *ut quantitas constans* r *ad* $\surd(r^2-y^2)$.

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r : \surd(r^2-y^2)$$

hoc est, $dx : dy = r : \surd(r^2-y^2)$

erit $dx = rdy : \surd(r^2-y^2)$

$$x = \int rdy : \surd(r^2-y^2)$$

Quia $\int rdy : \surd(r^2-y^2)$ est arcus circuli AM, cujus radius AC$=r$, PM$=$y (§. 153); constructio curvæ pendet a rectificatione peripheriæ circuli. Nempe si semiordinatæ in Tab. I. Fig. 3.

circulo PM ſumantur pro abſciſſis curvæ quæſitæ; erunt ejusdem ſemiordinatæ acubus AM æquales.

PROBLEMA 105.

249. *Invenire curvam, in qua ſubtangens eſt ad* y *ut* r^2 *ad* r^2+y^2.

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r^2 : r^2 + y^2$$

Tab. II. Fig. 20. hoc eſt, $dx : dy = r^2 : r^2 + y^2$

erit $dx = r^2 dy : (r^2 + y^2)$

Quoniam $\int r^2 dy : (r^2+y^2)$ aut, ſi $r=1$, $\int dy : (1+y^2)$ eſt elementum arcus BM, cujus tangens BK = y (§. 158); evidens eſt, conſtructionem curvæ quæſitæ denuo pendere a rectificatione arcuum circuli indefinita. Sumtis nempe tangentibus arcuum BK pro abſciſſis curvæ quæſitæ; ſemiordinatæ ejusdem erunt arcubus BM æquales, radio circuli exiſtente *r*.

PROBLEMA 106.

250. *Invenire curvam, in qua tangens eſt conſtans.*

Sit conſtans illa $=a$, abſciſſa $=x$, ſemiordinata y: erit (§. 34)

$$y\sqrt{(dx^2+dy^2)} : dy = a$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2}$$

$$dx^2 = \frac{a^2dy^2 - y^2dy^2}{y^2}$$

$$x = \int \frac{dy}{y} \sqrt{(a^2-y^2)}$$

Curva, in qua tangens conſtans eſt, deſcribitur puncto M, ſi alterum extremum rectæ TM in recta AR incedit, diciturque *Tractoria*. Ad ejus adeo deſcriptionem non opus eſt, niſi bacillo, incujus utroque extremo cuſpis infixa, ita ut cuſpis in M prematur in planum e latere, vel pondere. Eſt itaque æquatio inventa ad Tractoriam. Tab. V. Fig. 54.

Eadem æquatio ſic eruitur. Quoniam TM$=a$, PM$=$y; erit PT$=\sqrt{(a^2-y^2)}$. Sed PT$=ydx : dy$ (§. 20). Ergo $ydx : dy = \sqrt{(a^2-y^2)}$, conſequenter $dx = dy\sqrt{(a^2-y^2)} : y$, aut, quia ſemiordinatæ continuo decreſcentis differentiale negativum, $dx = -dy\sqrt{(a^2-y^2)} : y$.

COROLLARIUM. 1.

251. Si fuerit $x=0$, erit etiam $dx=0$, adeoque

$$-dy\sqrt{(a^2-y^2)} : y = 0$$

$$\sqrt{(a^2-y^2)} = 0$$

$$a^2 - y^2 = 0$$

$$a = y$$

Eſt

Est igitur in A, ubi origo indeterminatæ x, AB$=a$: id quod etiam ex descriptione liquet.

COROLLARIUM 2.

252. Quoniam $dx = dy\sqrt{(a^2-y^2)}:y$ erit $ydx = dy\sqrt{(a^2-y^2)}$ adeoque spatium interminatum RPMO $= \int dy\sqrt{(a^2-y^2)}$. Quadratura igitur tractoriæ pendet a Quadratura circuli (§.124), cujus radius est a, abscissæ a centro computatæ sunt y.

COROLLARIUM 3.

253. Similiter quia $dx^2 = \frac{a^2dy^2 - y^2dy^2}{y^2}$ erit

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2 - y^2dy^2 + dy^2}{y^2}$$

$$= a^2dy^2 : y^2$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$\int\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \int\frac{ady}{y}$$

Quare cum $\int\frac{ady}{y}$ sit logarithmus ipsius y; arcus tractoriæ sunt ut logarithmi, semiordinatæ ut numeri.

Et quia $\int ady : y$ est abscissa Logarithmicæ, cujus subtangens $=a$; arcus tractoriæ rectificantur per abscissas Logarithmicæ.

COROLLARIUM 4.

254 Si QM$=v$, erit PM$=a-v$, adeoque $a-v=y$ & $-dv=dy$, consequenter $dx = -dy\sqrt{(a^2-y^2)}:y = dv\sqrt{(2av - v^2)}:(a-v)$. Habemus adeo æquationem, quæ Tractoriam definit respectu axis BT.

CAPUT VI.
DE USU CALCULI INTEGRALIS IN LOGARITHMORUM DOCTRINA.

PROBLEMA 107.

255. *Dato numero, invenire logarithmum.*

Tab. III. Fig. 30. Sit Logarithmicæ ordinata AB $=1$, eademque subtangenti, quæ constans est (§.54.) æqualis, erit PM numerus unitate major, QN numerus unitate minor, AP logarithmus numeri unitate majoris, QN logarithmus numeri unitate minoris.

Quodsi jam differentia inter AB & PM sit y; erit PM$=1+y$, consequenter AP seu logarithmus unitate majoris numeri $\int dy:(1+y)$ (§. 243). Est vero $1:(1+y) = 1-y+y^2-y^3+y^4$ &c. in infinitum (§. 45. *part.1*). Ergo $dy:(1+y) = dy - ydy + y^2dy - y^3dy + y^4dy$ &c. in infinitum,

tum, consequenter $\int dy:(1+y)$, seu logarithmus numeri $1+y$ unitate majoris, $=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

Quodsi differentia inter AB & QN sit y, erit $QN=1-y$, consequenter AQ seu logarithmus numeri unitate minoris $=\int -dy:(1-y)$. Est vero $-1:(1-y)=-1-y-y^2-y^3-y^4-$ &c. in infinitum (§.45 *part. 1*). Ergo $-dy:(1-y)=-dy-ydy-y^2dy-y^3dy-y^4dy$ &c. in infinitum, consequenter $\int -dy:(1-y)$, seu logarithmus numeri unitate minoris, $=-y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM 1.

Tab. II. Fig. 25. 256. Si latus potentiæ hyperbolæ AB vel BC fuerit 1, $BP=y$; erit $AP=1+y$ & spatium hyperbolicum asymptoticum $=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120). Et ubi $BQ=y$, erit $AQ=1-y$, adeoque (si $QN=v$) ob $1=v-vy$ (§.490 *part. 1*), elementum spatii hyperbolici asymptotici $-1ydy:(1-y)$, consequenter spatium $=-y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§.120). Possunt ergo etiam logarithmi per hyperbolam exhiberi: nimirum si latus potentiæ $AB=1$, abscissa AP est numerus unitate major, spatium asymptoticum BCMP logarithmus numeri unitate majoris; similiter abscissa AQ est numerus unitate minor & spatium hyperbolicum asymptoticum QNCB logarithmus numeri unitate minoris.

COROLLARIUM 2.

257. Quodsi $y=1$, erit $1+y=2$; adeoque logarithmus hyperbolicus binarii $=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM 3.

258. Quoniam logarithmus ipsius $1:(1+x)$ & numeri integri $1+x$ idem est (§. 351. *Arithm.*), fractio vero $1:(1+x)$ numerus unitate minor; si pro $1-y$ ponatur $1:(1+x)$, formula posterior inveniendis logarithmis tam numerorum unitate majorum, quam minorum satisfacit. Nempe cum sit ex hypothesi

$$1-y=1:(1+x)$$

erit $1-1:(1+x)=y$

hoc est, $\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}=y$

adeoque in formula $y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. pro y substitui debet $x:(1+x)$ si numeri unitate majoris logarithmus desideretur.

SCHOLION.

259. *Formula posterior si in casu quoque priore, ubi numerus, cujus logarithmus quæritur, unitate major, adhibetur, inventio logarithmi faciliori opera absolvitur, quia series citius convergit, quam si priori formula utamur. Enimvero probe notandum, logarithmos hyperbolicos coincidere cum Neperianis adeoque diversos esse a Briggianis, quibus communiter utimur. Cum autem hyperbolici sint ad Briggianos ut logarithmus denarii hyperbolicus ad logarithmum denarii Briggianum, sitque logarithmus binarii hyperbolicus* 2.302585092994 &c. *Brig-*

Briggianus 1.000000000000; *hyperbolici ad Briggianos, quibus vulgo utimur, facile reducuntur.*

PROBLEMA 108.

260. *Dato logarithmo invenire numerum.*

Sit logarithmus l, numerus $1+y$ erit $l=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. Quare cum $y=l+bl^2+(2b^2-c)l^3+(5bc-5b^3+d)l^4+(14b^4+6bd-21b^2c+3c^2-e)l^5$ &c. ob $a=1$, & $b=-\frac{1}{2}$, $c=+\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{4}$, $e=+\frac{1}{5}$ &c. (§. 366 *part. 1*); erit

$$2b^2-c=\frac{2}{4}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

$$5bc-5b^3-d=-\frac{5}{6}+\frac{5}{8}+\frac{1}{4}=\frac{-40+30+12}{48}=\frac{2}{48}=+\frac{1}{24}$$

$$14b^4+6bd-21b^2c+3c^2-e=\frac{14}{16}+\frac{6}{8}-\frac{21}{12}+\frac{3}{9}-\frac{1}{5}=\frac{7}{8}+\frac{6}{8}-\frac{14}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{40-15-24}{120}=+\frac{1}{120}$$

adeoque

$$y=l+\frac{1}{2}l^2+\frac{1}{6}l^3+\frac{1}{24}l^4+\frac{1}{120}l^5 \text{ \&c. in infinit.} =\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1.2}+\frac{l^3}{1.2.3}+\frac{l^4}{1.2.3.4}+\frac{l^5}{1.2.3.4.5} \text{ \&c. in infinit.}$$

Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. erit $y=l+\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Quoniam vero l est logarithmus numeri $1+y$; erit numerus $1+y=1+l+\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Si l fuerit logarithmus numeri unitate minoris $1-y$; erit $l=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. & eodem ut ante modo reperietur $y=l-\frac{1}{1.2}l^2+\frac{1}{1.2.3}l^3-\frac{1}{1.2.3.4}l^4+\frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$ &c. in infinitum, consequenter $1-y=1-\frac{l}{1}+\frac{1}{1.2}l^2-\frac{1}{1.2.3}l^3+\frac{1}{1.2.3.4}l^4-\frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$ &c. in infinitum.

Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C &c. erit $y=l-\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl-\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum, consequenter $1-y=1-l+\frac{1}{2}Al-\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl-\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

PROBLEMA 109.

261. *Dato sinu, invenire logarithmum.*

Sit radius $=1$, cosinus $=x$, erit sinus $=\sqrt{(1-xx)}$ (§. 377 *part. 1*) $=\sqrt{[(1+x)(1-x)]}$. Sed $l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$ & $l(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6$.
Ergo $l(1-xx) = -\frac{2}{2}x^2 - \frac{2}{4}x^4 - \frac{2}{6}x^6$ (§. 337 *Arithm.*) & $l\sqrt{}(1-xx) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^6$ &c. (§. 338 *Arithm.*).

PROBLEMA 110.

262. *Data tangente, invenire logarithmum.*

Sit radius, seu sinus totus, hoc est, tangens 45° (§. 32 *Trigon.*) $= 1$ tangens arcus 45° majoris $= 1 + x$; tangens arcus 45° minoris $= 1 - x$: erit logarithmus tangentis in casu priore $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum; in casu posteriore $-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum (§. 255).

SECTIO III.
DE CALCULO EXPONENTIALI.

CAPUT I.
DE NATURA CALCULI EXPONENTIALIS.

DEFINITIO 10.

263. *Calculus exponentialis* est methodus differentiandi quantitates exponentiales & differentialia exponentialium summandi.

DEFINITIO 11.

264. *Quantitas exponentialis* est dignitas, cujus exponens variabilis, e. gr. x^x, a^x.

PROBLEMA 111.

265. *Quantitatem exponentialem differentiare.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut quantitates exponentiales ad logarithmicas revocentur: quo facto, differentiatio succedit per §. 244.

E. gr. Quaeritur differentiale quantitatis exponentialis x^y. Fiat

$$x^y = z$$

erit $$y\,lx = lz \quad (\text{§. 139 } Arithm.)$$

$$lx\,dy + y\,dx : x = dz : z \quad (\text{§. } 243)$$

$$z\,lx\,dy + zy\,dx : x = dz$$

hoc est, $x^y lx\,dy + yx^{y-1}dx = dz$

Sit

Sit quantitas exponentialis differentianda secundi gradus v^{x^y}. Fiat, ut ante,

$$v^{x^y} = z$$

erit $x^y lv = lz$ (§. 339 *Arithm.*)

$$(x^y lx dy + y x^{y-1} dx) lv + x^y dv : v = dz : z \text{ (§. 243)}$$

$$z(x^y lx dy + y x^{y-1} dx) lv + z x^y dv : v = dz)$$

hoc est,

$$v^{x^y} (x^y lx dy + y x^{y-1} dx) lv + v^{x^y} v^{-1} x^y dv = dz)$$

seu

$$v^{x^y} x^y lx lv dy + v^{x^y} y x^{y-1} v dv + v^{x^y} v^{-1} x^y dv = dz.$$

Eadem ratione inveniri potest differentiale quantitatis exponentialis cujuscunque alterius.

PROBLEMA 112.

266. *Differentiale logarithmicum integrare.*

Sit differentiale integrandum $xlxdx$. Fiat

$$x = 1 + y$$

erit $lx = l(1+y)$
& $dx = dy$

$$xlxdx = l(1+y)(1+y)dy.$$

Est vero $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 255). Ergo $l(1+y)(1-y)\,dy = (1+y)\,dy\,(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum $=$ (multiplicatione actu facta)

$$y dy - \tfrac{1}{2}y^2 dy + \tfrac{1}{3}y^3 dy - \tfrac{1}{4}y^4 dv + \tfrac{1}{5}y^5 dy \text{ \&c.}$$

$$+ y^2 dy - \tfrac{1}{2}y^3 dy + \tfrac{1}{3}y^4 dy - \tfrac{1}{4}y^5 dy \text{ \&c.}$$

h. e. $y dy + \frac{1}{2}y^2 dy - \frac{1}{6}y^3 dy + \frac{1}{12}y^4 dy - \frac{1}{20}y^5 dy$ &c.

Unde tandem habetur $\int xlxdx = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{80}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 - \frac{1}{1.2.3.4}y^4 + \frac{1}{1.3.4.5}y^5 - \frac{1}{1.4.5.6}y^6$ &c. in infinitum: in qua serie $y = x - 1$.

PROBLEMA 113.

267. *Differentiale exponentialem quantitatem involvens integrare.*

Sit differentiale integrandum $x^x dx$. Fiat $x = 1 + y$, erit $x^x = (1+y)^{1+y}$, adeoque $x^x dx = (1+y)^{1+y} dy$. Fiat

$$(1+y)^{1+y} = 1 + v$$

erit $(1+y)l(1+y) = l(1+v)$

hoc est, $(1+y)\,(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum$) = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§. 255).

seu per calculum præcedentem

 $y+$

$y+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{12}y^4-\frac{1}{20}y^5$ &c. in infinitum $=v-\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{3}v^3-\frac{1}{4}v^4+\frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§.266.).

Fiat porro

$$v=y+ky^2+my^3+ny^4+py^5 \text{ \&c.}$$

erit

$$\begin{aligned} v^2 &= +y^2+2ky^3+k^2y^4+2kmy^5 \\ &\qquad\qquad +2my^4+2ny^5 \\ v^3 &= \qquad +y^3+3ky^4+3k^2y^5 \\ &\qquad\qquad\qquad +3my^5 \\ v^4 &= \qquad\qquad +y^4+4ky^5 \\ v^5 &= \qquad\qquad\qquad +y^5 \end{aligned}$$

(§.95 *part. 1*). Unde

$$\begin{aligned} v &= y+ky^2+my^3+ny^4+py^5 \text{ \&c.} \\ -\tfrac{1}{2}v^2 &= -\tfrac{1}{2}y^2-ky^3-\tfrac{1}{2}k^2y^4-kmy^5 \\ &\qquad\qquad -my^4-ny^5 \\ +\tfrac{1}{3}v^3 &= \qquad +\tfrac{1}{3}y^3+ky^4+k^2y^5 \\ &\qquad\qquad\qquad +my^5 \\ -\tfrac{1}{4}v^4 &= \qquad\qquad -\tfrac{1}{4}y^4-ky^5 \\ +\tfrac{1}{5}v^5 &= \qquad\qquad\qquad +\tfrac{1}{5}y^5 \\ &-y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{6}y^3-\tfrac{1}{12}y^4+\tfrac{1}{20}y^5=0 \end{aligned}$$

Habemus ergo

$$1-1=0 \qquad k-\tfrac{2}{2}=0 \qquad m-k+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}=0$$

$$1=1 \qquad k=1 \qquad m=1-\tfrac{3}{6}=\tfrac{1}{2}$$

$$n-\tfrac{1}{2}k^2-m+k-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{12}=0$$

$$n=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-1+\tfrac{4}{12}=\tfrac{1}{3}$$

$$p-km-n+k^2+m-k+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{20}=0$$

$$p=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-1-\tfrac{1}{2}+1-\tfrac{5}{20}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{4}{12}-\tfrac{3}{12}=\tfrac{1}{12}$$

Consequenter

$(1+y)^{1+y}=1+v=1+y+y^2+\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{3}y^4+\frac{1}{12}y^5$ &c: in infinitum.

Quare differentiale ad integrandum propositum $(1+y)^{1+y}dy=dy+ydy+y^2dy+\frac{1}{2}y^3dy+\frac{1}{3}y^4dy+\frac{1}{12}y^5dy$ &c. in infinitum, adeoque $\int(1+y)^{1+y}dy=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{8}y^4+\frac{1}{15}y^5+\frac{1}{60}y^6$ &c.

PROBLEMA 114.

268. *Quantitatem exponentialem, consequenter curvam exponentialem, cujus æquatio datur, construere.*

RESOLUTIO.

Quantitates exponentiales reducendæ sunt ad logarithmicas, quæ per abscissas Logarithmicæ exhiberi possunt. Tab. III. Fig. 30.

E. gr. Sit construenda curva exponentialis, ad quam $x^x=y$; erit (§. 339 *Arithm.*) $xlx=ly$. Supponamus Logarithmicam MBN descriptam & in ea semiordinatam $AB=1$. Sit $PM=x$; erit $AP=lx$. Est vero $1:lx=x:ly$ (§.299 *Arithm.*). Ergo ly reperiri potest (§. 271 *Geom.*): cui si æqualis in axe Logisticæ sumatur AH, erit $HI=y$ (§. 506. *part. 1*). Quodlibet adeo curvæ exponentialis punctum G reperitur sequentem in modum:

Fiat $AC=x$ & ducatur MC ipsi AP parallela, quæ Logisticam in M secabit; erit $MC=AP=lx$. Fiat $CD=AB=1$ & $DE=AC$, ducaturque LE ipsi MC parallela; erit $LE=ly$. Ducatur LH ipsi EA parallela; erit $HI=y$. Quodsi ergo AC sumatur pro axe curvæ exponentialis fiatque

que CG=HI; erit G punctum in curva quæsita.

Porro cum $x=o$, erit $ly=o$. Sed o est logarithmus unitatis. Ergo y est unitas, consequenter = AB. Quare si fiat AF=AB; erit F punctum curvæ exponentialis.

Similiter quando AB=1=x; erit $lx=o$, adeoque ad AB applicata y est 1 seu ipsi AB æqualis. Quamobrem si fiat BK=BA; erit K punctum curvæ exponentialis.

CAPUT II.

DE USU CALCULI EXPONENTIALIS IN CURVARUM EXPONENTIALIUM SYMPTOMATIS INVESTIGANDIS.

DEFINITIO 12.

269. *Curva exponentialis* est, quæ definitur per æquationem exponentialem.

DEFINITIO 13.

270. *Æquatio exponentialis* est, quam ingreditur quantitas exponentialis.

PROBLEMA 115.

271. *Invenire subtangentem curvæ, in qua $a^x=y$.*

Quoniam $a^x=y$

erit $xla=ly$

$ladx=dy:y$ (§.243)

$dx=dy:yla$

Ergo subtangens $ydx:dy$ (§.'20) $=ydy:ylady=1:la$.

Constructio. Sit descripta Logistica quæcunque MBN & in ea AB=1. Fiat AC=a ducaturque CM ipsi AP & MP ipsi AC parallela: erit PM=AC=a & AP=la (§.554. *part.* 1). Fiat porro PQ=AB=1, itemque QT ipsi AB parallela; erit TQ=1 : la (§. 302. *Arithm.* & §. 268. *Geom.*). Tab. III. Fig. 31.

COROLLARIUM.

272 Quoniam curvæ subtangens 1 : la constans; æquatio proposita ad Logarithmicam est.

SCHOLION.

273. *Nempe si subtangens Logisticæ fuerit* 1 : la; *ea definitur per* $a^x=y$

PROBLEMA 116.

274. *Quadrare spatium Logisticum interminatum* HPMI. Tab. I.

Sit Logisticæ subtangens PT=1 : la; PM=y, Pp=dx; erit Fig. 8.

 $a^x=$

$a^x = y$ (§. 271).

$xla = ly$

$ladx = dy : y$ (§. 243)

$dx = dy : yla$

$ydx = ydy : yla = dy : la$

$\int ydx = y : la = y\,(1 : la) = PM.\ PT$

COROLLARIUM 1.

275. Spatium Logisticum interminatum HPMI est trianguli subtangente PT, tangente TM & semiordinata PM contenti duplum (§. 385 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

276. Quoniam Spatium HPMI=PM. PT & ISQH=SQ. PT (§. 274); erit QPMS=(PM−SQ) PT, hoc est, spatium inter duas semiordinatas interceptum æquale rectangulo ex subtangente in differentiam semiordinatarum.

PROBLEMA 117.

277. *Cubare solidum Logisticum ex rotatione spatii interminati* HPMI *circa asymptotum* PH *geniti.*

Quoniam (§. 274)

$dx = dy : yla$ erit (§. 197)

$py^2dx : 2r = py^2dy : 2ryla = pydy : 2rla$

$\int py^2dx : 2r = py^2 : 4rla.$

COROLLARIUM 1.

278. Quoniam $py^2 : 2r$ est circulus radio PM=y descriptus (§. 197), $py^2 : 4rla$ est cylindrus, cujus basis eadem est cum basi solidi logistici, altitudo vero $1 : 2la$ seu $\frac{1}{2}$PT (§. 441 *Geom.*).

COROLLARIUM 2.

279. Est ergo solidum istud logisticum ad conum, cujus altitudo subtangens PT=$1 : la$, semidiameter basis PM=y, ut $py^2 : 4rla$ ad $py^2 : 6rla$, hoc est, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{6}$ seu ut 6 ad 4, aut ut 3 ad 2 (§. 124 *part. 1*).

PROBLEMA 118.

280. *Determinare subnormalem Logisticæ.*

Quoniam $ladx = dy : y$ (§. 274)

erit $dy = yladx$

$ydy : dx = y^2ladx : dx$ (§. 35)

$= y^2la = y^2 : \frac{1}{la}$

Est adeo subnormalis tertia proportionalis ad subtangentem PT=$1 : la$ & semiordinatam PM=y.

COROLLARIUM.

281. Quodsi ergo parabola describatur, cujus parameter subtangenti logisticæ æqualis; semiordinatæ parabolæ eædem sunt cum semiordinatis logisticæ, illius autem abscissis hujus subnormales æquantur.

PROBLEMA 119.

282. *Determinare subtangentem curvæ exponentialis, ad quam* $x^x = y$.

Quo-

Quoniam $xlx = ly$

erit $lxdx + xdx : x = dy : y$

$ylxdx + ydx = dy$

Ergo subtangens $ydx : dy = ydx : (ylxdx + ydx) = 1 : (lx + 1)$.

Tab. III. Fig. 30. Est itaque PT tertia proportionalis ad $AB + AP = 1 + lx$ & $AB = 1$ (§. 208).

PROBLEMA 120.

283. *Determinare subnormalem curvæ, ad quam $x^x = y$.*

Quia $ylxdx + ydx = dy$ (§. 221); erit subnormalis $ydy : dx = (y^2 lxdx + y^2 dx) : dx$ (§. 34) $= y^2 lx + y^2 = y^2 (lx + 1)$

Quærenda igitur est ad $AB = 1$ & $PM = y$ tertia proportionalis y^2 & hinc porro ad $AB = 1$, $AB + AP = 1 + lx$ atque lineam inventam y^2 quarta proportionalis.

PROBLEMA 121.

Tab. III. Fig. 30. 284. *Determinare minimam applicatam SR in curva exponentiali, ad quam $x^x = y$.*

Quoniam $ylxdx + ydx = dy$ (§. 282); fiat

$ylxdx + ydx = 0$ (§. 61).

erit $lx + 1 = 0$

$1 = -lx$

Fiat ergo $AT = AB = 1$; erit $TV = AR = x$ (§. 554 part. 1.).

Quodsi pro lx in æquatione curvæ $xlx = ly$ substituatur valor modo inventus -1; prodibit $x = -ly$. Fiat igitur $AQ = VT = -x$; erit $NQ = y$ (§. cit. part. 1).

PROBLEMA 122.

285. *Quadrare curvam exponentialem, ad quam $x^x = y$.*

Quoniam elementum areæ ydx (§. 98); erit area curvæ $= \int x^x dx =$ (si pro x ponatur $1 + v$) $v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{8}v^4 + \frac{1}{15}v^5 + \frac{1}{72}v^6$ &c. in infinitum (§. 267).

PROBLEMA 123.

286. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subtangens $= 1 : (1 + lx)$.*

Quoniam $1 : (1 + lx) = ydx : dy$ (§. 280)

erit $dy = y(1 + lx)dx$

$dy : y = dx + lxdx$

$\int dy : y = ly$, $\int (dx + lxdx) = xlx$

$ly = xlx$

$y = x^x$ (§. 337 *Arithm.*)

PROBLEMA 124.

287. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis $y^2 (lx + 1)$.*

Quo-

Quoniam $y^2(lx+1)=ydy:dx$ (§.35)

erit $y^2(lx+1)dx=ydy$

$lxdx+dx=dy:y$

$xlx=ly$ (§.243)

$x^x=y$ (§.341 *Arithm.*)

PROBLEMA 125.

288. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis y^2la.*

Quoniam $y^2la=ydy:dx$ (§.35)

erit $y^2ladx=ydy$

$ladx=dy:y$

$xla=ly$ (§.243)

$a^x=y$ (§.341 *Arithm.*)

Est ergo Curva quæsita Logarithmica vulgaris seu Logistica (§.272).

PROBLEMA 126.

289. *Invenire æquationem ad curvam, cujus area $(2x^2lx-x^2):4la$.*

Quoniam (§.98)

$(4xlxdx+2xdx-2xdx):4la=ydx$

erit $4xlx=4yla$

$xlx=yla$

$x^x=a^y$ (§.341 *Arithm.*)

Curva hæc vi probl. 114. (§.268) ita construitur ope Logarithmicæ vulgaris MBN. Sit nempe AB=1; quæ in infinitum producatur. Fiat AD=a & AC=x, ducanturque DL & CM ipsi AP, HL & PM ipsi AC parallelæ; erit DL=AH=la & CM=AP=lx (§.268). Fiat AF=AH & ducatur FE ipsi CG parallela, per A vero & E recta AG ipsi CM continuatæ in G occurrens, erit CG=$xlx:la=y$ (§.268 *Geom.*), adeoque punctum G in curva quæsita, quæ definitur per $x^x=a^y$. Tab. III. Fig. 32.

COROLLARIUM 1.

290. Quia $lxdx+dx=lady$ (§.243)

erit $dx=lady:(lx+1)$

$ydx:dy=yla:(lx+1)$ (§.20).

Est ergo subtangens curvæ hujus exponentialis quarta proportionalis ad AB+AP, CG & constantem AH.

COROLLARIUM. 2.

291. Quia $(lxdx+dx):la=dy$ (§.290); erit $ydy:dx=y(lx+1):la$, adeoque subnormalis curvæ hujus exponentialis est quarta proportionalis ad constantem AH, ad AP+AB & ad CG.

COROLLARIUM 3.

292. Est ergo subtangens ad subnormalem ut $yla:(lx+1)$ ad $y(lx+1):la$, hoc est, ut la^2 ad $(lx+1)^2$ (§.124 *part. 1*). Quare quadratum compositæ ex constante AB & variabili AP est ad quadratum constantis AH ut subnormalis curvæ exponentialis ad ejus subtangentem.

SECTIO

SECTIO IV.
DE CALCULO DIFFERENTIO-DIFFERENTIALI.

CAPUT I.
DE NATURA CALCULI DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIS.

DEFINITIO 14.

293. *Calculus differentio-differentialis* est methodus quantitates differentiales denuo differentiandi.

COROLLARIUM.

294. Quoniam signum differentialis est d (§. 8): differentiale ipsius dx erit ddx; differentiale ipsius ddx erit $dddx$ & ita porro.

HYPOTHESIS.

295. *Scribantur* ddx, $dddx$, $ddddx$ &c. *compendiosius* d^2x, d^3x, d^4x &c.

DEFINITIO 15.

296. *Differentiale primi gradus* est infinitesima quantitatis ordinariæ, ut dx, *Differentiale secundi gradus* est infinitesima quantitatis differentialis primi gradus, veluti ddx, $dxdx$ vel dx^2, $dxdy$. *Differentiale tertii gradus* est infinitesima quantitatis differentialis secundi gradus, ut $dddx$, dx^3, $dx\,dydz$ & ita porro.

PROBLEMA 127.

297. *Invenire regulas differentiandi differentialia quæcunque data.*

RESOLUTIO.

Eodem prorsus modo investigari possunt, quo supra invenire docuimus regulas differentiandi quantitates ordinarias (§. 17. 19): id quod uno alteroque exemplo ostendere libet.

E. gr. I. Sit investigandum differentiale ipsius xdx.

Fiat $xdx = v$

erit $dx = v:x$

$d^2x = (xdv - vdx): x^2$ (§. 19)

$x^2d^2x = xdv - vdx$

$vdx + x^2d^2x = xdv$

hoc est, ob $v = xdx$,

$xdx^2 + x^2d^2x = xdv$

$dx^2 + xd^2x = dv$

Differentiatur ergo xdx eodem modo, quo duæ quantitates ordinariæ se mutuo multiplicantes differentiari solent (§. 12).

II. Sit differentiale ipsius $x : dx$ investigandum.

Fiat $x : dx = v$

$$x = vdx$$

$$dx = vd^2x + dxdv \quad \textit{per cas. præc.}$$
$$dx - vd^2x = dxdv$$

hoc est, ob $v = x : dx$

$$dx - xd^2x : dx = (dx^2 - xd^2x) : dx = dxdv$$

$$(dx^2 - xd^2x) : dx^2 = dv$$

Differentiatur itaque $x : dx$ eodem modo, quo quantitates ordinariæ se mutuo dividentes differentiari solent (§. 19).

III. Sit differentiale ipsius dx^2 investigandum.

Fiat $dx^2 = v$

erit $dx = v : dx$

$$d^2x = (dxdv - vd^2x) : dx^2 \quad \textit{per cas. 2.}$$

$$dx^2 d^2x = dxdv - vd^2x$$

$$vd^2x + dx^2d^2x = dxdv$$

hoc est, ob $v = dx^2$

$$dx^2d^2x + dx^2d^2x = 2dx^2d^2x = dxdv$$

$$2dxd^2x = dv$$

Differentialium igitur potentiæ, veluti dx^2, eodem modo differentiantur, quo potentiæ quantitatum ordinariarum differentiari solent (§. 13. seqq.)

COROLLARIUM. 1.

298. Cum differentialia composita aut se mutuo multiplicent, aut se mutuo dividant, aut potentiæ sive perfectæ, sive imperfectæ differentialium primi gradus existant; differentialia eodem modo, quo quantitates ordinariæ, differentiantur.

COROLLARIUM 2.

299. Calculus adeo differentio-differentialis non est diversus a calculo differentiali (§. 293).

PROBLEMA 128.

300. *Differentiare differentialia.*

RESOLUTIO.

Differentialia considerentur instar ordinariarum quantitatum & ex circumstantiis casuum specialium dijudicetur, quænam sint variabiles, quænam constantes. Ipsa vero differentiatio absolvatur per problemata *cap. 1. sect. 1.* (vi §. 299).

E. gr. Sit differentiale denuo differentiandum $= 1 : dx$ & 1 quantitas constans erit $d(1 : dx) = -d^2x : dx^2$ (§. 19). Similiter reperitur $d(ydy : dx) = (dy^2 + yd^2y) : dx$, si dx constans; vel $(dxdy^2 - ydyd^2x) : dx^2$, si dy constans.

CAPUT

CAPUT II.

DE USU CALCULI DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIS IN INVENIENDO PUNCTO FLEXUS CONTRARII CURVARUM.

DEFINITIO 16.

Tab. III. Fig. 33. n. 1. 301. *Punctum flexus contrarii* est punctum M, in quo curva flectitur in partes contrarias, ut scilicet axi, aut puncto cuidam fixo, convexitatem obvertat, cum antea concavitatem obverteret. Vocatur *Punctum regressus*, si curva AMI in contrarias partes flexa regreditur versus verticem A.

PROBLEMA 129.

302. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum ordinatæ sunt inter se parallelæ.*

RESOLUTIO.

Sint duæ curvæ AMS, quarum una axi concavitatem, altera convexitatem obvertat. Ducatur tangens TM, sintque PM, *pm* & QS infinitæ propinquæ, & P*p* = *p*Q, hoc est, *dx* sit constans. Demittantur ex punctis curvarum M & *m* perpendiculares MR & *mr*. Quoniam *pm* ipsi QS parallela, *per hypoth.* erit angulus *m* = S (§. 233. *Geom.*). Sed MR = P*p* & *mr* = *pq per hypoth.* adeoque MR = *mr* (§. 87. *Arithm.*). Ergo *m*R = *r*S (§. 251 *Geom.*). Est vero S*r* > V*r*, quando curva axi concavitatem obvertit, & S*r* < V*r*, quando convexitas curvæ axem respicit. Quamobrem in casu priore differentia semiordinatarum *dy* continuo decrescit, in posteriore autem crescit, sumta abscissæ differentia *dx* pro constante. In puncto itaque flexus contrarii differentia semiordinatarum *dy* est minimum aliquod, quando curva primum ad axem concava, deinde convexa; maximum vero aliquod, quando curva ad axem primum convexa, deinde concava. Invenitur adeo illud punctum, si fiat $ddy = o$ vel $ddy = \infty$, hoc est, si sumta *dx* pro constante, valor ipsius *dy* denuo differentietur (§. 300) & quæ prodit differentia vel nihilo, vel infinito æqualis ponatur.

(Marginal note: Tab. III. Fig. 33. n. 1. 2.)

COROLLARIUM.

303. Quodsi æquatio ad curvam ignotam

tam detur; inveniri potest, utrum convexitatem, an concavitatem axi obvertat, si ex æquatione differentiali eruatur ratio mr & MR. E. gr. In parabola (§. 388 *part. 1.*)

$$ax = y^2$$

adeoque $adx = 2ydy$

$$a : 2y = dy : dx$$

hoc est, $a : 2\sqrt{ax} = dy : dy$

Crescente adeo abscissa x, decrescit ratio $a : 2\sqrt{ax}$ (§. 205 *Arithm.*). Quare cum dx sit constans, *per hypoth.* dy decrescere debet (§. 204 *Arithm.*). Parabola igitur constanter concavitatem axi obvertit, adeoque punctum flexus contrarii habet nullum.

PROBLEMA 130.

Tab. III. Fig. 34. 304. *Determinare punctum flexus contrarii* M *in Cycloide* AMN *ejus naturæ, ut sit* AQB : BN = AQ : QM.

Sit semiperipheria circuli genitoris AQB $= p$, BN $= a$, AB $= 1$, PQ $= v$, AQ $= z$, AP $= x$, PM $= y$. Quoniam *per hypoth.*

$$AQB : BN = AQ : QM$$

$$p : a = z : \frac{az}{p}$$

erit PM = PQ + QM $= v + az : p$. Est adeo æquatio ad curvam

$$y = v + az : p$$

unde $dy = dv + adz : p$

Sed $dz = dx : 2\sqrt{(x - xx)}$ (§. 157) &, ob $v = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part. 1.*), $dv = (dx - 2xdx) : 2\sqrt{(x - xx)}$.

Ergo $2pdy = (pdx - 2pxdx + adx) : \sqrt{(x - xx)}$. Quodsi adeo dx sumatur pro constante; erit (§. 300) $2pddy = -2p\sqrt{(x - xx)}\,dx^2 : (x - xx) - (pdx^2 + 4pxdx^2 - adx^2 - 4px^2dx^2 + 2axdx^2) : (x - x^2)2\sqrt{(x - xx)} = [-4px + 4px^2 - p + 4px - a - 4px^2 + 2ax]\,dx^2 : 2(x - x^2)\sqrt{(x - xx)} = (2ax - p - a)\,dx^2 : 2(x - x^2)\sqrt{(x - x^2)}$. Quare (§. 302)

$$(2ax - p - a)dx^2 : 2(x - x^2)\sqrt{(x - x^2)} = 0$$

$$2ax - p - a = 0$$

$$2ax = a + p$$

$$x = \tfrac{1}{2} + p : 2a$$

Ergo CP = AP − AC $= x - \frac{1}{2} = p : 2a$. Est adeo $a : p = \frac{1}{2}$: CP

BN : AQB = BC : CP.

PROBLEMA 131.

305. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $axx = (xx + aa)y$.

Quoniam $axx = (xx + aa)y$

erit $$axx : (xx + aa) = y$$

$$\frac{2ax^3dx + 2a^3xdx - 2ax^3dx}{(xx + aa)^2} = dy$$

hoc

hoc est, $\frac{2a^3xdx}{x^4+2a^2x^2+a^4}=dy$

Quodsi adeo dx sumatur pro constante, reperietur (§. 300)
$[(2a^3x^4+4a^5x^2+2a^7)dx^2-(8a^3x^4-8a^5x^2)dx^2]:(x^2+a^2)^4=(2a^7-6a^3x^4-4a^5x^2)dx^2:(x^2+a^2)^4=ddy$.
Quare (§. 302)

$$2a^7-6a^3x^4-4a^5x^2=0 \quad \text{———}2a^3$$

$$a^4-3x^4-2a^2x^2=0 \quad \text{———}aa+xx$$

$$aa-3x=0$$

$$aa=3x^2$$

$$\tfrac{1}{3}aa=x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}aa}=x$$

Quodsi valor ipsius x^2 in æquatione data $axx=(xx+aa)y$ substituatur: prodibit

$$\tfrac{1}{3}a^3=\tfrac{4}{3}aay \quad \text{———}\tfrac{1}{3}aa$$

$$\tfrac{1}{4}a=y$$

Quare si $\sqrt{\tfrac{1}{3}aa}$ & $\tfrac{1}{4}a$ jungantur ad angulos rectos, punctum flexus contrarii determinatur, utut curva nondum fuerit descripta.

PROBLEMA 132.

306. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $4b^3x=2b^2y^2-y^4$.

Quoniam $4b^3x=2b^2y^2-y^4$

erit $4b^3dx=4b^2ydy-4y^3dy$

$$\frac{b^3dx}{b^2y-y^3}=dy$$

Porro quoniam dx constans, reperietur (§. 300),

$$ddy=\frac{-b^5dxdy+3b^3y^2dxdy}{(b^2y-y^3)^2}=0$$

$$3b^3y^2-b^5=0$$

$$3y^2=b^2$$

$$y=\sqrt{\tfrac{1}{3}b^2}$$

Substituatur hic valor in æquatione ad curvam $4b^3x=2b^2y^2-y^4$, erit

$$4b^3x=\tfrac{2}{3}b^4-\tfrac{1}{9}b^4=\tfrac{5}{9}b^4$$

$$x=\tfrac{5}{36}b$$

Quodsi sit $x=0$, erit

$$2b^2y^2-y^4=0$$

$$2b^2=y^2$$

$$\sqrt{2b^2}=y$$

Quodsi ponamus $dy=\infty$, erit ob $b^3dx:(b^2y-y^3)=dy$

$$b^2y-y^3=0$$

$$b^2-y^2=0$$

$$b^2=y^2$$

$$b=y$$

 in

in casu maximi (§.63).

Quodsi denique hic valor substituatur in æquatione ad curvam $4b^3x=2b^2y^2-y^4$; erit

$$4b^3x=2b^4-b^4=b^4$$

adeoque $x=\frac{1}{4}b$

Curvæ igitur hujus ductus est prorsus mirabilis.

PROBLEMA 133.

307. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam $ay^2=x^3-bx^2$.*

Quia $ayy=x^3-bx^2$

erit $2aydy=3x^2dx-2bxdx$

$$dy=\frac{3x^2dx-2bxdx}{2ay}$$

$$ddy=(12axydx^2-4abydx^2-6ax^2dxdy+4abxdxdy):4a^2y^2=0$$

Hinc $(12axy-4aby)dx^2=(6ax^2-4abx)dxdy$

$$\frac{(6x-2b)ydx}{3x^2-2bx}=dy=\frac{(3x^2-2bx)dx}{2ay}$$

$$(12x-4b)ayy=(3x^2-2bx)^2$$

$$(12x-4b)(x^3-bx^2)=(3x^2-2bx)^2$$

hoc est,

$$12x^4-16bx^3+4b^2x^2=9x^4-12bx^3+4b^2x^2$$

$$3x^4-4bx^3=0$$

$$3x-4b=0$$

$$3x=4b$$

$$x=\frac{4}{3}b$$

Substituatur valor ipsius x in æquatione data $ayy=x^3-bx^2$; reperietur

$$ayy=\tfrac{64}{27}b^3-\tfrac{16}{9}b^3$$
$$=\tfrac{64}{27}b^3-\tfrac{48}{27}b^3$$
$$=\tfrac{16}{27}b^3$$
$$=\tfrac{2}{9}b^3$$

$$y=\tfrac{1}{3}\sqrt{(2b^3:a)}$$

PROBLEMA 134.

308. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam $y-a=(x-a)^{3:5}$*

Quoniam $y-a=(x-a)^{3:5}$

erit $dy=\frac{3}{5}(x-a)^{-2:5}dx$

Quodsi ergo dx sumatur pro constante; reperietur

$$ddy=-\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2=0$$

$$-\tfrac{6}{25}(x-a)^{-7:5}=0$$

$$-6=0$$

Quoniam nullus valor ipsius x prodit

prodit in hypothesi $ddy = 0$; ponatur

$$-6dx^2 : 25\sqrt[5]{(x-a)^7} = \infty$$

erit $25\sqrt[5]{(x-a)^7} = 0$

$$x - a = 0$$

$$x = a$$

PROBLEMA 135.

309. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum semiordinatæ* CM, C*m*, *ex puncto fixo* C *ducuntur.*

Tab. III. Fig. 35. n.1.2. Sit C*m* ipsi CM infinite propinqua & CM=y. Tangat TM curvam in puncto M & occurrat ipsi CT ad CM perpendiculari in T. Erigatur etiam C*t* perpendicularis ad C*m* & ducatur tangens *tm* ad punctum *m*, quæ ipsi C*t* in *t* occurret. Secabit autem tangens TM perpendicularem C*t* in L, eritque C*t* < CL, quando curva puncto C seu polo convexitatem obvertit; ast eadem C*t* > CL, quando curva est versus polum C concava. Igitur in flexus contrarii puncto L*t* = 0. Describatur jam ex centro C radio CM arcus MR = *dx* & radio CT arcus TH; erit ob MCT = *m*C*t* (§. 145 *Geom.*) MC*m* = HCT (§. 91 *Arithm.*), consequenter arcus TH ∽ MR (§. 141 *Geom.*). Porro TCM est rectus *per construct.* MR*m* itidem rectus (§. 38), adeoque TCM = MR*m* (§. 145 *Geom.*). Et quia TMC = M*m*C + MC*m* (§. 239 *Geom.*), & MC*m* = 0; erit M*m*R = TMC, consequenter (§. 267. *Geom.*)

$$mR : MR = MC : TC$$
$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Et ob arcus MR & TH similes *per demonstrata*, erit (§. 413 *Geom.*) & §. 171 *Arithm.*)

$$CM : CT = MR : TH$$
$$y : \frac{ydx}{dy} = dx : \frac{dx^2}{dy}$$

Denique cum verticales ad L sint æquales (§. 156 *Geom.*) ob infinite parvum LCT vero MLC = LTC (§. 239 *Geom.*) & H rectus (§. 38), MCT itidem rectus *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*)

$$CM : CT = TH : HL$$
$$y : \frac{ydx}{dy} = \frac{dx^2}{dy} :$$

Ergo $HL = dx^3 : dy^2$.

Est vero ob $CT = ydx : dy$ sumto arculo $MR = dx$ pro constante $tH = (dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$ (§. 300). Ergo $tL = tG + HL = (dxdy^2 - ydxddy + dx^3) : dy^2$.

Fiat

Fiat jam $\frac{dxdy^2 - ydxddy + dx^3}{dy^2} = 0$

erit $dy^2 + dx^2 = yddy$

PROBLEMA 136.

Tab. I. Fig. 5.

310. *Determinare punctum flexus contrarii in conchoide* Nicomedis.

Sit $AB = qM = a$, $BC = b$, $Cq = z$, $CM = y$, $Mr = dx$, erit $mr = dy$ & (§. 535 *part. 1*)

$$\frac{z + a = y}{dz = dy}$$

Porro $Bq = \sqrt{(zz - bb)}$ (§. 417 *Geom.*) & ducto arculo qt, erit ob rectos t & B atque s & q non nisi infinite parvo angulo qCs differentes (§. 239 *Geom.*) adeoque æquales (§. 4) $\triangle Sqt \backsim \triangle BCq$ (§. 267 *Geom.*), consequenter:

$$Bq : BC = St : tq$$

$$\sqrt{(z^2 - b^2)} : b = dz : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}}$$

Et ob sectores Cqt & CMr similes est

$$Cq : qt = CM : Mr$$

$$z : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}} = z + a : \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{(z^2 - b^2)}}$$

Unde $dx = (bzdz + abdz) : z\sqrt{(z^2 - b^2)}$

$$zdx\sqrt{(z^2 - b^2)} = bzdz + abdz$$

$$\frac{zdx\sqrt{(z^2 - b^2)}}{ab + bz} = dz = dy$$

Si itaque dx sumatur pro constante, cum sit differentiale ipsius $zdx \sqrt{(z^2 - b^2)} = dzdx\sqrt{(z^2 - b^2)} + z^2 dzdx : \sqrt{(z^2 - b^2)} = (2z^2 - b^2) dzdx : \sqrt{(z^2 - b^2)}$ & differentiale denominatoris $bz + ab = bdz$, reperitur $ddy = (2abz^2 - ab^3 + 2bz^3 - b^3 z) dzdx : (ab + bz)^2 \sqrt{(z^2 - b^2)} - bz\sqrt{(z^2 - b^2)} dzdx : (ab + bz)^2 = (2abz^2 - ab^3 + bz^3) dzdx : (ab + bz)^2 \sqrt{(z^2 - b^2)}$ $=$, substituto valore ipsius dz, $(2abz^3 - ab^3 z + bz^4) dx^2 : (ab + bz)^3$.

Quoniam in puncto flexus contrarii

$$yddy = dx^2 + dy^2 \quad (\S. 308)$$

hinc tandem eruitur

$$b(z + a)(2az^3 - ab^2 z + z^4) dx^2 : (ab + bz)^3 = dx^2 + (z^4 - b^2 z^2) dx^2 : (ab + bz)^2$$

$$2az^3 - ab^2 z + z^4 = (ab + bz)^2 + z^4 - b^2 z^2$$

$$2az^3 - ab^2 z = a^2 b^2 + 2ab^2 z + b^2 z^2 - b^2 z^2 = a^2 b^2 + 2ab^2 z$$

$$2az^3 - 3ab^2 z = a^2 b^2 \quad \quad 2a$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2} b^2 z - \tfrac{1}{2} ab^2 = 0$$

Describatur itaque parametro b parabola & (§ 622 *part. 1*) fiat $AL = \frac{5}{4} b$ & $LI = \frac{1}{4} a$. Ex centro I per vercem A describatur parabola: dico esse $PM = z$. Nam $AI^2 = LI^2 + AL^2$ Tab. I. Fig. 14.

$= \frac{1}{16}$

$= \frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb$ & MR $= z - \frac{1}{4}a$, AP $= z^2 : b$, IR $= z^2 : b - \frac{5}{4}b$. Quare ob $AI^2 = MI^2 = MR^2 + IR^2$,

$$\frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb = \frac{z^4 - \frac{10}{4}z^2 + \frac{25}{16}b^2}{bb}$$

$$+ z^2 - \frac{1}{2}az + \frac{1}{16}aa$$

$$\frac{z^4 - \frac{6}{4}z^2 - \frac{1}{2}az = 0}{bb}$$

$$z : bb$$

$$z^3 - \frac{3}{2}b^2z - \frac{1}{2}ab^2 = 0.$$

SCHOLION.

311. *Nisi inconsulta nobis visa fuisset figurarum multiplicatio, parabolam circa axem* CT *descripsissemus, statuto vertice in* C *& crure sursum tendente.* Tab. I. Fig. 5.

PROBLEMA 137.

Tab. III. Fig. 36. 312. *Determinare punctum flexus contrarii in spirali parabolica* A MC, *quæ generatur, si axis parabolæ in peripheriam circuli incurvatur.*

Quoniam semiordinatæ PM ad axem perpendiculares; in centro C concurrere debent (§.38). Quare si parameter parabolæ a, abscissa AP $= v$, PM $= y$; erit æquatio ad spiralem parabolicam

$$av = y^2$$

adeoque $adv = 2ydy$

$$dv = 2ydy : a$$

Sit porro radius circuli $= r$, MR $= dx$; erit CM $= r - y$ &

$$CP : Pp = CM : MR$$

$$r : dv = r - y : dx$$

$$rdx = rdv - ydv$$

$$dx = (r - y)\, dv : r$$

hoc est, substituto valore ipsius dv

$$(2rydy - 2y^2dy) : ar = dx$$

$$(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4)\, dy^2 : a^2r^2 = dx^2$$

&, si dx sumatur pro constante,

$$\frac{2rdy^2 - 4ydy^2 + 2ryddy - 2y^2ddy = 0}{ar}$$

$$(r - 2y)\, dy^2 + (ry - y^2)\, ddy = 0$$

$$(r - y)\, yddy = (2y - r)\, dy^2$$

$$yddy = \frac{(2y - r)\, dy^2}{r - y}$$

Habemus adeo

ob $dx^2 + dy^2 = yddy$ (§.309)

$$\frac{(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4 + a^2r^2)\, dy^2}{a^2r^2} = \frac{(2y - r)\, dy^2}{r - y}$$

$$4r^3y^2 - 8r^2y^3 + 4ry^4 + a^2r^3 - 4r^2y^3 + 8ry^4 - 4y^5 - a^2r^2y = 2a^2r^2y - a^2r^3$$

$$4y^5 - 12ry^4 + 12r^2y^3 - 4r^3y^2 + 3a^2r^2y - 2a^2r^3 = 0$$

Hujus æquationis radix y est semiordinata PM in puncto flexus contrarii.

CAPUT III.
DE USU CALCULI DIFFERENTIO-DIFFERFNTIALIS IN INVESTIGANDIS EVOLUTIS CURVARUM ET RADIO OSCULI.

DEFINITIO 17.

Tab. III. Fig. 37. 313. SI curvæ BCF filum circumplicetur & successive iterum ab ea abducatur, extremitas ejus A in rectam MC extensi curvam aliam describit, quam *Hugenius* inventor (k) *Curvam ex evolutione descriptam*; sicut alteram, quæ evolvitur, *Evolutam* vocat.

DEFINITIO 18.

314. Portio fili MC appellatur *Radius Evolutæ*, item *Radius curvedinis*, *Radius osculi*. Circulus enim, qui radio evolutæ MC ex centro C describitur, dicitur curvam ex evolutione descriptam in M *osculari*.

COROLLARIUM 1.

315. Evoluta igitur BCF est locus centrorum omnium circulorum curvam ex evolutione descriptam AMI osculantium.

COROLLARIUM. 2.

316. Quando punctum B cadit in A, radius evolutæ MC æquatur arcui BC, alias aggregato ex AB & arcu BC.

COROLLARIUM 2.

317. Quia elementum arcus M*m* in curva ex evolutione descripta est arcus circuli radio CM descriptus (§. 313); radius evolutæ CM est ad curvam AI perpendicularis (§. 38).

COROLLARIUM 4.

318. Quoniam radius evolutæ MC ipsam evolutam BCF continuo tangit, ceu ex genesi manifestum (§. 313); curvæ ex evolutione per innumera puncta describuntur, si tangentes in quotlibet punctis evolutæ producantur, donec arcubus sibi respondentibus æquales fiant.

SCHOLION.

319. *Meditatio de curvarum osculis debetur illustri* Leibnitio, *qui primus evolutarum* Hugenianarum *in metienda curvedine curvarum usum ostendit.*

PROBLEMA 138.

320. *Determinare radium osculi vel curvedinis in curvis, quarum semiordinatæ* PM *&* *pm* *sunt ad axem perpendiculares.* Tab. III. Fig. 37.

RESOLUTIO.

Sit semiordinata *pm* alteri PM infi-

(k) In Horolog. Oscillatorio part. 3. def. 3. f. 60.

infinite propinqua; sit item radius osculi Cm alteri CM infinite propinquus. Ducatur CE ipsi AB parallela, donec semiordinatæ MP continuatæ in E occurrat, & MG eidem axi AB parallela. Quoniam anguli E & R sunt recti & ob EMG & CMm (§. 317) rectos adeoque æquales (§. 145 *Geom.*) utrinque angulo CMG sublato, EMC = GMm; erit (§. 267 *Geom.*)

$$MR : Mm = ME : MC$$

$$dx : \surd(dx^2+dy^2) = t : \frac{t\surd(dx^2+dy^2)}{dx}$$

Jam cum radius MC constans intelligatur, quamdiu ex centro C arcus infinite parvus Mm describitur, interea vero ME augeatur quantitate differentiali Rm; erit radii osculi CM differentiale nullum (§. 7). Sed, si dx sumatur pro constante, differentiale ipsius MC est $dt\surd(dx^2+dy^2) : dx + tdyddy : \surd(dx^2+dy^2)\, dx = (dtdx^2 + dtdy^2 + tdyddy) : dx\surd(dx^2+dy^2)$. Ergo

$$\frac{dtdx^2+dtdy^2+tdyddy}{dx\surd(dx^2+dy^2)} = 0$$

$$dtdx^2+dtdy^2 = -tdyddy$$

Quoniam mR differentiale semiordinatæ etiam differentiale ipsius ME ob PE constantem; erit $dt = dy$.

Quare

$$dx^2+dy^2 = -tddy$$

$$(dx^2+dy^2) : -ddy = t$$

Quodsi itaque ex æquatione ad curvam datam substituatur valor ipsius dy^2 & $-ddy$; prodibit ME $= t$ in quantitatibus ordinariis.

Si vero radius evolutæ MC ipse desideretur (quem interdum inveniri præstat) fiat (§. 267 *Geom.*) ob PH $= ydy : dx$ (§. 35)

$$MP : PH = ME : EC$$

$$y : \frac{ydy}{dx} = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy} : \frac{dx^2dy+dy^3}{-dxddy}$$

Unde $EC^2 = \dfrac{dx^4dy^2+2dx^2dy^4+dy^6}{dx^2ddy^2}$

$$ME^2 = \frac{dx^4+2dx^2dy^2+dy^4}{ddy^2} = \frac{dx^6+2dx^4dy^2+dx^2dy^4}{dx^2ddy^2}$$

$$MC^2 = \frac{dx^6+3dy^2dx^4+3dy^4dx^2+dy^6}{dx^2ddy^2}$$

$$= (dx^4+2dx^2dy^2+dy^4)(dx^2+dy^2) : dx^2ddy^2$$

$$MC = (dx^2+dy^2)\surd(dx^2+dy^2) : -dxddy.$$

PROBLEMA 139.

321. *Data æquatione ad curvam algebraicam, invenire æquationem ad evolutam.*

 RESO-

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 37.

1. Investigentur quantitates BN & CN in valore abscissæ AP aut semiordinatæ PM. Nimirum ME invenitur (§.320): unde subducta PM relinquit PE = NC. Sed per analogiam PM : PH = ME : EC (§. 267 *Geom.*) reperitur EC. Si vero ex AP + EC = AN subtrahatur AB radius evolutæ in vertice B per probl. præc. determinandus, relinquitur BN,
2. Fiat valor ipsius BN = v, CN = z & communis æquationum reductio dabit æquationem ad evolutam in puris v & z atque constantibus.

PROBLEMA 140.

322. *Invenire radium circuli parabolam osculantis & æquationem ad ejus evolutam,*

I. Quoniam $ax = y^2$

erit $adx = 2ydy$

$adx : 2y = dy$

$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$

h.e. $adx^2 : 4x = dy^2$

Et, si dx sumatur pro constante, invenietur ob $adx : 2\sqrt{ax} = dy$

$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy$

Unde $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (4xdx^2 + adx^2)\, 4x\sqrt{ax} : 4axdx^2 = (a + 4x)\sqrt{ax} : a = \sqrt{ax} + 4x\sqrt{ax} : a = y + 4xy : a = t =$ ME = PM + PE. Est vero PM = y. Ergo PE = $4xy : a$ hoc est, quia $x = y^2 : a$, PE = $4y^3 : aa$.

Tab. III. Fig. 33.

Constructio. Quoniam PM = y, TP = $2y^2 : a$ (§. 21); si in T excitetur ad TM perpendicularis TE ipsi MP continuatæ in E occurrens; erit PE = $4y^4 : aay = 4y^3 : aa$ (§. 327 *Geom.*). Quodsi ergo ulterius in E & M excitentur perpendiculares EC & MC ad ME & MT; communis intersectio in C radium osculi seu evolutæ MC determinabit (§. 317).

II. Quoniam EC ipsi PH parallela; erit (§. 267 *Geom.*) ob PH = $\frac{1}{2}a$ (§. 36).

$$PM : PH = ME : EC$$

$$y : \tfrac{1}{2}a = y + 4xy : \tfrac{1}{2}a + 2x$$
$$\overline{\quad a \quad}$$

adeoque $EC^2 = \frac{1}{4}aa + 2ax + 4xx$

$ME^2 = ax + 8x^2 + 16x^3 : a$

$MC^2 = \frac{1}{4}aa + 3ax + 12x^2 + 16x^3 : a$

Jam cum MC coincidit in AB, hoc est, quando radius evolutæ est AB, $x = 0$. Quare $AB^2 = \frac{1}{4}aa$ & hinc AB = $\frac{1}{2}a$. Est adeo BN = AP + PN − AB = $3x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = 3x$. Sit jam BN = v, CN = PE = z: erit

$v = 3x$ $\qquad z = 4x\sqrt{ax} : a$

$\frac{1}{3}v = x$ $\qquad z = \frac{4}{3}v\sqrt{av} : a$

3az

$$3az = 4v\sqrt{\tfrac{1}{3}av}$$

$$9a^2z^2 = \tfrac{16}{3}av^3 \quad a:3$$

$$27az^2 = 16v^3$$

En æquationem ad evolutam Parabolæ *Apollonianæ*: unde intelligitur evolutam parabolæ *Apollonii* esse parabolam secundi generis, cujus parameter $\frac{27}{16}$ parametri in parabola *Apolloniana*.

III. Si MC in terminis analyticis quæratur, erit, substitutis in formula generali $(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}:-dxddy$ valoribus dy^2 & $-ddy$ paulo ante inventis, $MC=(dx^2+adx^2:4x)\sqrt{(dx^2+adx^2:4x)}\,4x\sqrt{ax}:adx^3=(4x+a)dx^3\sqrt{(4x+a)}4x\sqrt{ax}:8axd^2x^3\sqrt{x}=(4x+a)\sqrt{(4x+a)}:2\sqrt{a}$.

Quodsi fiat $x=o$, erit vi n. 1. $ME=o$ & $MC=a\sqrt{a}:2\sqrt{a}=\frac{1}{2}a$, hoc est, circuli parabolam in vertice osculantis diameter æquatur parametro & centrum ejus ob $ME=o$ est in axe parabolæ.

Porro quia $MC=(4x+a)\sqrt{(4x+a)}:2\sqrt{a}=(4ax+a^2)\sqrt{(4ax+a^2)}:2a^2$ & $\frac{1}{2}\sqrt{(4ax+a^2)}=MH$ seu normali: erit $MC=\frac{8MH^3}{2a^2}$.

Est autem $8MH^3$ cubus duplæ normalis MH, sicuti $2a^2$ duplum quadrati parametri.

Constructio. Fiat $a:2MH=2MH:\frac{4MH^2}{a}$ & $2MH:\frac{4MH^2}{a}=\frac{4MH^2}{a}:\frac{8MH^3}{a^2}$ hoc est, quæratur ad parametrum & duplam normalem 2MH quarta continue proportionalis, erit ejus dimidium radius osculi MC.

Quoniam etiam $MC=4MH^3:a^2$, erit etiam $a:MH=MH:\frac{MH^2}{a}$ & $MH:\frac{MH^2}{a}=\frac{MH^2}{a}:\frac{MH^3}{a^2}$, hoc est, quæratur ad parametrum & normalem MH quarta continue proportionalis, erit ejus quadrupla radius osculi seu evolutæ MC.

PROBLEMA 141.

323. *Determinare radium osculi seu evolutæ* MC *in infinitis parabolis aut paraboloidibus.*

Ad infinitas parabolas (§. 519 *part. 1.*)

$$y^m = a^{m-1}x$$

$$my^{m-1}dy = a^{m-1}dx$$

Quodsi ergo dx sumatur pro constante, erit

$$(m^2-m)y^{m-2}dy^2+my^{m-1}ddy=o$$

$$(m^2-m)y^{m-2}dy^2=-my^{m-1}ddy$$

$$(m-1)y^{-1}dy^2=-ddy$$

Quamobrem

$$(dx^2+dy^2):-ddy=(ydx^2+ydy^2):(m-1)dy^2$$

hoc est, ob $dx^2=m^2y^{2m-2}dy^2:a^{2m-2}$

$ME = (m^2 y^{2m-1} dy^2 + a^{2m-2} y dy^2) : (m-1) a^{2m-2} dy^2 = (m^2 y^{2m-1} + a^{2m-2} y) : (m-1) a^{2m-2} = m^2 y^{2m-1} : (m-1) a^{2m-2} + y : (m-1) = \frac{1}{m-1} y + \frac{m^2 x^2}{(m-1)y}$

Sit jam $m = 2$, erit $x = y^2 : a$ & hinc $x^2 = ax . y^2 : a^2 = xy^2 : a$, adeoque $ME = 4xy^2 : ay + y = 4xy : a + y$, ut in problemate præcedente.

PROBLEMA 142.

324. *Determinare radium oſculi in circulo.*

Quoniam ad circulum (§. 377 *part. 1*)

$$y^2 = 2rx - xx$$

erit $2y dy = 2r dx - 2x dx$

$$y dy = r dx - x dx$$

Quare ſi dx ſumatur pro conſtante, erit

$$dy^2 + y ddy = -dx^2$$

$$(dx^2 + dy^2) : y = -ddy$$

Quare (§. 320)

$$\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = y \frac{(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2} = y$$

Eſt itaque $ME = y$, hoc eſt, punctum E cadit in P, adeoque C in centrum circuli H (§. 38. 320). Radius igitur circuli idem eſt cum radio oſculi, hoc eſt, circulus, qui circulum oſculatur, huic congruit & circuli evoluta eſt centrum ejus.

PROBLEMA 143.

325. *Invenire radium oſculi in ellipſi.*

Quoniam ad ellipſin (§. 420 *part. 1*)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

erit $2ay dy = ab dx - 2bx dx$

$dy = (ab dx - 2bx dx) : 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$ ob $a^2y^2 = a^2bx - abx^2$

Unde, ſi dx ſumatur pro conſtante, $ddy = -4b dx^2 \sqrt{(a^2bx - abx^2)} : (4a^2bx - 4abx^2) - (a^3b^2 dx^2 + 4a^2b^2 x dx^2 - 4ab^2x^2 dx^2) : (4a^2bx - 4abx^2) \sqrt{(a^2bx - abx^2)} = (-4a^2b^2 x dx^2 + 4ab^2x^2 dx^2 - a^3b^2 dx^2 + 4a^2b^2 x dx^2 - 4ab^2x^2 dx^2) : (4a^2bx - 4abx^2 \sqrt{(a^2bx - abx^2)} = -a^3b^2 dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2) \sqrt{(a^2bx - abx^2)}$.

Nimirum ſi $D = 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$ & $N = ab dx - 2bx dx$; reperietur $dD = (a^2b dx - 2abx dx) : \sqrt{(a^2bx - abx^2)}$, adeoque $\frac{dD . N}{D^2} =$

$$\frac{a^3b^2 dx^2 - 4a^2b^2 x dx^2 + 4ab^2x^2 dx^2,}{(4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2bx - abx^2)}}$$

quæ eſt differentialis valoris ipſius dy pars negativa (§. 19).

Eſt vero porro $dy^2 = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2) dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2)$

Quare $dy^2 + dx^2 = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2) dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2)$ & $(dy^2 + dx^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$

a^2b

$(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{}(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)dx^3 : (4a^2bx - 4abx^2)2\sqrt{}(a^2bx - abx^2)$, consequenter $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{}(dx^2 + dy^2) : -dxddy = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{}(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2) : 2a^3b^2 =$ (brevitatis gratia) $v\sqrt{}v : 2a^3b^2$.

Eſt vero (§. 44) normalis $MH = y\sqrt{}(dx^2 + dy^2) : dx$. Quare cum ſit $y = \sqrt{}(abx - bx^2) : \sqrt{}a$ & $\sqrt{}(dx^2 + dy^2) = dx\sqrt{}v : 2\sqrt{}(abx - bx^2)\sqrt{}a$. Erit $MH = \sqrt{}(abx - bx^2)dx\sqrt{}v : 2a\sqrt{}(abx - bx^2)dx = \sqrt{}v : 2a$, conſequenter $MH^3 = v\sqrt{}v : 8a^3$, adeoque $4MH^3 = v\sqrt{}v : 2a^3$.

Eſt itaque $MC = v\sqrt{}v : 2a^3b^2 = 4MH^3 : b^2$

Conſtructio. Fiat $b : MH = MH : \frac{MH^2}{b}$ & $MH : \frac{MH^2}{b} = \frac{MH^2}{b} : \frac{MH^3}{b^2}$ hoc eſt, quæratur ad parametrum b & normalem MH quarta continue proportionalis; erit hujus quadrupla radius oſculi MC.

COROLLARIUM.

326. Si AP ſive $x = 0$: circuli in A ellipſin oſculantis AB reperitur $a^2b^2\sqrt{}a^2b^2 : 2a^3b^2 = a^3b^3 : 2a^3b^2 = \frac{1}{2}b$.

PROBLEMA 144.

327. *Invenire radium oſculi ſeu evolutæ in hyperbola.*

Quoniam ad hyperbolam (§. 459 *part. 1*) $ay^2 = abx + bx^2$, radius oſculi MC eodem prorſus, ut in probl. præced. modo invenitur $(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)\sqrt{}(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + b^2x^2) : 2a^3b^2 = 4MH^3 : bb$ &, ſi $x = 0$, hoc eſt in vertice,

$$= a^2b^2\sqrt{}a^2b^2 : 2a^3b^2$$
$$= \tfrac{1}{2}b.$$

PROBLEMA 145.

328. *Invenire radium circuli* MC *cycloidem* AMB *in* M *oſculantis.* Tab. III. Fig. 39.

Sit diameter circuli genitoris $AD = 1$, $AP = x$, $PM = y$, erit $QP = \sqrt{}(x - xx)$ (§. 377 *part. 1*), arcus $AQ = \int(dx : 2\sqrt{}[x - xx])$ (§. 157), adeoque $PM = PQ + QM = \sqrt{}(x - xx) + \int[dx : 2\sqrt{}(x - xx)]$ (§. 565 *part. 1*). Quamobrem

$$y = \sqrt{}(x - xx) + \frac{\int dx}{2\sqrt{}(x - xx)}$$

$$dy = \frac{dx - 2xdx + dx}{2\sqrt{}(x - xx)} = \frac{2dx - 2xdx}{2\sqrt{}(x - xx)}$$
$$= dx(1 - x) : \sqrt{}x\sqrt{}(1 - x) = dx\sqrt{}(1 - x) : \sqrt{}x$$

Quodſi ergo dx ſumatur pro conſtante, reperietur

$$ddy = -dx^2\sqrt{}x : 2x\sqrt{}(1 - x) - dx^2\sqrt{}(1 - x) : 2x\sqrt{}x = (-xdx^2 - dx^2 + xdx^2) : 2x\sqrt{}(x - xx) = -dx^2 : 2x\sqrt{}(x - xx).$$

Unde ob $dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{dx^2}{(1 - x)}$

$(1-x):x=(xdx^2+dx^2-xdx^2):x=dx^2:x$, eruitur $MC=(dx^2+dy^2)\surd(dx^2+dy^2):dxddy$ (§.320)

$=2xdx^3\surd(x-x^2):xdx^3\surd x=2\surd(1-x)$

$=2DQ$ (§.417. *Geom.*). Nam

$PD^2=1-2x+xx$

$PQ^2=x-xx$

$DQ^2=1-x$. Ergo $DQ=\surd(1-x)$.

Constructio. Quoniam tangens TM ipsi AQ parallela (§.132); TMQ=AQP (§. 233 *Geom.*). Est vero AQD rectus (§.317 *Geom.*): & TMC itidem rectus (§. 317): Ergo QMC=PQD (91 *Arithm.*), consequenter MC ipsi QD parallela. Constructio igitur talis est: ducatur MC ipsi QD parallela & fiat EC = EM; erit C punctum in evoluta cycloidis.

COROLLARIUM 1.

329. Si $x=0$; erit radius evolutæ $2\surd 1=2=2AD$, quia $AD=1$. Quare si DG fiat = AD; in G terminabitur evoluta ex una parte. Si $x=AD=1$; erit radius evolutæ $2\surd(1-1)=2\surd 0=0$. Quare evoluta ex altera parte in B terminatur.

COROLLARIUM 2.

330. Quodsi BL ipsi QD vel MC parallela ducatur, erit LBD=BDQ (§. 233 *Geom.*), adeoque arcus QD & BL (§. 322 *Geom.*) chordæque cognomines (§. 289 *Geom.*), consequenter BL=EC (§. 337 *Geom.*) & hinc LC ipsi BE æqualis & parallela (§. 257 *Geom.*). Est vero BE arcui QD (§. 575 *part. 1*) adeoque & alteri BL, *per demonstr.* æqualis. Quare LC æqualis arcui BL (§. 87 *Arithm.*) Est itaque evoluta cycloidis itidem cyclois æqualis & similis (§. 575 *part. 1*), hoc est, cyclois sui evolutione seipsam describit.

SCHOLION.

331. *Cum radius osculi aut evolutæ vel æqualis sit arcui evolutæ, vel eundem quantitate data excedat* (§.316); *omnes arcus evolutarum geometrice rectificantur, quarum radii per constructiones geometricas exhiberi possunt. Unde patet, cur arcus cycloidis* BC *sit chordæ* BL *duplus* (§.168): *est enim radius evolutæ* MC *ejusdem duplus* (§.328) *& evoluta cycloidis ipsa quoque cyclois est* (§.330). *Liquet etiam innumeras inveniri posse curvas, quæ saltem geometrice rectificantur; Ceterum utilis est radii osculi inventio, quia arcus circuli osculatoris substitui potest pro arcu curvæ, quam osculatur, in praxi. Ita speculum sphæricum cavum observante* Leibnitio *in Actis Erudit. A. 1686. substituitur parabolico, quia parameter parabolæ est diameter circuli eam in vertice osculantis* (§. 317) *sicque perinde ac parabolicum distantiam foci habet quartæ diametri parti æqualem.*

PROBLEMA 146.

332. ***Determinare radium osculi seu evolutæ in Logarithmica.***

Quoniam in Logarithmica (§. 54.)

$$ydx:dy=a$$

$$ydx:a=dy$$

$dxdy:a=ddy$, quia dx constans

seu

seu $ddy = y\,dx^2 : a^2$,

Est vero $dy^2 = y^2 dx^2 : a^2$, adeoque

$$dy^2 + dx^2 = y^2 dx^2 : a^2 + dx^2$$
$$= (y^2 + a^2) dx^2 : a^2$$

$$(dy^2 + dx^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx^3 (y^2 + a^2)\sqrt{(y^2 + a^2)} : a^3$$

$$\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dx\,ddy} = \frac{dx^3 (y^2 + a^2)\sqrt{(y^2 + a^2)}\,a^2}{a^3 y\,dx^3} = \frac{(y^2 + a^2)\sqrt{(y^2 + a^2)}}{-ay}$$

Tab. I. Fig. 8. Est igitur radius osculi seu evolutæ $= (y^2 + a^2)\sqrt{(y^2 + a^2)} : ay$.

Enimvero cum a sit subtangens Logisticæ PT, y semiordinata PM, erit $\sqrt{(y^2 + a^2)}$ tangens TM (§. 417 *Geom.*). Porro cum sit

$$TP : PM = PM : PH$$
$$a : y = y :$$

erit subnormalis $PH = y^2 : a$, consequenter TH composita ex subnormali $y^2 : a$ & subtangente $a = (y^2 + a^2) : a$. Habemus adeo

$$y : \frac{y^2 + a^2}{a} = \sqrt{(y^2 + a^2)} : MC$$

h.e. $PM : TH = TM : MC$

Theorema. In Logistica radius osculi seu evolutæ est quarta proportionalis ad semiordinatam, tangentem atque compositam ex subtangente ac subnormali.

Quantitas negativa est ob valorem ipsius y in præsente casu negativum.

Porro quoniam ay est spatium logisticum interminatum HPMI (§. 134) & $(a^2 + y^2)\sqrt{(a^2 + y^2)} = TM^3$; erit $HPMI : TM^2 = TM : MC$. Habemus itaque hoc

Theorema. Spatium logisticum interminatum est ad quadratum tangentis in ratione tangentis ad radium osculi seu evolutæ.

SECTIO V.

DE ARITHMETICA INFINITORUM.

CAPUT I.

DE NATURA ARITHMETICÆ INFINITORUM.

DEFINITIO 19.

333. *Arithmetica infinitorum* est methodus summandi series numerorum infinitis terminis constantes, aut earum rationes investigandi.

PROBLEMA 147.

334. *Invenire summam fractionum*

num infinitarum, quarum numerator communis est unitas, denominatores vero progrediuntur in ratione numeratoris primæ ad suum denominatorem.

Sit fractio prima $1:e$. Numerus terminorum cum sit infinitus & termini continuo decrescant, devenietur tandem ad infinitesimam (§. 2), adeoque summa fractionis primæ & hujus, quæ tanquam ultima consideratur, ipsi fractioni primæ $1:e$ æqualis (§.4). Divisa ergo per $e-1$ dat summam omnium terminorum $1:(ee-e)$ excepto primo (§. 119 *part. 1*). Quare summa integræ seriei $1:(ee-e)+1:e=(1+e-1):(ee-e)=e:(ee-e)=1:(e-1)$.

Sit e. gr. $e=2$; erit $\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ &c. in infinit $=1$.

Sit $e=3$; erit $\int(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ &c. in infinit.) $=\frac{1}{2}$.

Sit $e=4$; erit $\int(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c. in infinit.) $=\frac{1}{3}$.

Sit $e=5$; erit $\int(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}$ &c. in infinit.) $=\frac{1}{4}$.

Sit $e=6$; erit $\int(\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}$ &c. in infinit.) $=\frac{1}{5}$.

PROBLEMA 148.

335. *Invenire summam infinitarum fractionum, ubi numerator communis est unitate minor denominatore primæ & denominatores progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Sit denominator fractionis primæ $=m$; erit numerator $=m-1$. Summa primi & ultimi termini utpote primo æqualis $=(m-1):m$, quæ per $m-1$ divisa dat summam omnium terminorum excepto maximo seu primo $1:m$. Quare summa integræ seriei $=m:m=1$

Sit e. gr. $m=2$, erit $\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ &c. in infinit.) $=1$, ut ante (§.334)

Sit $m=3$, erit $\int(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ &c in infinit.) $=1$.

Sit $m=4$, erit $\int(\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}$ &c. in infinit.) $=1$.

SCHOLION.

336. *Poterat idem per modum corollarii ex theoremate præcedente deduci. Est enim* $\int(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$ &c.) $=\frac{1}{2}$ (§. 334). *Ergo duplum hujus seriei, hoc est,* $\int(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ &c. $=\frac{2}{2}=1$. *Et in genere* $\int(\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}$ &c. *in infinit.*) $=1:(m-1)$. *Ergo multiplum hujus seriei, cujus denominator* $m-1$, *fit necesse est* $(m-1):(m-1)=1$.

PROBLEMA 149.

337. *Invenire summam infinitarum fractionum, ubi numerator communis deficit a denominatore primæ data quantitate, denominatores vero progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primi.*

Sit

Si terminus primus $=(m-n):m$, qui utpote æqualis summæ primi & ultimi divisus per $(m-1)$ dat summam omnium terminorum maximo excepto $(m-n):(m^2-m)$. Quare summa serici integræ $=(m-n):(m^2-m)+(m-n):m=(m-n+m^2-mn-m+n):(m^2-m)=(m^2-mn):[m^2-m]=(m-n):(m-1)$.

Sit e. gr. $n=1$, erit $(m-n):(m-1)=(m-1):(m-1)=1$.

Sit $n=2$, $m=4$, erit $\int(\frac{2}{4}+\frac{2}{16}+\frac{2}{64}$ &c.) $=(4-2):(4-1)=\frac{2}{3}$.

Sit $n=2$, $m=5$; erit $\int(\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}$ &c.) $=(5-2):(5-1)=\frac{3}{4}$.

Sit $n=2$, $m=6$; erit $\int(\frac{4}{6}+\frac{4}{36}+\frac{4}{216}$ &c.) $=(6-2):(6-1)=\frac{4}{5}$.

Sit $n=2$, $m=7$; erit $\int(\frac{5}{7}+\frac{5}{49}+\frac{5}{343}$ &c.) $=(7-2):(7-1)=\frac{5}{6}$.

Similiter

Sit $n=3$, $m=6$; erit $\int(\frac{3}{6}+\frac{3}{36}+\frac{3}{216}$ &c.) $=(6-3):(6-1)=\frac{3}{5}$.

Sit $n=3$, $m=7$; erit $\int(\frac{4}{7}+\frac{4}{49}+\frac{4}{343}$ &c.) $=(7-3):(7-1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Sit $n=3$, $m=8$; erit $\int(\frac{5}{8}+\frac{5}{64}+\frac{5}{512}$ &c.) $=(8-3):(8-1)=\frac{5}{7}$.

Porro

Sit $n=4$, $m=8$; erit $\int(\frac{4}{8}+\frac{4}{64}+\frac{4}{512}$ &c.) $=(8-4):(8-1)=\frac{4}{7}$.

Sit $n=4$, $m=9$; erit $\int(\frac{5}{9}+\frac{5}{81}+\frac{5}{729}$ &c.) $=(9-4):(9-1)=\frac{5}{8}$.

Sit $n=4$, $m=10$, erit $\int(\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}$ &c.) $=(10-4):(10-1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

&c. &c.

PROBLEMA 150.

338. *Invenire summam fractionum infinitarum, quarum communis est numerator, denominatores vero in ratione quacunque progrediuntur.*

Sit numerator communis $=m$, denominator fractionis primæ $=a$, denominator rationis $=n$; erit series summanda $\frac{m}{a}+\frac{m}{na}+\frac{m}{n^2a}+\frac{m}{n^3a}$ &c. in infinit. Unde eodem, quo in problematibus præcedentibus modo reperitur summa $m:(na-a)+m:a=(m+mn-m):(na-a)=mn:(na-a)=mn:a(n-1)$.

Sit e. gr. $m=5$, $a=6$, $n=2$; erit $\int(\frac{5}{6}+\frac{5}{12}+\frac{5}{24}$ &c.) $=10:6(2-1)=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$.

Sit $m=3$, $a=5$, $n=4$; erit $\int(\frac{3}{5}+\frac{3}{20}+\frac{3}{80}+\frac{3}{320}$ &c.) $=12:5(4-1)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$.

Sit $m=1$, $a=7$, $n=2$; erit $\int(\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}$ &c.) $=2:7(2-1)=\frac{2}{7}$.

SCHOLION.

339. *Hoc problema universalitate sua antecedentia omnia complectitur. Sit enim $n=a$ & $m=n-l$, qui est casus problematis præcedentis: substitutis hisce valoribus in formula præsente, prodit $(n^2-ln):(n-1)n=(n-l):(n-1)$, quæ est formula problematis præcedentis. Similiter sit $n=a$, $m=n-1$, erit summa $=(n^2-n):(n^2-n)=1$, ut supra*

 (§. 335)

(§. 335). *Denique si* $m=1$, $n=a$; *erit summa* $=n:(n-1)n=1:(n-1)$, *ut supra* (§. 334)

PROBLEMA 151.

340. *Invenire rationem summæ progressionis arithmeticæ simplicis ab* 1 *in infinitum continuatæ* $(1+2+3+4+5+6$ &c.) *ad summam totidem maximo æqualium.*

Terminus primus $=1$, numerus terminornm $=n$, differentia $=1$. Ergo ultimus $=n$ & hinc $\int(1+2+3+4+5$ &c.$)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ (§. 106 *part.* 1) & $\int n=n^2$. Cum n sit infinitus numerus, atque (§. 66. *Arithm.*) $1:n=n:n^2$; erit n^2 ipso n infinities majus, adeoque n respectu n^2 pro nihilo habendum (§. 3), consequenter $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n^2$. Est itaque $\int(1+2+3+4+5$ &c. in infinit.$):\int n=\frac{1}{2}n^2:n^2=1:2$ (§. 124 *part.* 1).

Theorema. Summa seriei numerorum naturalium in infinitum continuatæ est ad summam totidem maximo æqualium ut 1 ad 2.

PROBLEMA 152.

341. *Invenire rationem summæ progressionis arithmeticæ sive finitæ, sive infinitæ, cujus terminus primus est* 0, *ad summam totidem maximo æqualium.*

Terminus primus $=0$, ultimus $=v$, numerus terminorum $=n$; erit summa progressionis $=\frac{1}{2}nv$ (§. 106. *part.* 1), summa vero totidem maximo æqualium nv. Est ergo illa ad hanc ut $\frac{1}{2}nv$ ad nv, hoc est, ut 1 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA 153.

342. *Invenire rationem, quam habet summa omnium quadratorum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit summa quadratorum $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ (§. 205 *part* 1.). Est vero $1:n=n^2:n^3$ (§. 66 *Arithm.*) ergo quia 1 infinitesima ipsius n; *per hypoth.* erit etiam n^2 infinitesima ipsius n^3, consequenter $\frac{1}{2}n^2$, adeoque multo magis $\frac{1}{6}n$, respectu ipsius $\frac{1}{3}n^3$ pro nihilo habendum (§. 3). Est ergo summa infinitorum quadratorum $\frac{1}{3}n^3$. Quadratorum vero totidem maximo æqualium summa est n^3. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{3}n^3$ *ad* n^3, hoc est, ut 1 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA 154.

343. *Invenire rationem, quam habet summa omnium cuborum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit summa cuborum $\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$ (§. 205 *part.* 1). Sed eodem modo, quo in problemate præcedente, osten-

ostenditur, $\frac{1}{2}n^3$, adeoque multo magis $\frac{1}{4}n^2$, respectu ipsius $\frac{1}{4}n^4$ tandem evanescere. Erit ergo summa infinitorum cuborum $\frac{1}{4}n^4$. Sed summa totidem cuborum maximo æqualium est n. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{4}n^4$ ad n^4, hoc est, ut 1 ad 4 (*§.* 124 *part. 1*).

PROBLEMA 155.

344. *Invenire rationem, quam habet summa omnium potentiarum cujuscunque gradus ab* 0 *in infinitum continuatarum ad summam totidem maximæ æqualium.*

Quoniam omnes potentiæ inferiores numeri infiniti respectu superioris evanescunt (id quod eodem modo, quo in probl. 153 ostenditur), summa omnium potentiarum ab *o* in infinitum continuatarum est $\frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1}$ (§. 203 *part. 1*) $= \frac{1}{m+1}n^{m+1}$ in casu infiniti, ob $1=0$ respectu n. Sed potentia maxima est n^m adeoque summa totidem maximæ æqualium n^{m+1}. Ergo summa illa ad hanc ut $\frac{1}{m+1}n^{m+1}$ ad n^{m+1}, consequenter ut 1 ad $m+1$ (*§.* 124 *part. 1*).

E. gr. Sit $m=2$; erit summa quadradratorum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 3.

Sit $m=3$; erit summa cuborum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 4.

Sit $m=7$; erit summa potentiarum septimi gradus ad totidem maximæ æqualium ut 1 ad 8.

SCHOLION 1.

345. *In infinitum continuari revera non aliud significat, quam eo usque continuari, donec quantitates quædam respectu aliarum evanescant* (l). *Nam* e. gr. (§. 342) *in summa quadratorum* $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ *ratio termini primi* $\frac{1}{3}n^3$ *ad reliquos* $\frac{1}{2}n^2$ & $\frac{1}{6}n$ *continuo crescit. Unde non mirum, si ratio posteriorum tandem adeo exigua evadat, ut assignari amplius nequeat. Est enim primus ad secundum* $=\frac{1}{3}n^3:\frac{1}{2}n^2=2n:3$ (*§.* 124. *part. 1*). *Quare crescente n ratio ipsius* $2n$ *ad* 3 *continuo crescit* (*§.* 203 *Arithm.*). *Similiter terminus primus est ad tertium ut* $\frac{1}{3}n^3$ *ad* $\frac{1}{6}n$, *hoc est, ut* $2n^2$ *ad* 1 (§. 124 *part.* 1). *Quare crescente n ratio ipsius* $2n^2$ *ad* 1 *multo magis crescit, quam in casu priore* (*§.* 203 *Arithm.*). *In eo igitur casu, in quo terminus secundus respectu primi fit inassignabilis, tertius multo magis inassignabilis esse debet.*

SCHOLION 2.

346. *Eodem modo plurima alia Arithmeticæ infinitorum theoremata inveniri possunt*

(l) Vid. Ontologia nostra §. 823. & seqq.

possunt, si utamur iis, quæ in Analysi finitorum (§. 173. & seqq.) *de numeris figuratis demonstrata sunt.*

SCHOLION 3.

347. *Usum Anithmeticæ infinitorum in Geometria ostenderunt* (m) Wallisius *inventor, & qui eam magis excoluit,* Ismael Bulialdus (n). *Enimvero cum per calculum* Leibnitii *summatorium non modo ea, quæ per Arithmeticam infinitorum eruuntur, longe facilius; sed & plurima huic insuperabilia inveniri possint; e re nostra non esse judico, ut de ejus usu multa proferamus. Suffecerit igitur pauca eam in rem attulisse.*

CAPUT II.

DE USU ARITHMETICÆ INFINITORUM IN GEOMETRIA.

PROBLEMA 156.

Tab. III. Fig. 40. 348. *Invenire rationem trianguli* ACB *ad parallelogrammum* AEFB *super eadem vel æquali basi* AB *& ejusdem altitudinis.*

Concipiatur altitudo CD in partes infinite parvas & inter se æquales divisa; triangulum ACD resolvetur in parallelogrammula, quorum bases sunt ordinatæ trianguli M*m*, N*n*, O*o* &c. altitudines infinitesimæ ipsius CD; parallelogrammum vero EABF in totidem parallelogrammula & inter se & maximo in triangulo æqualia, quorum nempe bases basi trianguli AB sigillatim æquales sunt. Parallelogrammula itaque seu elementa trianguli progrediuntur in ratione ordinatarum M*m*, N*n*, O*o* &c. (§. 380 *Geom.*). Ordinatæ vero sunt ut abscissæ CP, CQ, QR (§. 396 *Geom.*) &, quoniam altitudo in partes æquales divisa, abscissæ crescunt in progressione arithmetica 0. 1. 2. 3. 4. 5 &c. Ergo elementa trianguli constituunt progressionem arithmeticam a cyphra inchoatam & in infinitum continuatam. Est adeo triangulum ACB ad parallelogrammum EABF ut 1 ad 2 (§. 341).

PROBLEMA 157.

349. *Invenire rationem spatii parabolici externi* AKLPA *ad rectangulum* AKLN *super eadem basi* Tab. II. Fig. 28.

(m) In Arithmetica infinitorum, quæ extat in Vol. I. Oper. Mathem.

(n) in Opere Novo ad Arithmeticam infinitorum.

basi KL *& ejusdem altitudinis* AK.

Si ſpatium parabolicum APLKA & rectangulum KN in parallelogrammula reſolvantur, ut in probl. præc. (§. 348), altitudine communi AK in partes infinite parvas æquales diviſa; elementa parabolici progrediuntur ut ſemiordinatæ HI, QP, KL &c. iisdem vero in rectangulo totidem reſpondent maximo, cujus baſis KL, æqualia. Quodſi parameter parabolæ fuerit a, AH = 1, AQ = 2, AK = 3 &c. erit HI = 1 : a, QP = 4 : a, KL = 9 : a &c. (§. 391 *part. 1.*), hoc eſt baſes elementorum, adeoque elementa ipſa (§. 389 *Geom.*), progrediuntur in ratione duplicata abſciſſarum, hoc eſt, ut 0, 1, 4, 9 &c. Eſt ergo ſpatium parabolicum AKLPA ad rectangulum ANLK ut 1 ad 3 (§. 342), adeoque ANLPA ad idem rectangulum ANLK ut 2 ad 3.

PROBLEMA 158.

Tab. II. Fig. 28. 350. *Invenire rationem ſpatii paraboloidici cujuscunque* AKLPA *ad rectangulum* AKLN.

Si abſciſſæ AH, AQ, AK fuerint ut 1, 2, 3 &c. in paraboloidibus quibuscunque erunt ſemiordinatæ HI, QP, KL ut 0, 1, 2^m, 3^m &c. (§. 519 *part. 1*). Quare cum etiam ſpatii paraboloidici AKLPA elementa progrediantur ut 1, 2^m, 3^m &c. (§. 349), iisdem vero in rectangulo reſpondeant totidem maximo æqualia, erit illud ad hoc ut 1 ad $1+m$ (§. 344), conſequenter ANLPA ad idem rectangulum NK ut $1 - \frac{1}{1+m}$ ad 1, hoc eſt, ut $\frac{m}{1+m}$ ad 1, ſeu ut m ad $1+m$ (§. 124 *part. 1*).

PROBLEMA 159.

351. *Invenire rationem pyramidis & coni ad priſma & cylindrum ſuper eadem baſi & ejusdem altitudinis.* Tab. III. Fig. 41.

Si pyramidis ADBC altitudo concipiatur in partes infinite parvas æquales diviſa; in priſmata reſolvitur, quæ inter ſe ſunt ut baſes (§. 573 *Geom.*), hoc eſt, ut plana ſimilia a, b, c, d (§. 474 *Geom.*), Quoniam vero altitudines illorum priſmatum ſunt ut 1, 2, 3 &c. planorum latera homologa erunt itidem ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 566 *Geom.*) adeoque ipſa plana

ut

ut o, 1, 4, 9 &c. (§. 406 *Geom.*) Quare cum elementis pyramidis respondeant in prismate super eadem basi & ejusdem altitudinis totidem maximo æqualia; pyramis ad prisma est ut 1 ad 3 (§. 342).

Quodsi ACBD fuerit conus, plana *a*, *b*, *c*, *d* erunt circuli: qui cum progrediantur ut o, 1, 4, 9 &c. (§. 387 *Geom.*), in cylindro vero ipsis respondeant totidem maximo *d* æquales; conus quoque ad cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis est ut 1 ad 3 (§. 342).

PROBLEMA 160.

Tab. III. Fig. 42. 352. *Invenire rationem conoidis parabolici ex rotatione parabolæ* AMSR *circa axem* AR *geniti ad cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis.*

Constat ex superioribus (§. 197), altitudine AR in particulas infinite parvas & æquales divisa conoides resolvi in cylindrulos, quorum bases sunt circuli radiis PM, QN, SR descripti, quique adeo sunt ut isti circuli (§. 573 *Geom.*). Quodsi AP=1, AQ=2, AR=3; erit PM=1, QN=$\sqrt{2}$, SR=$\sqrt{3}$ (§. 392 *part.* 1) adeoque circuli sunt ut o, 1, 2, 3 &c. (§. 408. *Geom.*). Quare cum iisdem respondeant in cylindro totidem maximo æquales, omnia elementa conoidis ad omnia elementa cylindri sunt ut 1 ad 2 (§. 341).

FINIS Analyseos infinitorum.

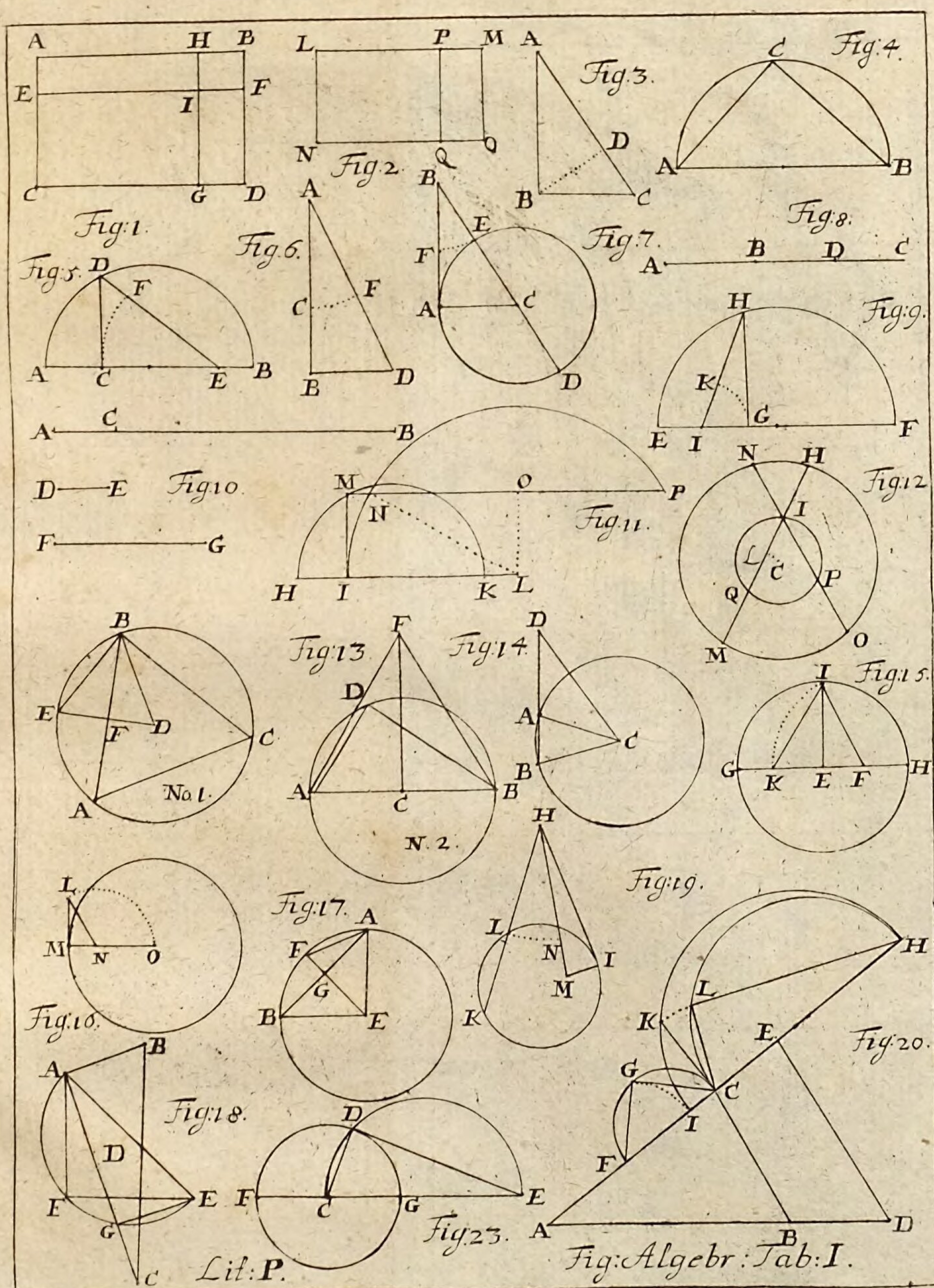
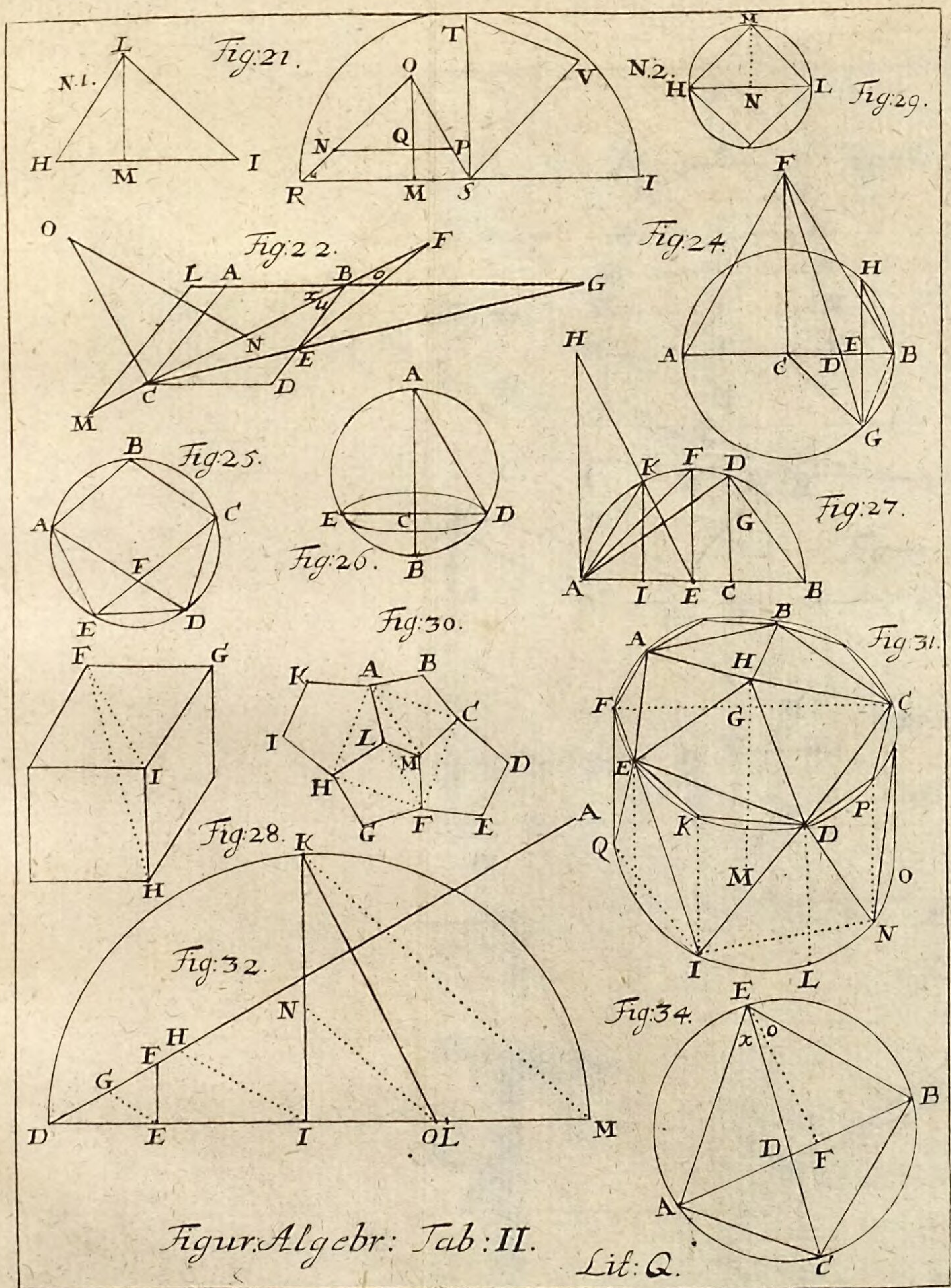


Fig: Algebr: Tab: I.



Figur:Algebr: Tab:II.

Lit: Q.

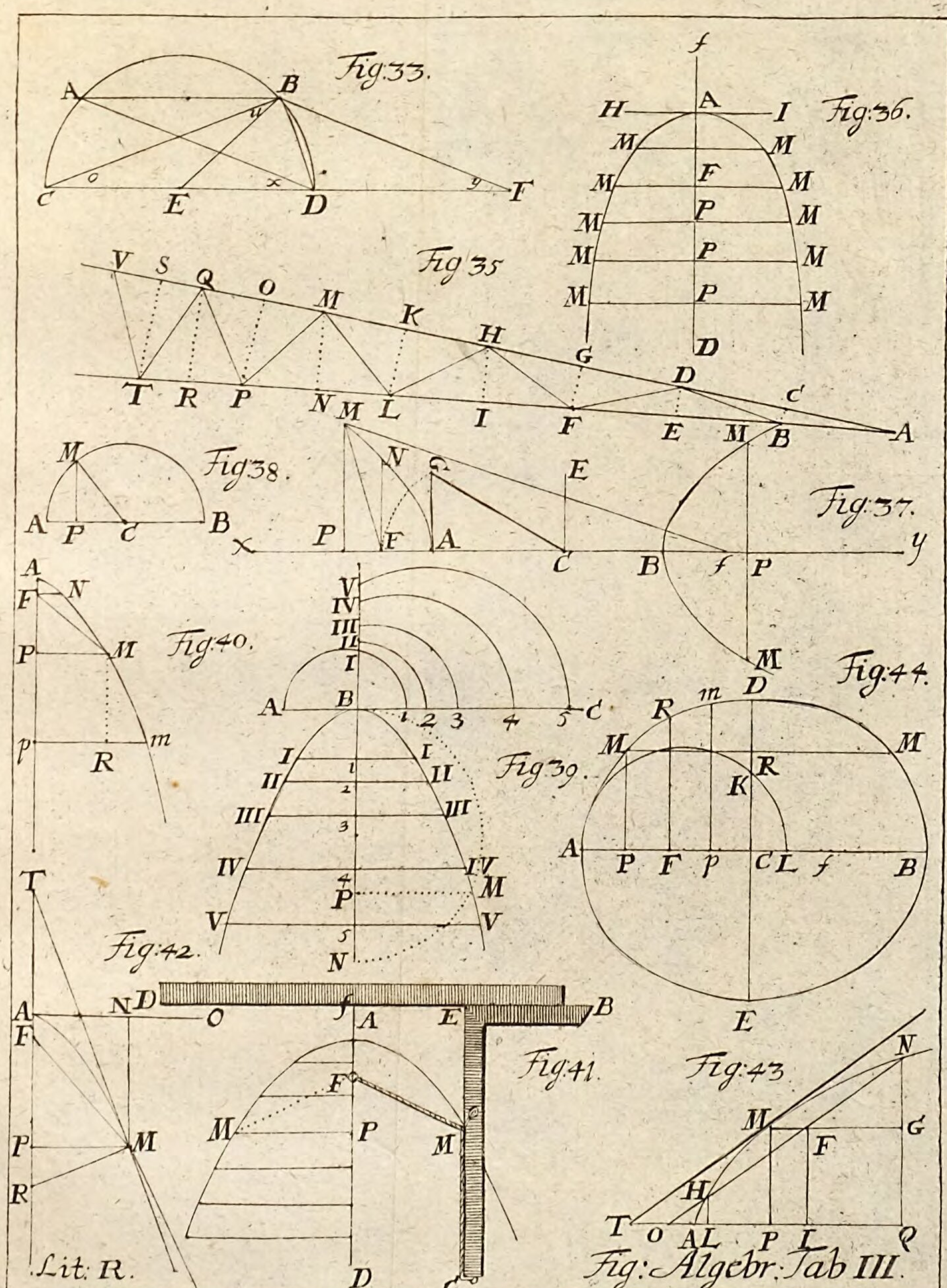


Fig: Algebr: Tab III.

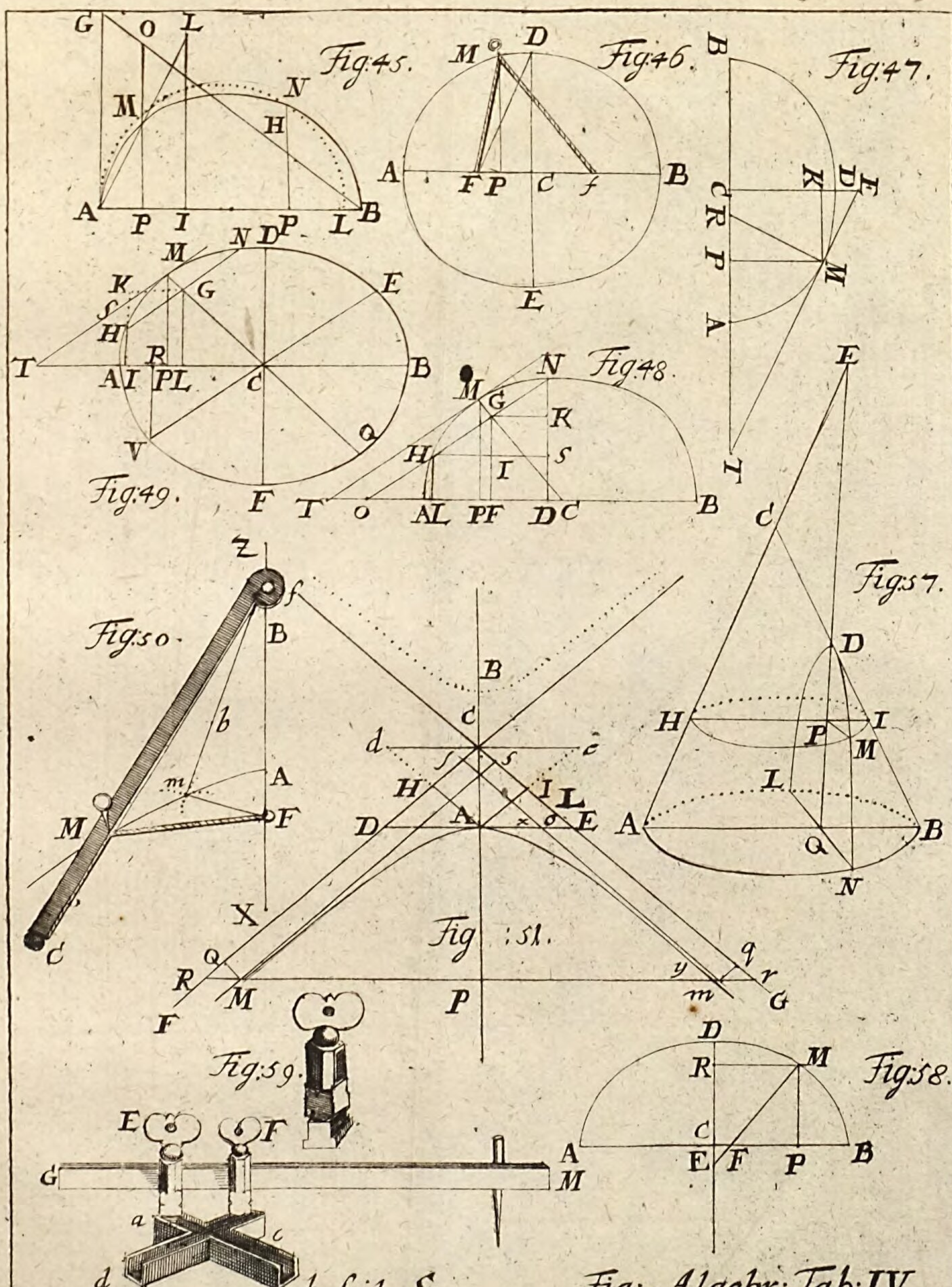
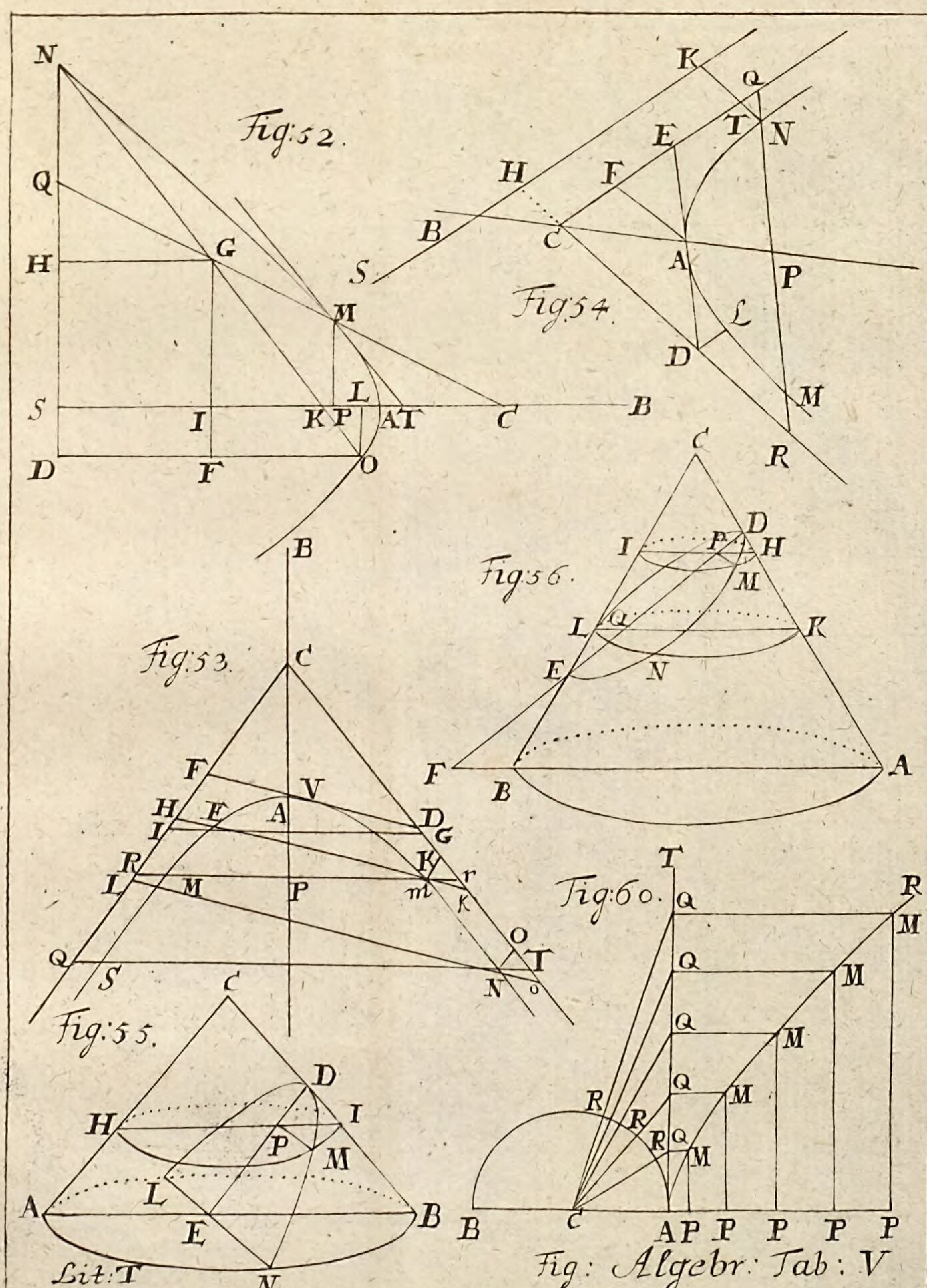


Fig: Algebr: Tab: IV.


Fig:52.
Fig:54.
Fig:53.
Fig:56.
Fig:55.
Fig:60.
Lit:T
Fig: Algebr: Tab: V

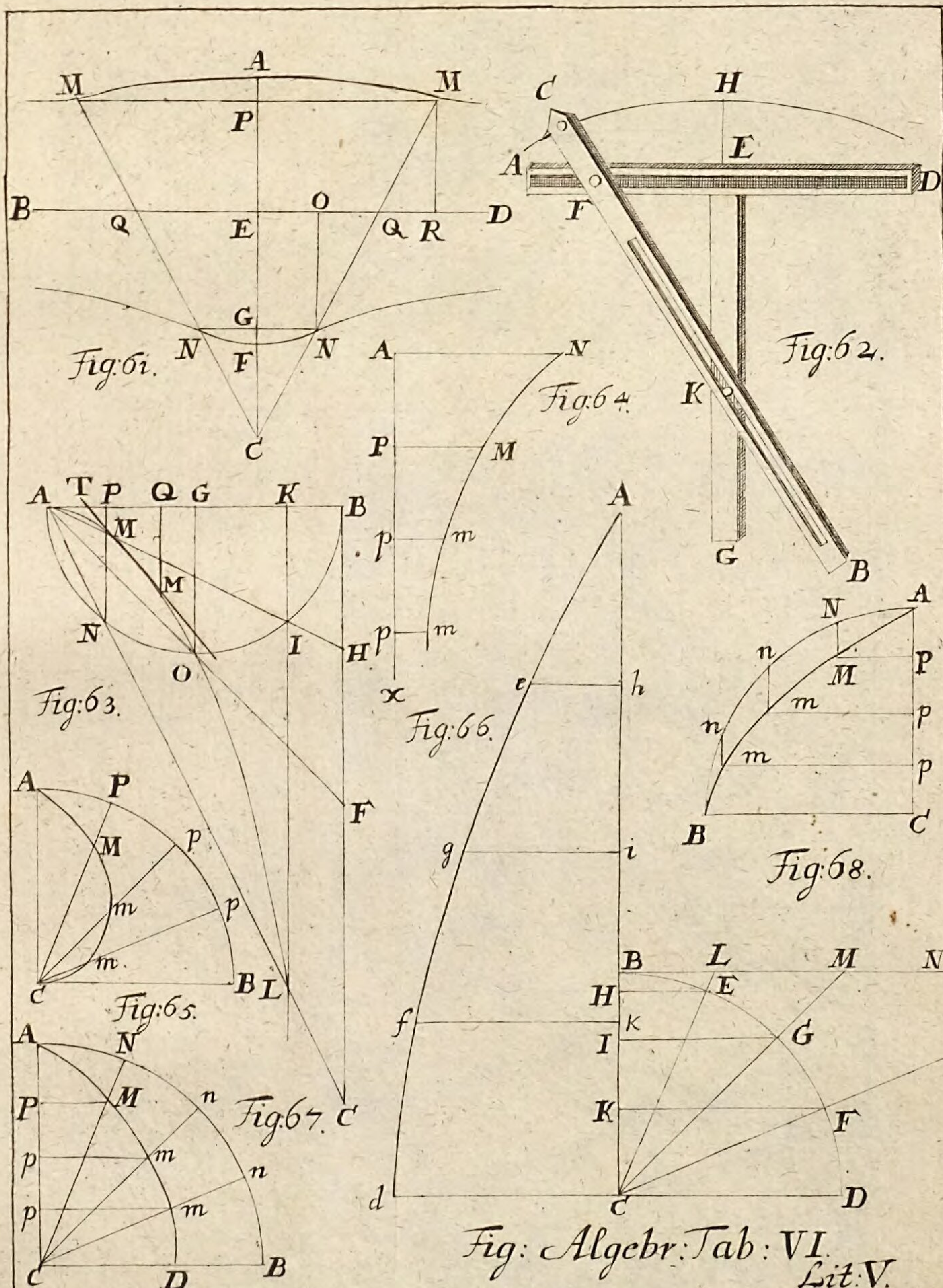


Fig: Algebr: Tab: VI.
Lit: V.

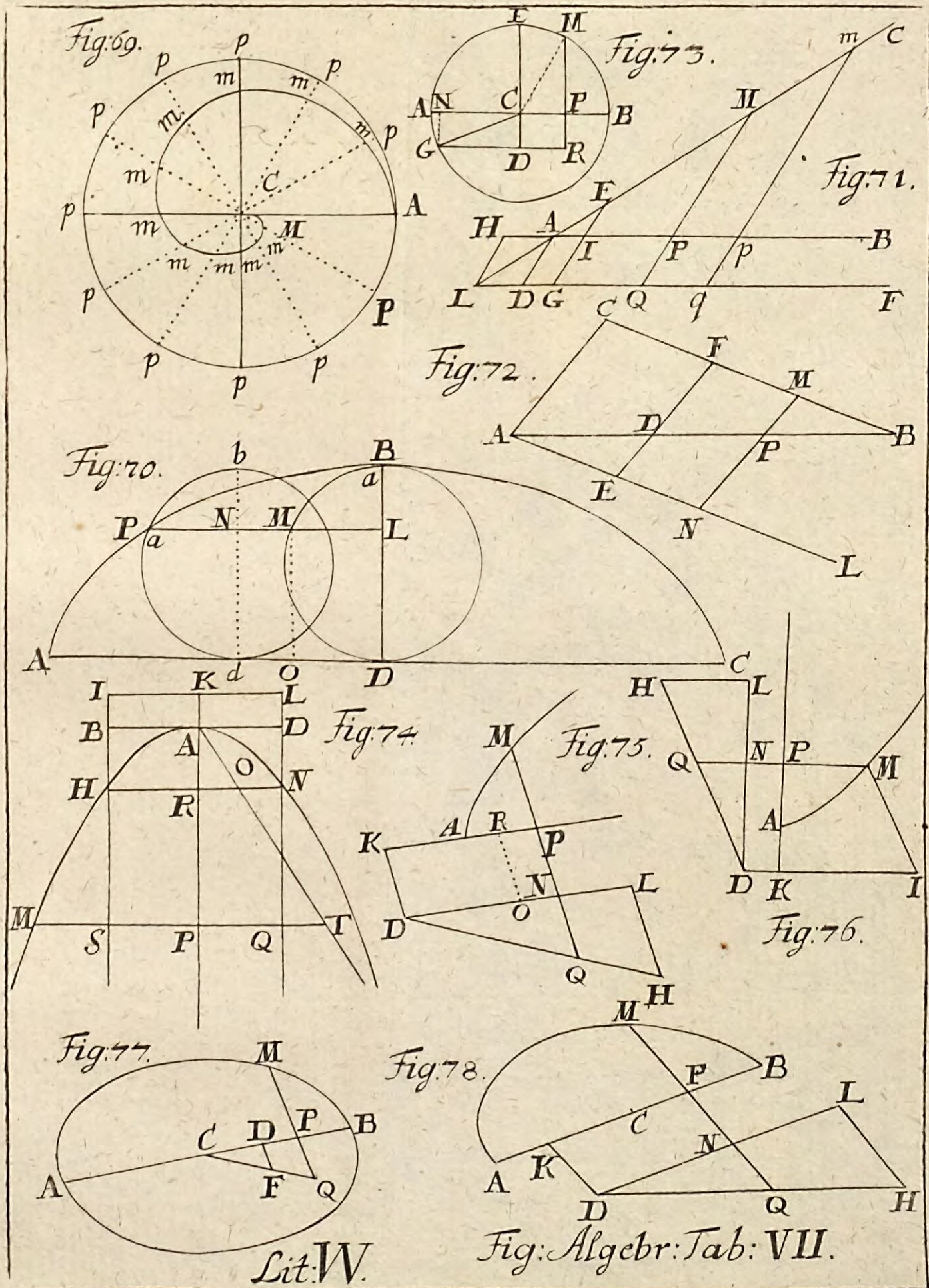


Fig: Algebr: Tab: VII.

Lit: W.

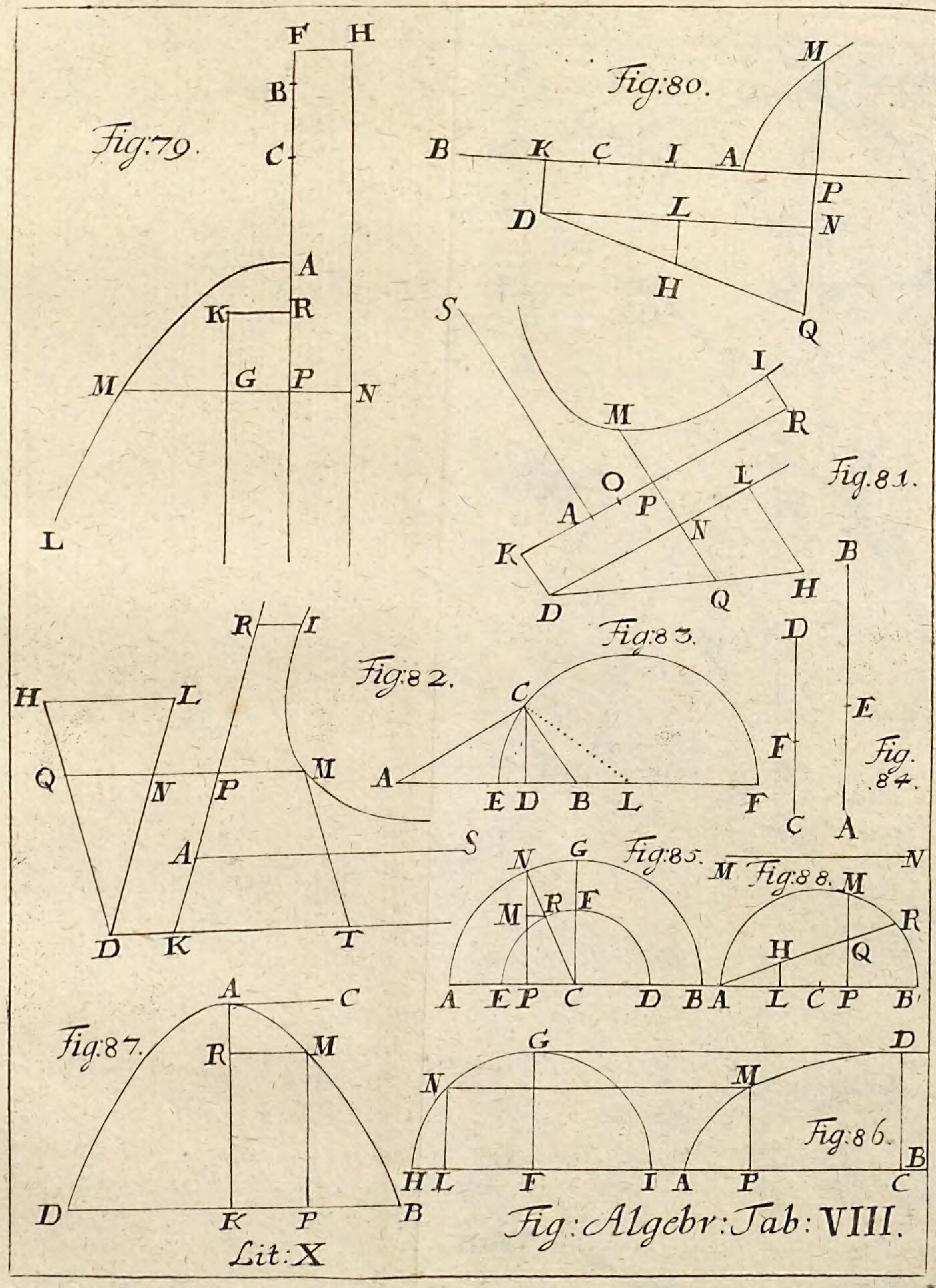


Fig: Algebr: Tab: VIII.

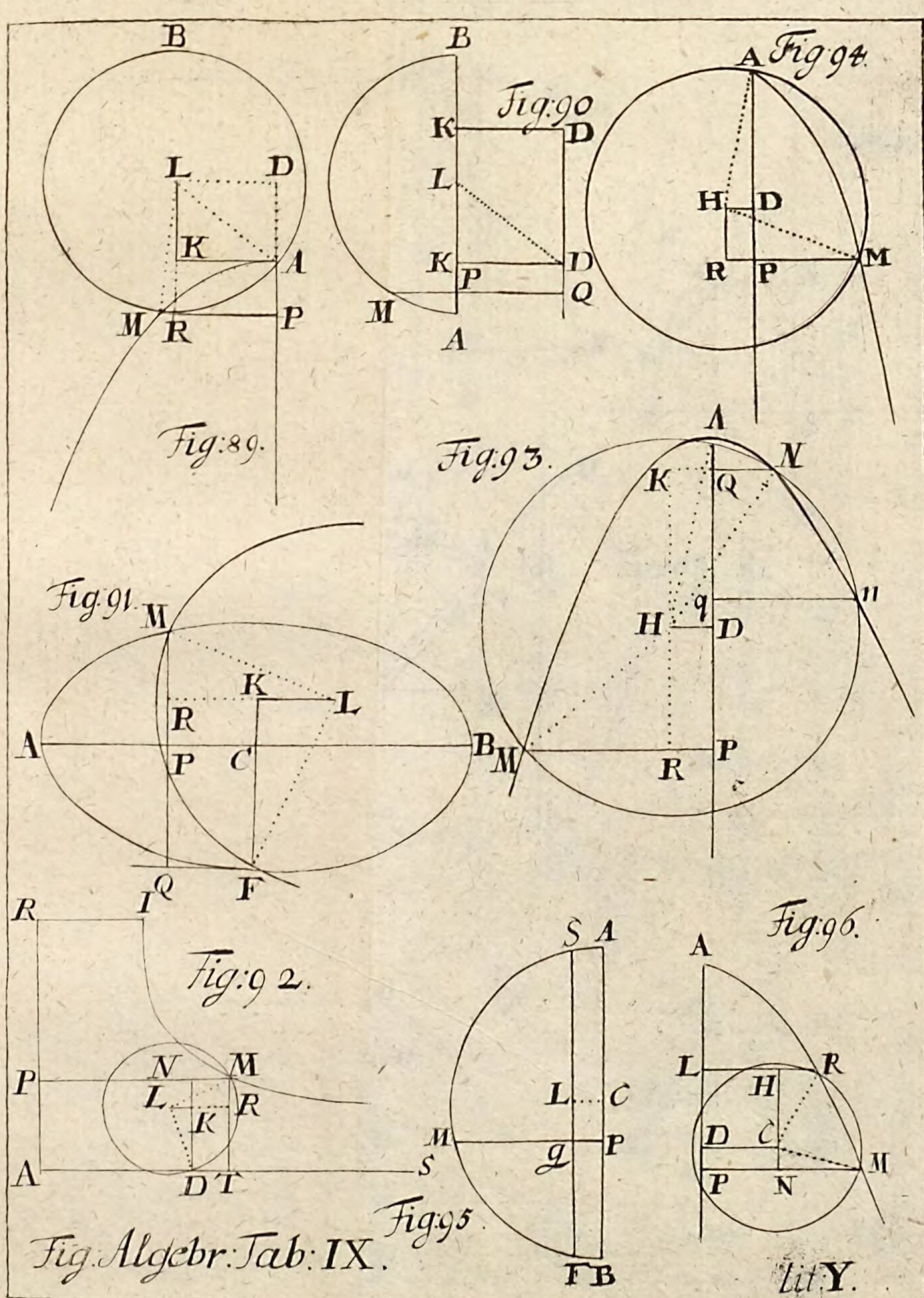
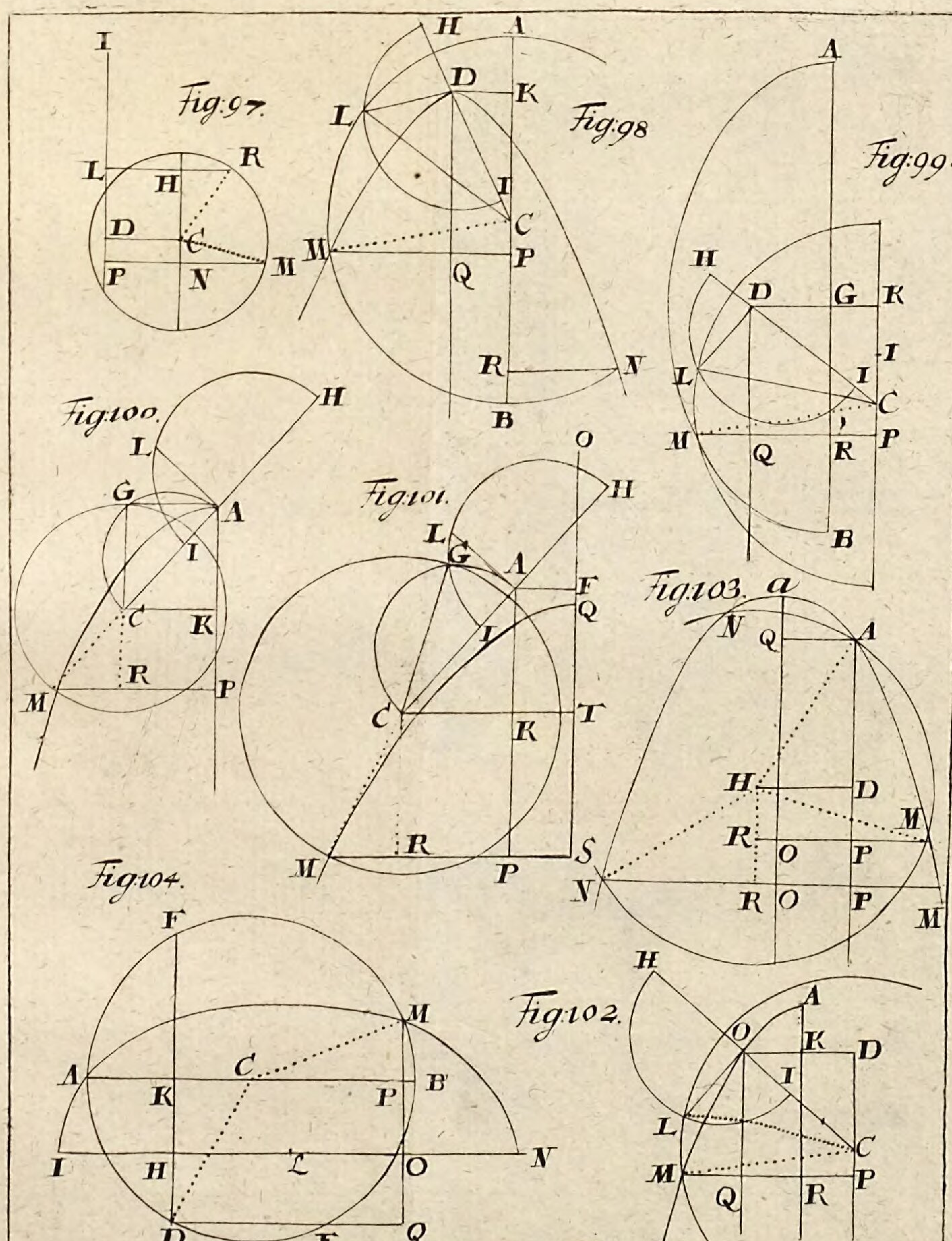


Fig. Algebr: Tab: IX.



Lit: Z.

Fig: Algebr: Tab: X.

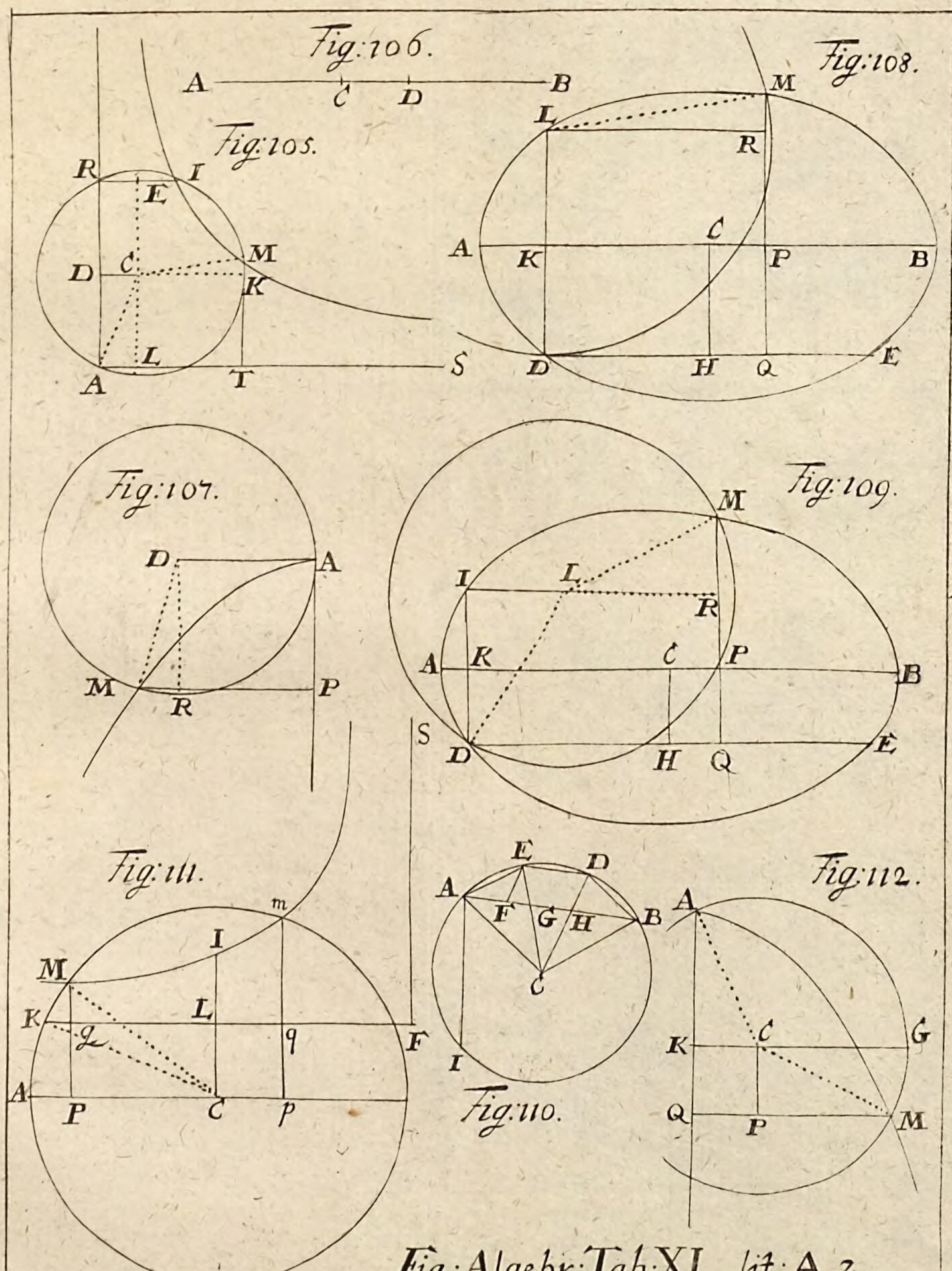
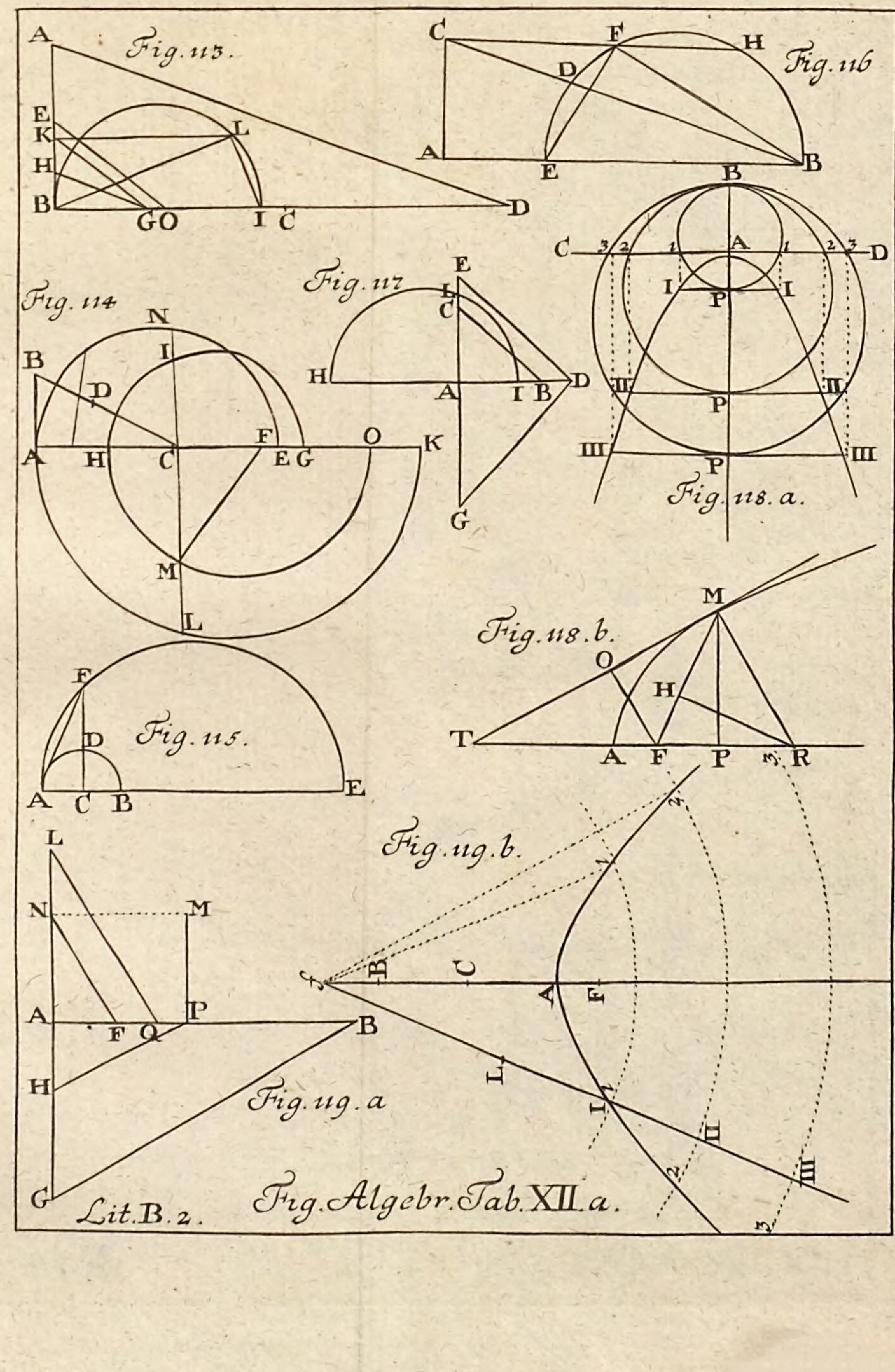


Fig: Algebr: Tab: XI. lit: A 2.


Fig. 113.
Fig. 116
Fig. 114
Fig. 117
Fig. 118. a.
Fig. 118. b.
Fig. 115.
Fig. 119. b.
Fig. 119. a
Lit. B. 2.
Fig. Algebr. Tab. XII. a.

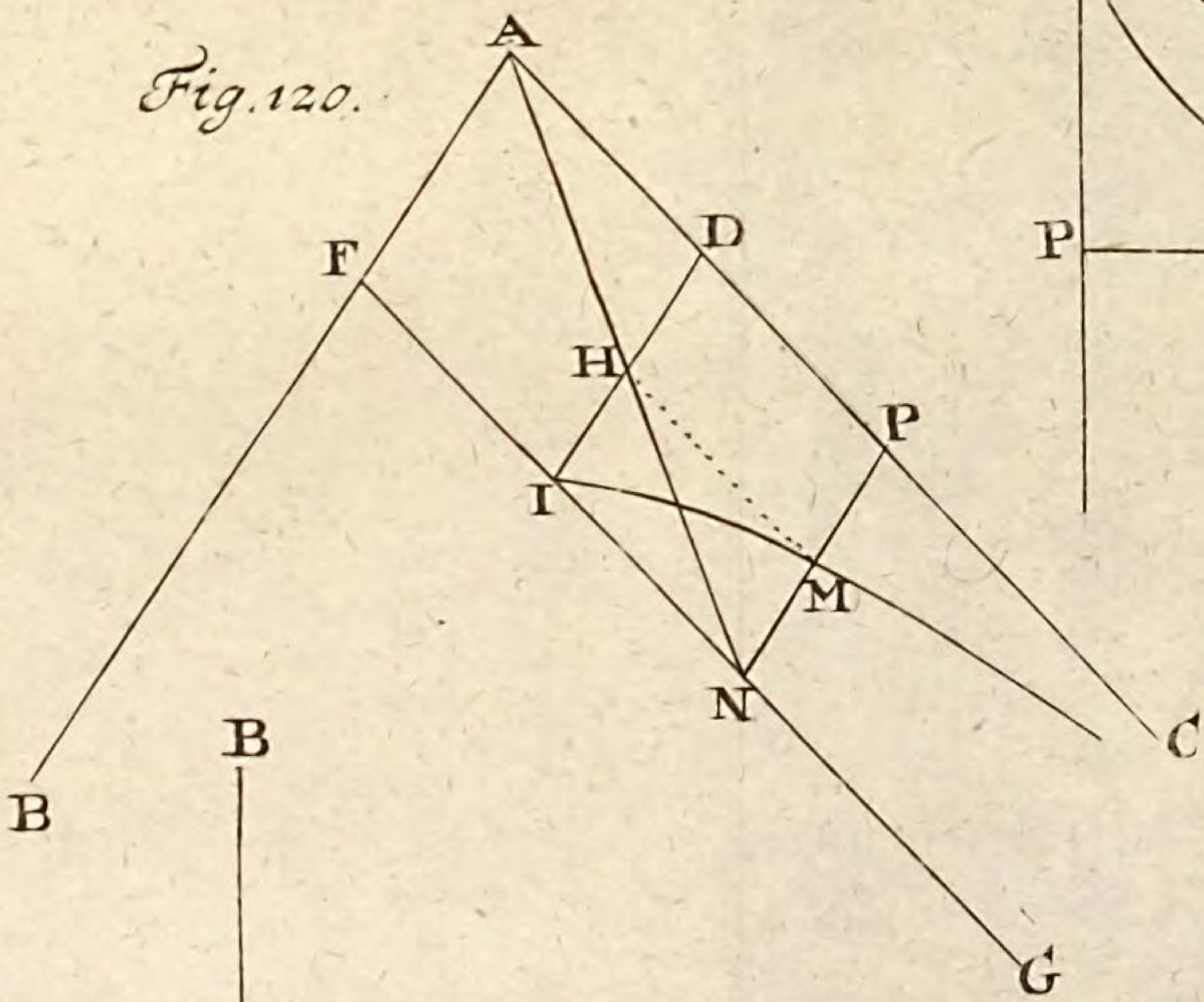


Fig. 120.

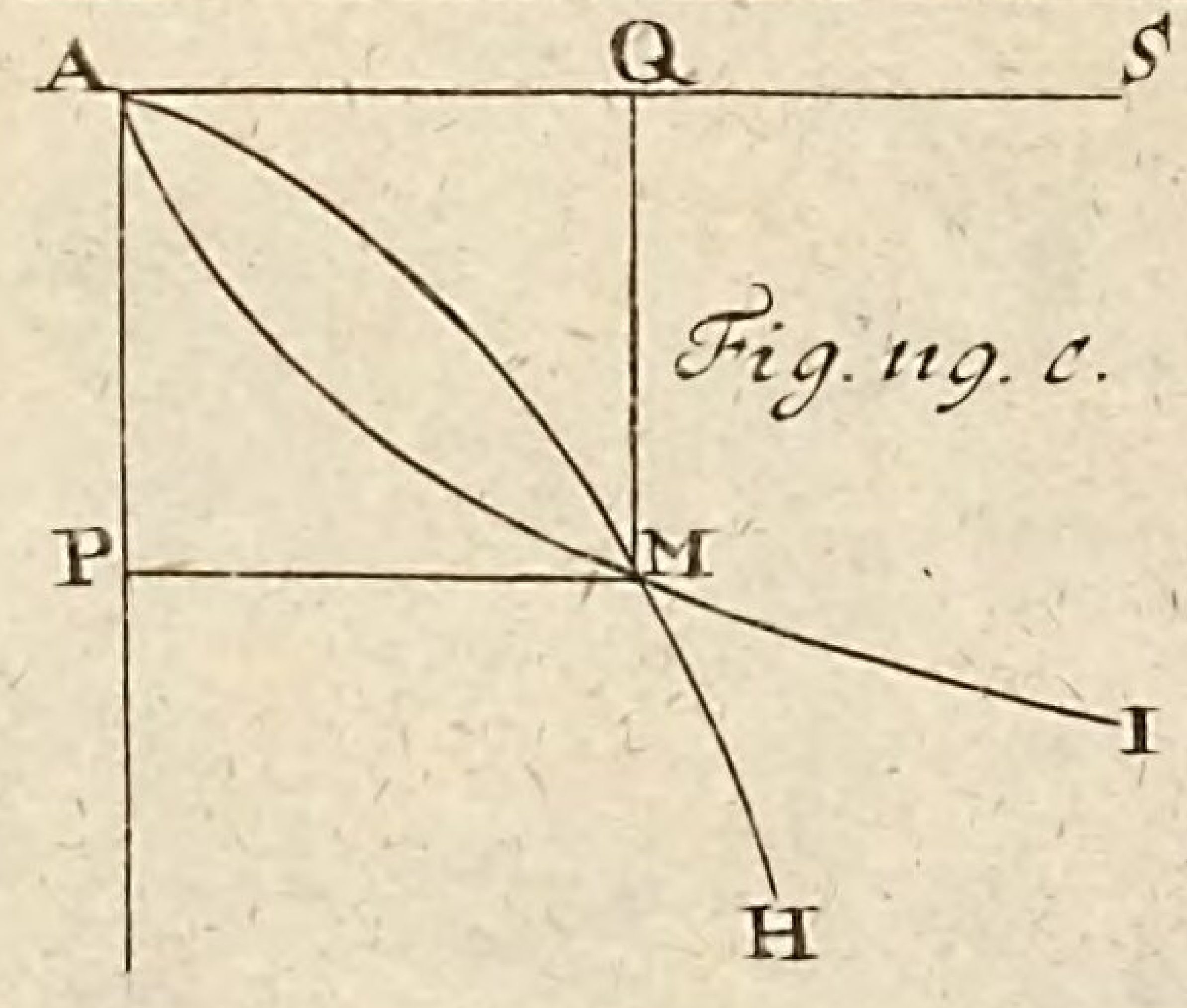


Fig. 119. c.

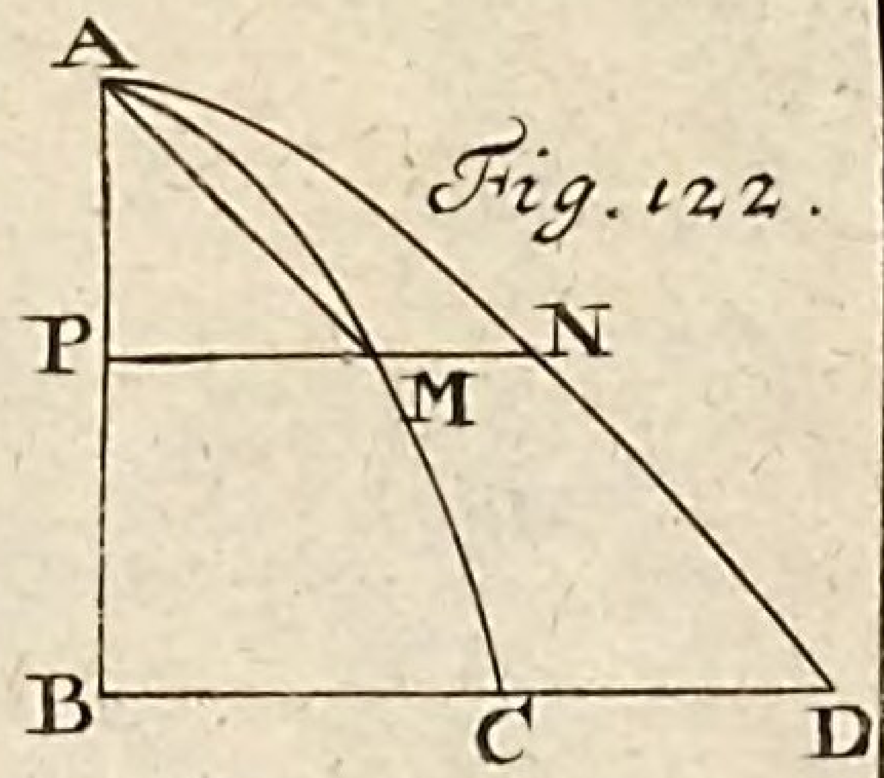


Fig. 122.

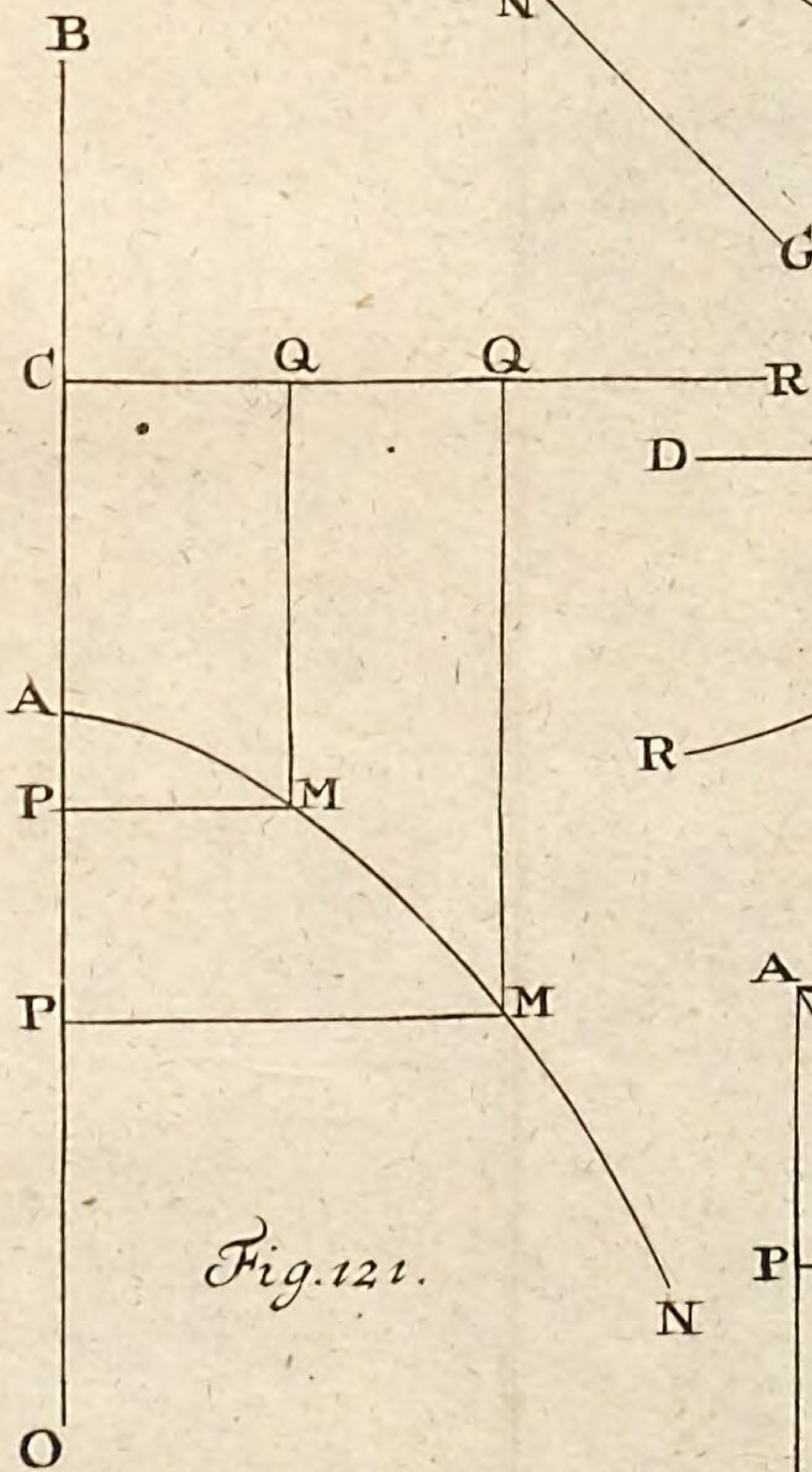


Fig. 121.

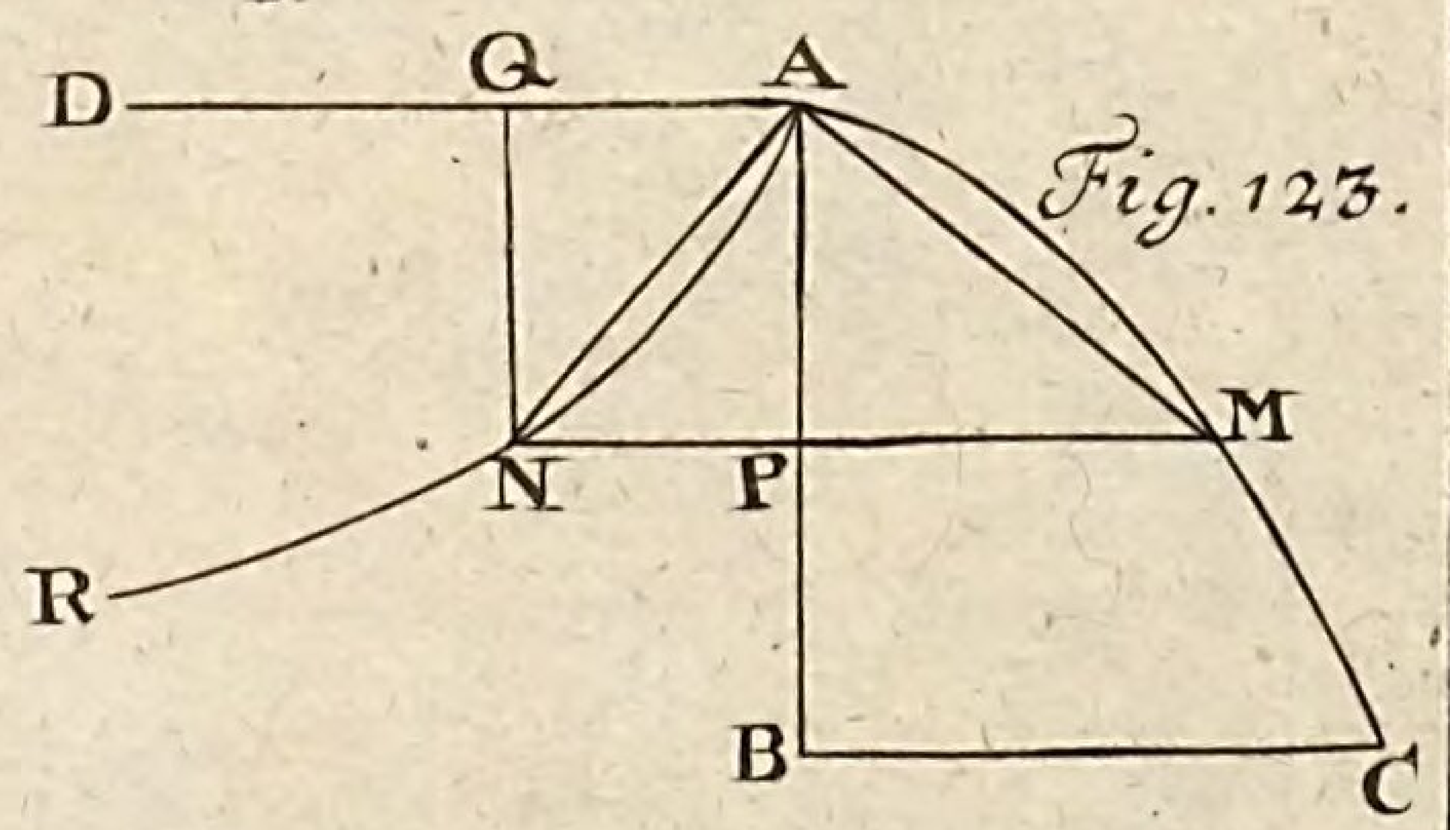


Fig. 123.

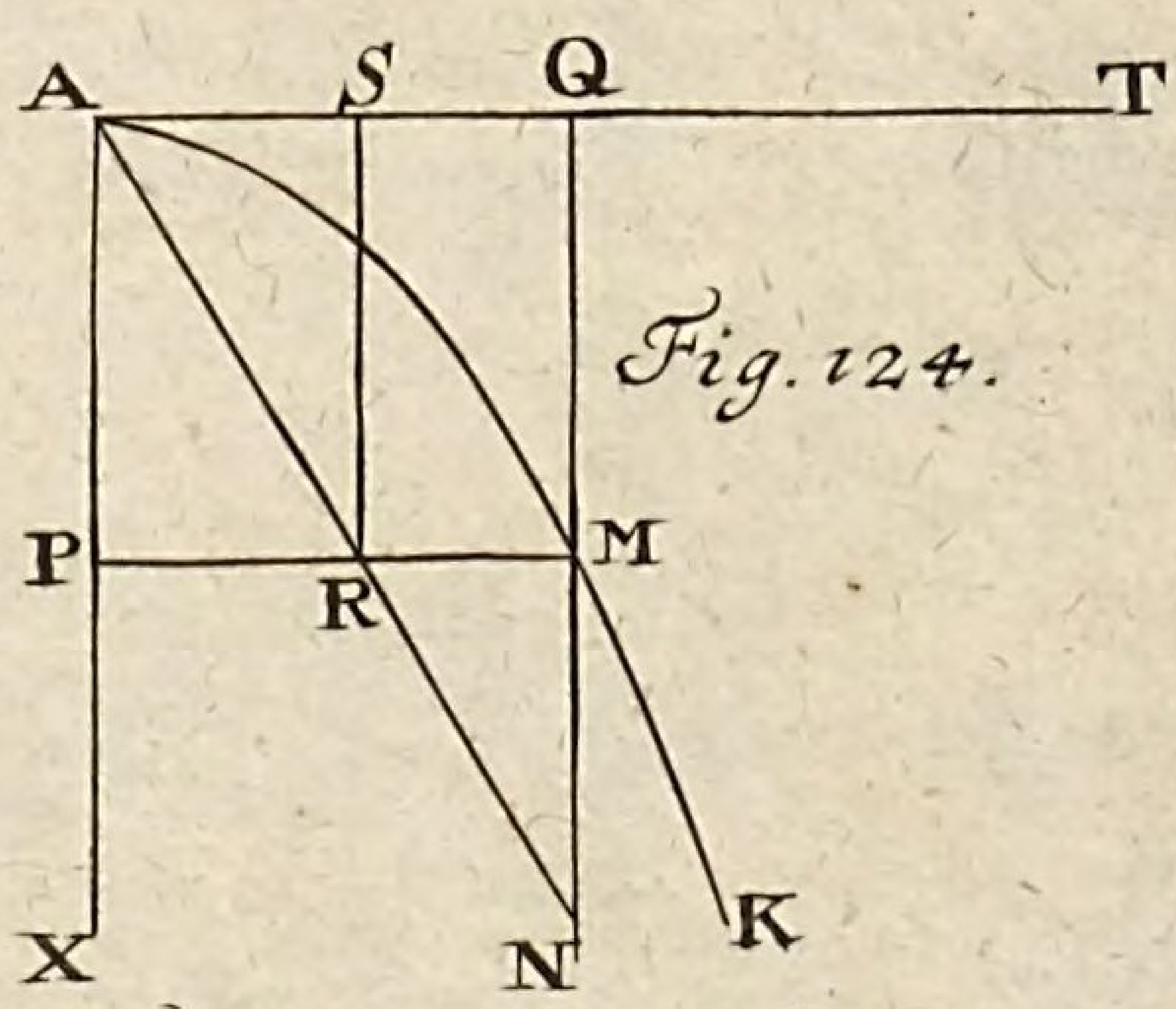
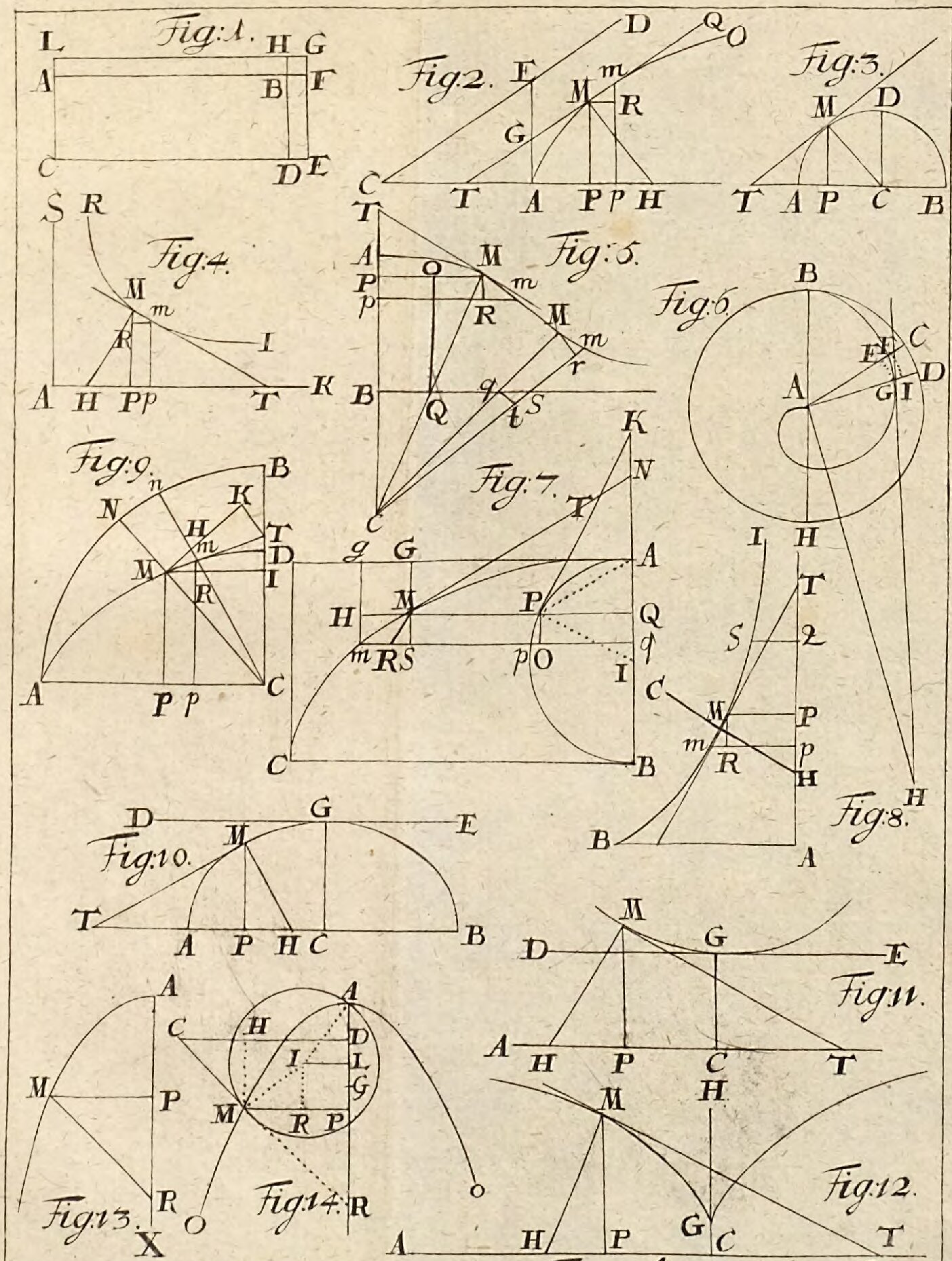


Fig. 124.

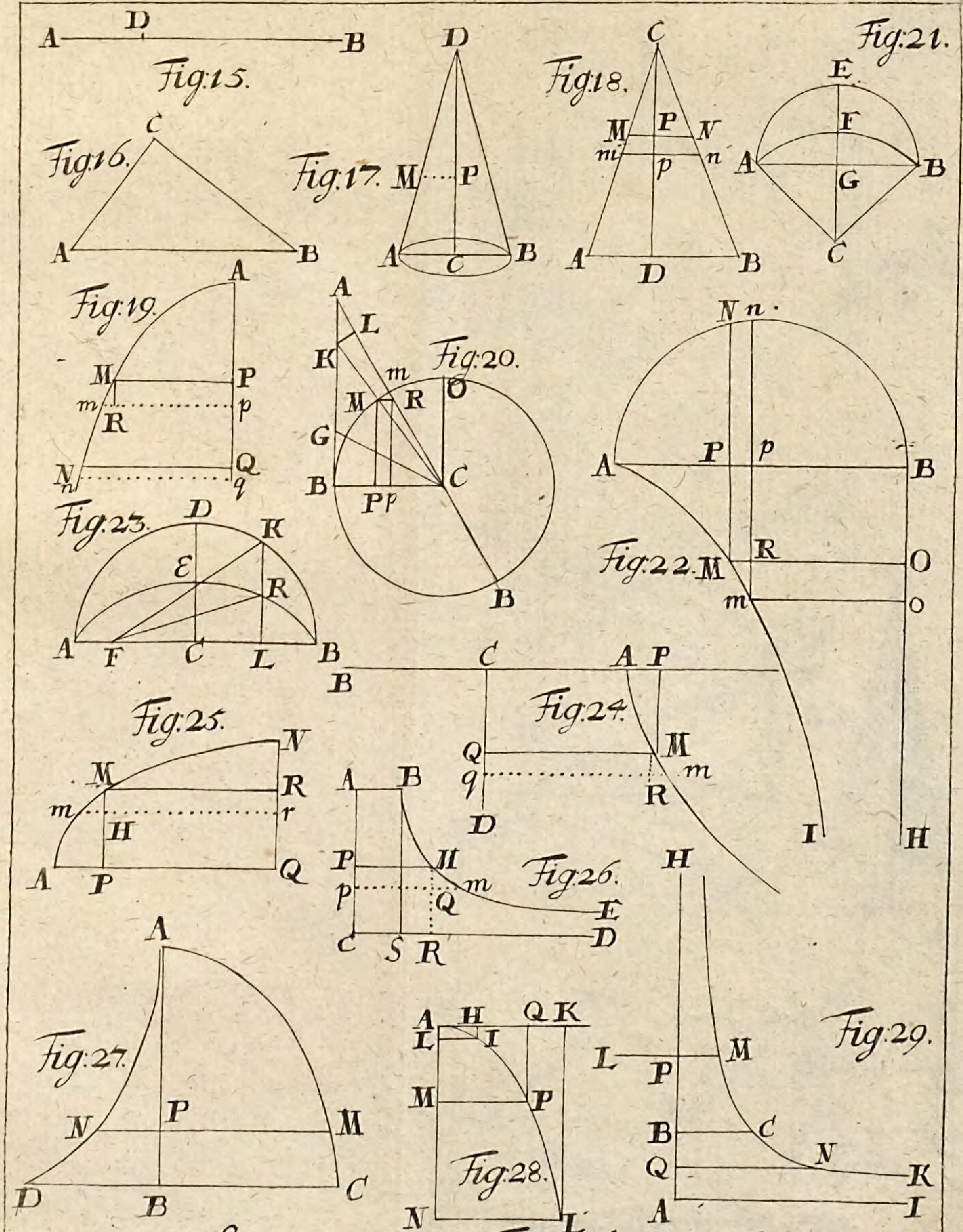
Lit. C. 2.

Fig. Algebr. Tab. XII. b.



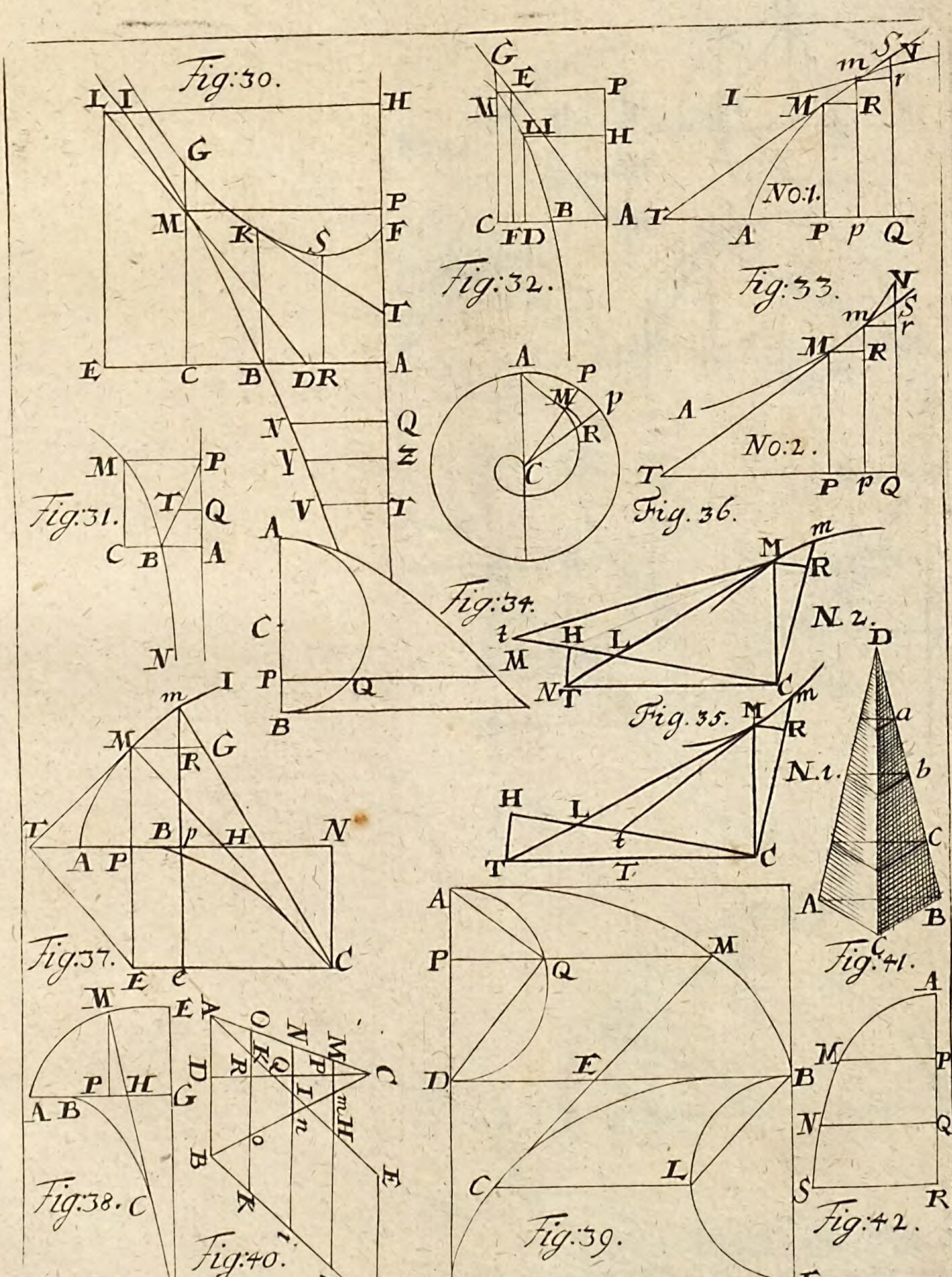
Lit. D2.

Fig: Anal: infin: Tab: I.

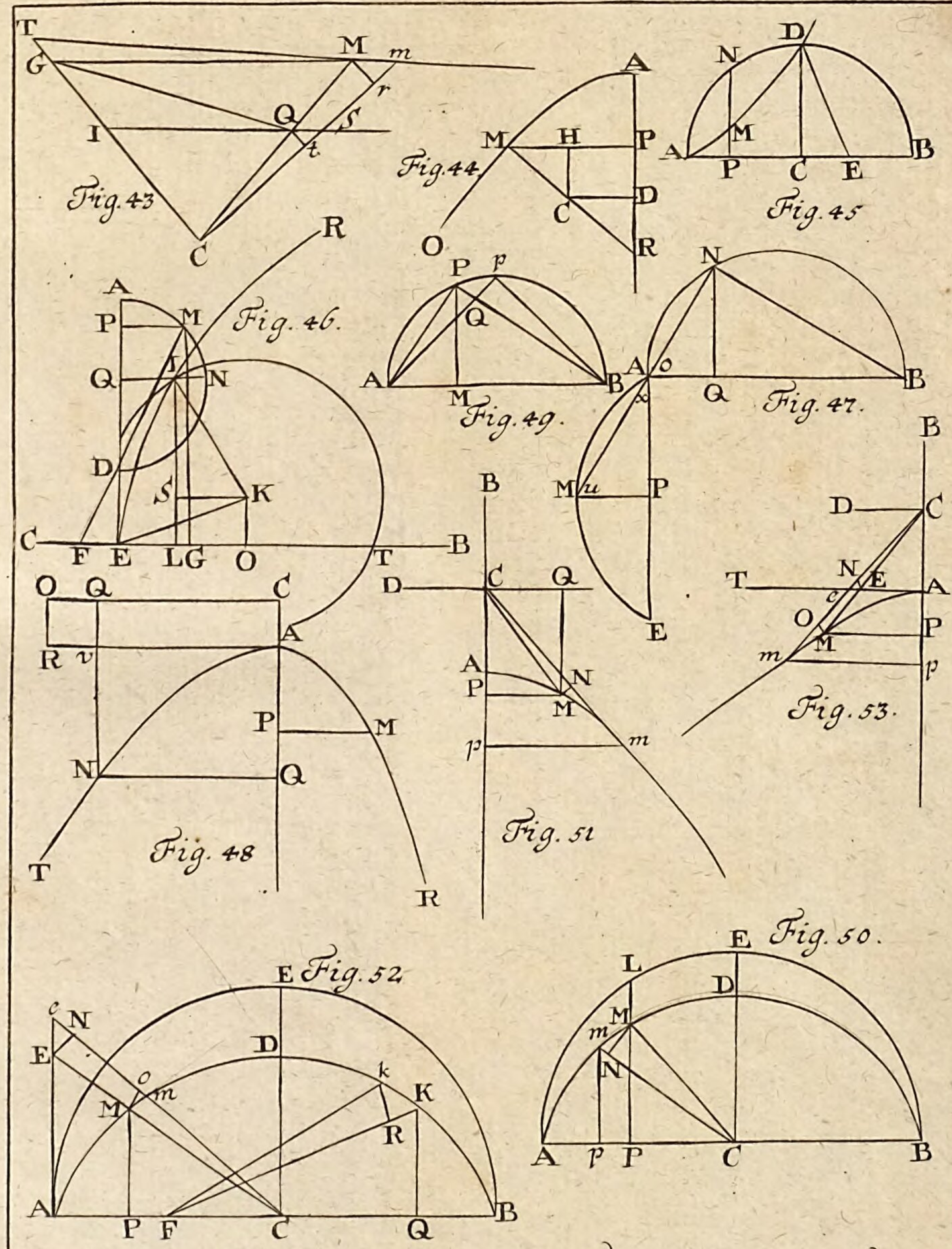


Lit. E. 2.

Fig: Anal: infin: Tab. II.



Lit. F. 2 Fig. Anal. infin. Tab. III.



Lit. G. 2

Fig. Anal. infin. Tab. IV.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wolff, Christian <<von>>,

Elementa Matheseos Universæ

Bd.: Tomus I.

Anno MDCC

Coburg, Landesbibliothek -- E I 7
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11942587-2